

Chapitre un la naissance des variations, la flexibilité et la courbure.

C'est la diversité même: les formes en sont foisonnantes, rien ne semble devoir limiter la multiplicité des différences.

Regardez, il semble qu'elles apparaissent, disparaissent, légères aériennes, si vous les parcourez du regard rien d'elles ne semble vraiment, définitivement immobile, en repos, rien de fixe à jamais, tout est à même de bouger, vibrer, virevolter, ont-elles même une subsistance une consistance? Qu'est-ce qui d'elles me fait assigner la légèreté, le gracile, sont-elles plus que le passage du mouvement? Elles ont la consistance de la légèreté, mais aussi la résistance de la fragilité. Aériennes, la grâce même, elles ne s'envolent pas, la substance du flexible et du fléchi, svelte minceur, épaisseur sans volume, la seule certitude que l'on en puisse saisir est celle d'une fixité insaisissable, puis-je m'emparer de ce qui sans cesse m'échappe? Et pourtant ce n'est pas là le mouvement, c'est tout le mouvement, toute sa diversité, toutes ses formes son parcours, son trajet, mais sans lui. C'est le mouvement arrêté, la forme plurielle, l'étalement multidimensionnel, ce qui tend vers le mouvement, ce qui pourrait se mouvoir, la possibilité même de mouvement.

Et pourtant je puis suivre à travers elles cette pénétration de l'aérien cette continuité du possible multidimensionnel, car elles possèdent des formes.. Non seulement elles en possèdent mais elles en laissent suspendues, dans la réalité de l'esquisse, et je dois me laisser envahir par la contemplation de la fusion entre la réalité de ce que je vois et celle de ce qu'elles suggèrent. Sans cesse elles me montrent ce que je devrais voir. Telles sont les surfaces. Pour toujours elles appellent une forme du toucher, dont une espèce est la caresse.

Tous les degrés séparent la surface plate de la surface courbe; la première est image de l'inanité, les seconds luttent contre cet indéterminé. Identité à soi du plat et du déplié qui fait que jamais le moindre frémissement n'a pu traverser sa légèreté voilà le plan L'aérien et la flexibilité se sont figées solidifiées dans la platitude. Ont-elles perdu dans l'étalement qui leur est imposé, toute intériorité? Il n'en est rien car il suffit d'un frémissement infinitésimal pour leur rappeler qu'elles sont des surfaces. La plus petite courbure est la mémoire revenue du vent. La courbure est ainsi le resurgissement de mouvement intérieur, elle est la solidité vaincue, l'ouverture à la possibilité de toutes les directions. Le rappel du mouvement comme existence de la possibilité des directions, voilà ce que porte la courbure. Si la géométrie est du sensible non sensible, la courbure est du mouvement immobile. Cette immobilité vaincue sur ses propres bases, cette aspiration à continuer ailleurs dans le tracé même lui fait acquérir un pouvoir très particulier. Le courbe impose ses formes et celles-ci nous contraignent. Si je ne puis leur résister ont-elles pour autant une réalité qui leur fait franchir la limite de la réalité géométrique. ?

Courbure est ce qui empêche la cassure, pliure ce qui empêche la déchirure. L'incurvation contient tous les risques pris, la tendance à l'interruption pourtant surmontée. L'association de la surface à la dimension deux n'est pas une fixation essentielle et figée. La

surface est tendance à déborder sa dimension, ce qu'exprime sa modalité de présence singularité ou lissicité. C'est pourquoi elle porte aussi la multiplication des dimensions et leur justification. La possibilité des directions ouvre à celle des dimensions. Elle dit en ce sens à son tour pourquoi et de quelle façon pour être il est nécessaire de faire surgir l'espace. La géométrie contre l'entropie Lutte contre la dispersion lutte contre la destruction c'est ce à quoi s'attaquent les formes de géométrisation. Mais ces formes se doivent d'accueillir en leur sein la réelle possibilité de la destruction qu'elles empêchent. C'est parce que la surface n'est pas encore un corps qu'elle semble n'en être plus un. C'est aussi parce qu'elle présente la mince pellicule de ce qu'elle pourrait recouvrir qu'elle en extrait la forme de solidité.

Si l'on poursuit l'analyse dans cette direction on rencontre une analyse de l'activité théorique sous sa forme mathématique comme négatrice d'histoire. Si celle-ci est ce par quoi s'introduit la transformation comme dégradation, la géométrisation se veut restauration. Ce n'est pas seulement la théorie comme production des connaissances qui donnent accès au contrôle, mais la théorie dans son être même qui ressaisit ce qui pourrait disparaître à jamais. Nous avons affaire aussi à l'acte de la production comme une essence. C'est certainement là un des sens du platonisme.

Cet ouvrage est une analyse d'un concept essentiel de la géométrie, qui dès lors qu'il a été compris, a entraîné une révolution dans notre façon de comprendre l'activité mathématique et plus particulièrement celle qui est consacrée à la géométrie. L'expression "a été compris" est celle qu'emploient ordinairement les mathématiciens pour signifier ordinairement qu'une propriété ou même une entité mathématique a été thématifiée et placée dans l'ensemble de celles qui sont considérées comme constitutives d'une théorie, voire d'une discipline.

Ce concept est celui de courbure. J'analyse la façon dont il est construit dans l'ouvrage de K. F. Gauss, la Dissertation sur les surfaces. Une partie essentielle de ce travail est consacrée à

l'analyse des démonstrations de cette œuvre singulière du Prince des mathématiciens, et à l'explication de la structure conceptuelle qui supporte le concept de courbure. Je prends appui sur des ouvrages mathématiques contemporains, mais en raison des objectifs que je poursuis je vais plus loin dans ce que je pourrais appeler des prolongements mathématiques et le déploiement des origines de la construction.

Ce faisant, je développe des bases pour une philosophie des mathématiques et plus spécifiquement de la géométrie. Et je tente d'en tirer des éléments pour une philosophie. Je me situe dans la lignée de toute une tradition philosophique qui fait de l'intégration des mathématiques et de leur analyse une condition de la construction du concept.

Chapitre deux. L'observateur sphérique.

Annonce des *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

GöttingenGelehrte Anzeigen
N°117, 1827

Le texte se présente lui-même comme formulant un point de vue nouveau. Il a déjà cherché les représentations ou les applications d'une surface sur une autre, telles que les plus petites parties soient semblables. Il s'agissait alors de mettre en relation de proportions métriques des surfaces entre elles. Gauss propose cette fois de rapporter toute surface à une surface de référence la sphère.

La sphère auxiliaire sert dans les recherches où entre en jeu une multiplicité de directions de lignes dans l'espace, il est utile de désigner ces directions au moyen des points sur la surface d'une sphère fixe, qui sont les extrémités des rayons tracés parallèlement à ces lignes ; le centre et la mesure du rayon de cette sphère auxiliaire sont ici entièrement arbitraires, de sorte qu'on peut choisir l'unité de ligne pour la mesure du rayon. Avant de pousser plus loin l'analyse remarquons que la sphère concentrique (la figure géométrique

traverse la sémantique qui la décrit) les formes de rapport des déploiements de surfaces, ce à partir de quoi faire des tours, des enveloppements, sorte d'achèvement des repliements qui respecte les régularités telle est la sphère. Elle sert également vectoriellement si l'on peut dire, puisqu'elle devient la référence à un centre et aux directions diverses qui en dimension trois en sont issues.

L'abstraction mise en place par Gauss est une abstraction de nature astronomique sur laquelle je vais m'attarder un peu.

Gauss explique que ce procédé s'accorde fondamentalement avec celui qui est couramment employé en astronomie, où l'on rapporte les directions de droite à une sphère fictive de rayon infiniment grand.

Il y a ici une reprise par Gauss d'abord de l'abstraction astronomique et cosmologique en général et en particulier du rôle de la sphère céleste. C'est la possibilité de rapporter toutes les directions du ciel à un centre qui les unifie et à partir duquel elles peuvent se diversifier. La forme de cette abstraction astronomique est la mise en place d'un observateur centré mais arbitrairement, ce peut être la terre, mais pas nécessairement, et la possibilité de déployer les directions à partir du centre de la sphère. C'est avant tout à partir de cette construction qu'un observateur peut se mettre en place et disposer d'un repère (longitude et latitude). Mais cette première abstraction, celle de la sphère céleste pouvait laisser croire qu'elle était en rapport direct avec la sphère perçue, et organisait notre perception et notre observation des points lumineux dans le ciel.

Je dis laisser croire car il s'agit pourtant d'une idéalité, abstraction géométrique, dont seule la grandeur des distances permet de régulariser et de lisser les formes perçues ou plutôt la perception des formes.

La sphère présente une forme de l'idéalité mathématique et géométrique : les possibilités de déploiement constituent la mathématisation. Et s'y ajoute un élément capital : la construction de l'orientation. Il est possible d'assigner un sens de rotation, ou encore de préserver au cours du déplacement, l'organisation des directions comme celle des points cardinaux. Le haut reste toujours le haut et la droite la droite.

La sphère céleste retourne à l'espace de la géométrie.

L'abstraction de rang deux, que pratique Gauss, par un mouvement de retour théorique, consiste à exporter cette situation dans l'espace abstrait de la géométrie. Il faudrait là encore plutôt dire que l'espace abstrait de la géométrie est constitué par là même. Dans un premier temps Gauss localise dans l'espace abstrait euclidien à trois dimensions la sphère céleste qui a regagné son lieu théorique d'origine. L'ensemble des directions de droite de l'espace est rapporté à une sphère abstraite qui joue le même rôle dans l'espace géométrique de trois dimensions que celui que jouait la sphère céleste dans l'espace astronomique à trois dimensions.

Tout le travail de repérage par la sphère est repris par Gauss dans le langage de la trigonométrie. Chaque point possède des coordonnées qui sont rapportées à la sphère. Il rappelle comment on définit déjà l'inclinaison d'une courbe en la transférant à la sphère. .

A ceci près que cette fois nous pouvons travailler avec la sphère dans l'espace géométrique, elle va servir de référence abstraite pour les objets abstraits de la géométrie, vecteurs, courbes et surfaces.

Le passage à la géométrie de Gauss consiste donc en la constitution d'un observateur dans l'espace de la géométrie sous la forme de cette sphère fictive. La sphère joue alors le rôle d'un transcendantal. Comme je l'ai déjà indiqué dans mon travail sur Ptolémée. On ne saurait trop le souligner: nous avons besoin d'un observateur dans l'espace géométrique où il est si difficile de voir et d'observer. Regardez une droite, qu'en voyez-vous? Courbez-la quelque peu, comme ent allez-vous suivre ses méandres et ses élégances ou ses ratés? Que dire alors des surfaces?

Mais le fait de cette transformation nous apporte les possibilités supplémentaires suivantes: on travaille dans l'espace géométrique autant en physicien qu'en géomètre. La géométrie s'est chargée cette fois des riches propriétés que la sphère a rapportées de son voyage céleste.

Gauss pour traiter des directions de diverses droites de l'espace utilise une sphère auxiliaire qui apporte un haut degré de clarté et de simplicité. Les différents points de la sphère représentent les directions de droite parallèles aux rayons ayant ces points pour extrémités. "Comme la positions de chaque point dans l'espace est déterminée par trois coordonnées, c'est-à-dire la distance de ce point à trois plans fixes perpendiculaires entre eux, il est nécessaire de considérer avant tout, la direction des axes perpendiculaires à ces plans.. Les points de la sphère qui représentent ces directions sont notés (1), (2), (3). "

La stratégie de Gauss consiste à réduire l'ensemble des repérages nécessaires à des situations sur la sphère. N'importe quel point se l'espace euclidien à trois dimensions voit ses coordonnées euclidiennes rapportées à des coordonnées sur la sphère.

Dans l'exposé qui suit Gauss rappelle rapidement les transformations de trigonométrie sphérique usuelles qui mettent en jeu les relations dans le triangle sphérique.

Ce dont traite Gauss ce sont d'abord des relations trigonométriques du premier ordre. je reprends ces relations. Soit un triangle sphérique ABC et le

trièdre OABC correspondant. Ces côtés sont habituellement désignés par les lettres a, b, c, ses angles par les lettres A, B, C (a opposé à A etc.). On dispose l'arête OB suivant l'axe Oz d'un trièdre trirectangle de coordonnées, la face AB étant située dans le plan xOz, de manière que l'abscisse du point A soit négative. On dispose en outre l'axe Oy du côté du plan xOz où se trouve le point C. Les coordonnées du point C sont alors:

$$\begin{aligned} x &= -\sin a \cos B \\ y &= \sin a \sin B \\ z &= \cos a \end{aligned} \quad (1)$$

On fait tourner le trièdre de coordonnées d'un angle c autour de Oy de manière à diriger Oz' suivant OA. Les coordonnées de C dans le nouveau système sont :

$$\begin{aligned} x' &= \sin b \cos A \\ y' &= \sin b \sin A \\ z' &= \cos b \end{aligned} \quad (2)$$

Les deux systèmes de coordonnées satisfont aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} x &= x' \cos c - z' \sin c, \\ y &= y' \\ z &= x' \sin c + z' \cos c \end{aligned}$$

En substituant les expressions (1) et (2) à x, y, z, x', y', z' dans ces dernières formules on obtient les relations suivantes qui ne contiennent plus que les éléments du triangle

$$\begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \end{aligned} \quad (3)$$

Ces relations forment un groupe maintenant appelé groupe de Gauss, exprimant un changement de coordonnées par rotation des axes autour de l'un d'eux.

Par permutation des lettres dans chacune des relations (3) on obtient trois systèmes de relations du premier ordre (i.e. ne faisant intervenir que les côtés et les angles eux-mêmes). Je ne les rappelle pas ici.

On obtient la deuxième relation (Théorème du paragraphe VI) donnée par Gauss dans sa dissertation à partir de la troisième relation du groupe de Gauss, qui est la relation qu'il donne dans sa dissertation avant cette dernière. je voudrais insister sur le point suivant.

ces relations de changement de coordonnées sont des relations dans lesquelles ne subsistent plus que les éléments du triangle sans qu'apparaissent les coordonnées elles-mêmes. Est-ce à dire qu'elles sont intrinsèques? Les côtés et les angles du triangle sphériques s'expriment les

uns en fonction des autres. C'est ainsi qu'on les classe: 3 côtés un angle. Les liens ainsi établis expriment des propriétés du triangle. Ils ne dépendent plus de leur rapport aux coordonnées initialement choisies. Le travail de Gauss doit être considéré comme la mise en forme des propriétés intrinsèques à la sphère, en tout cas de propriétés qui ne dépendent plus des coordonnées mais qui expriment les éléments de la sphère triangle sphérique ici, en les rapportant à des propriétés qui précisent la nature de la sphère elle-même, ou qui l'explorent et l'analysent.

Je vais directement à la fin de ce développement du paragraphe 2. Gauss y démontre une formule classique de trigonométrie sphérique.

trois points L, L', L" sont donnés sur la sphère.

$$\begin{aligned} \cos(1) L = x \quad \cos(2) L = y \quad \cos(3) L = z \\ \cos(1) L' = x' \quad \cos(2) L' = y' \quad \cos(3) L' = z' \\ \cos(1) L'' = x'' \quad \cos(2) L'' = y'' \quad \cos(3) L'' = z'' \end{aligned}$$

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z = \Delta$$

λ est le pôle du grand cercle dont LL' est une partie, le pôle étant du même côté par rapport à l'arc que le point (1) l'est par rapport aux arcs (2) (3).

Il en déduit d'après le théorème précédent :

$$\begin{aligned} yz' - y'z = \cos(1)\lambda \sin(2)(3) \cdot \sin LL' \\ = \cos(1) \lambda \sin LL' \end{aligned}$$

De même pour $zx' - z'x = \cos(2) \lambda \sin LL'$

$$xy' - x'y = \cos(3) \lambda \sin LL'$$

Il en déduit l'égalité : $\Delta = \cos \lambda L'' \cdot \sin LL'$

Il déduit enfin des relations classiques du triangle sphérique. En particulier si la perpendiculaire tracée sur la sphère du point L" sur le côté LL' est notée p on a

$$\sin p = \sin L \cdot \sin LL'' = \sin L' \sin L'L''$$

On peut faire deux remarques : l'ensemble de ces expressions pour un calculateur un peu expérimenté laissent lire dans l'organisation même des notations de formes d'expression, répétitions, symétrie, inversion, des signes de la signification des liaisons établies par les calculs.

Toutes les relations de trigonométrie sphérique établissent des liens intrinsèques à la sphère comme le font ceux énoncés ci-dessus. la sphère acquiert de la sorte une autonomie dans ses fonctions de repérage. Cette autonomie se marque d'abord dans les théorèmes de trigonométrie sphérique. ceux-ci montrent si on les examine dans leur ensemble, une assimilation à la sphère des propriétés métriques du plan ou de l'espace euclidien à trois dimensions. La sphère pourra jouer dans son ordre le rôle de l'espace en trois

dimensions. Plus les liens énoncés dans des théorèmes généraux sont nombreux et systématisés, nous faisant de la sorte circuler sur la sphère, plus cette dernière expose son autonomie. Et les différences par rapport au plan énoncées ne sont que des effets particuliers de cette autonomie.

Et du fait que la sphère possède deux dimensions et limite un volume en trois dimensions l'analyse de ses propriétés lui confère une autonomie propre. Sa géométrie spécifique est donc intrinsèque. Et le travail géométrique consiste même à mettre en évidence cette intrinsécité. Elle est donc pour le géomètre un modèle de géométrie intrinsèque.

L'objectif de mon premier commentaire est de montrer qu'il y a, comme l'énonce Gauss, parallélisme et même parfois identité entre ces propriétés de la sphère et le rôle qu'elle a joué dans l'histoire de l'astronomie et de la cosmologie.

L'application de Gauss.

Ainsi pour résoudre les problèmes que pose la comparaison des directions différentes qui entrent en ligne de compte, on se sert de la trigonométrie sphérique et de quelques autres théorèmes...

Si l'on désigne la direction en chaque point d'une surface courbe de la normale érigée au-dessus de cette surface par le point qui lui correspond, selon le procédé indiqué, sur la surface sphérique, alors selon cette corrélation à chaque point de la surface courbe correspond une droite sur la sphère auxiliaire, et à toute portion de surface correspondra une portion de surface de celle-là.

Considérons un instant la normale et son usage.

A chacune des étapes de l'analyse nous sommes amenés à expliciter un nouvel élément qui nous indique **comment nous nous rapportons à l'espace euclidien dont nous émergeons**. Mais à chaque étape un nouvel intermédiaire nous éloigne de cet espace d'origine et nous rapporte à lui. C'est ainsi qu'il faut voir la paramétrisation d'une surface, l'équation d'une courbe puis son transport sur la surface considérée, la constitution d'un vecteur tangent à une courbe de l'espace euclidien, puis son transport à la courbe de la surface, et enfin la construction de l'espace tangent à la surface en un point donné de cette surface. Au cours de cette construction nous faisons exister comme support de ces propriétés ces objets qui émergent, en conquérant leur autonomie par rapport à l'espace ambiant dans lequel il semble, faussement, qu'ils soient donnés. Par exemple je passe d'une courbe euclidienne à une courbe sur une surface, d'un vecteur tangent à cette courbe à un vecteur tangent à une courbe sur la surface et à un vecteur tangent à une surface en un point. Les concepts qui se trouvaient en position d'analyse

dans l'espace originaire se trouvent à leur tour acquérir une forme de liberté : ils sont détachés de leur construction d'origine pour être transportés sur le nouvel objet qu'ils servent à analyser. Ainsi en est-il du vecteur tangent à une courbe de la surface. Et de même qu'un vecteur tangent à une courbe peut être rapporté à un espace vectoriel, un vecteur tangent à une courbe de la surface est rapporté au plan tangent à la surface en un point.

Soit $x : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$ une paramétrisation d'une surface S et soit $q \in U$.

Le sous - espace vectoriel de dimension 2

$$dx_q(\mathbf{R}^2) \subset \mathbf{R}^3$$

coïncide avec l' ensemble des vecteurs tangents à S en $x(q)$.

En chaque point d'une telle surface nous disposons d'un plan tangent en ce point, ces plans enveloppent la surface qui à ce titre est support d'une infinité non dénombrable de plans tangents. De ce point de vue le passage en dimension deux à partir des courbes est une analogie exacte.

Il est non moins remarquable que l'ensemble des opérations qui nous transportent du plan euclidien \mathbf{R}^2 ou de l'espace \mathbf{R}^3 au plan tangent à une surface donnée se fonde pour une part essentielle sur la structure vectorielle. Ce sont ces structures qui sont transportées à la surface analysée. Le plan tangent est donné par une équation qui se compose de la somme des dérivées partielles de l'équation de la surface en question. L'espace vectoriel tangent n'est rien d'autre que l'espace des dérivations. L'équation et la structure vectorielle achèvent de transformer la représentation géométrique en une systématique d'opérations, qui ne cessent pas pour autant d'être sous-tendues par l'objet géométrique qu'elles contrôlent.

On peut poursuivre l'analyse : Gauss étend la fonction de référence de la sphère aux surfaces entières. On va grâce à la façon dont on a usé de la sphère rapporter toutes les surfaces à cette sphère auxiliaire. Nous assistons à une constitution dans l'abstraction géométrique d'un système de repérage sphérique point par point. Toute surface de cette façon est vue de la sphère. L'observateur opère depuis le centre de la sphère, comme observateur vectoriel. Il me faut encore préciser le concept d'abstraction géométrique puis celui d'observateur vectoriel.

J'ai déjà rappelé le rôle que joue la sphère dans la constitution de l'astronomie mathématique. L'univers est conçu comme un objet géométrique : il est homogénéisé à partir de l'extension d'un centre ou depuis une extension à partir d'un centre. Comme s'il était de la sorte saisi par l'observateur, condition de toute observation. Il faut maintenant comprendre que c'est dans l'espace cartésien de la géométrie que la sphère prend maintenant place. Historiquement c'est sans doute le mouvement inverse qui s'est produit: la sphère astronomique s'est étendue pour laisser place à un espace euclidien infini. Je dirais volontiers que nous avons affaire à une "réintériorisation" dans la géométrie de ce mouvement. Et Gauss utilise pleinement après cette transposition, les fonctions de la sphère astronomique, cette fois dans l'espace géométrique. Mais ce à quoi procède le géomètre semblable à l'astronome, c'est à une observation de la constitution de sa place.

D'abord il observe les surfaces autres que la sphère et il les observe en les rapportant à la sphère.

A toute ligne sur la surface courbe correspond une ligne sur la surface auxiliaire, et à toute portion de surface de celle-là correspondra une portion de surface de celle-ci.

Précisons cette mise en correspondance. Gauss a mis en forme un concept de normale à la surface considérée, connexe, à qui il fait décrire une courbe fermée. Le déplacement de la normale sortante sert à décrire sans la cerner la courbure de la surface. La longueur de ce vecteur normal n'importe pas à ce stade. Mais on peut remarquer que le vecteur normal est un indicateur qui développe dans l'espace géométrique ambiant les effets de la courbure. Un observateur de courbure parcourt la surface examinée et son oscillation traduit la variation. Dans cette situation également un observateur vectoriel

rationalisé est mis en place. On peut le voir comme une verticalité locale abstraite (une règle rigide verticale, ou plus encore un homme abstrait debout) que l'on déplace de proche en proche. L'application de Gauss consiste en un transport des vecteurs normaux à la surface considérée dans la sphère en son centre.

De la sorte les effets de courbure enregistrés par le parcours du vecteur normal sur la surface sont rapportés à la sphère elle-même. Les vecteurs normaux sont rapportés au centre de la sphère : le centre redevient un observateur mais cette fois il devient possible de restituer les effets de l'observation de la courbure sous une forme métrique sur la sphère. Les vecteurs ramenés au centre de la sphère saisissent, en la délimitant, une portion de surface de la sphère elle-même.

Il s'agit de pouvoir répondre à la question : qu'est-ce que d'une surface sphérique une autre surface qui lui est rapportée, saisit? Et une fois cette question mise en place: la portion de surface sphérique recouverte selon cette procédure par la surface en examen, il est possible de considérer son rapport à la surface de départ –avant qu'elle ne soit appliquée sur la surface sphérique.

Moins cette portion s'écarte du plan, moindre sera la portion correspondante de la surface de la sphère qu'elle recouvre; revenons sur cette analyse. Ce que nous constatons facilement, plus c'est courbe, plus cela s'éloigne du plan (du droit au courbe) est mathématisé, rendu mesurable dans une relation à la sphère. Se rapprocher de la sphère devient : en recouvrir une portion, grâce au fait que l'on a rapporté les normales (les vecteurs normaux) au centre de la sphère.

Toute la mise en forme de Gauss consiste à établir un rapport entre la surface étudiée et la surface de la sphère, comme on le voit, mais de sorte que ce rapport soit quantitativement évalué. La surface est appliquée sur la sphère du point de vue des délimitations par les normales qui l'ont parcourue. La sphère ainsi délimitée est promue au rang d'observateur métrique. On voit en tenant compte de sa courbure, seulement phénoménologiquement dessinée, dans son rapport à l'espace ambiant, dans quelle portion de sphère elle s'insère.

Cette remarque est une remarque clé, on pourrait presque dire qu'elle contient toute la théorie de Gauss. Depuis le plan sans courbure que l'on peut transporter pour qu'il soit tangent à la sphère (un point commun seulement) jusqu'à la

surface sphérique qui coïncide avec la sphère il y a toute une échelle infinitésimale de surface dont la coïncidence avec la surface sphérique est de plus en plus importante au fur et à mesure qu'elles s'éloignent du plan, qu'elles en diffèrent. Moins c'est plat plus cela coïncide en surface avec la sphère. D'où l'établissement d'un passage de l'éloignement de la platitude du plan à une plus ou moins grande portion d'aire de la surface sphérique.

De sorte que c'est une idée très naturelle d'utiliser comme mesure de la courbure totale qui doit être assignée à une portion de la surface courbe, l'aire de la portion correspondante de la surface sphérique.

C'est ce passage, extension de cette forme d'abstraction géométrique, qui est un acte de grande portée. Il est possible de traduire sous la forme d'une extension ce qui est donné comme courbure. Comme si un effet de la courbure était donné à voir dans une aire. Il me semble que c'est encore là un des actes de constitution de la géométrie différentielle: comprendre et concevoir que dans une causalité géométrique la courbure d'une figure se mesure par la surface sphérique qu'elle peut saisir. La courbure, je la saisis comme telle par la perception, ce sont toutes les formes d'arrondis qui sont déployées dans l'espace. Il est non moins remarquable dans cette construction, qu'elle rend possible les opérations d'extension, par exemple ce que j'appelle la propagation dans une surface à deux dimensions de la courbure d'une courbe. Mais cette forme se définit négativement si je puis dire par sa différence avec le plan. Etudier une surface c'est donc pouvoir étudier continûment la courbure elle-même. La courbure lui appartient comme si elle en constituait « l'intérieur ».

Analogiquement, on peut dire que la courbure accorde à la surface sa substantialité.

En usant du terme de substantialité on désigne une contrainte géométrique très spécifique, contrainte qui se déploie en dimension deux, qui engendre la forme surface à partir de la courbure, mais surtout l' « épaisseur » de la surface qui lui confère son autonomie. Toutes ces expressions qui réinjectent des termes d'origine sensible ou physique dans une situation idéale, géométrique, expriment ce que j'appelle une physicalisation de la géométrie, qui en rend possible la nouvelle structuration. J'en présente plus bas une analyse plus approfondie.

L'auteur nomme cette aire la courbure entière de la portion correspondante de la surface courbe. Mais en dehors de la grandeur, il faut aussi en même temps tenir compte de la position de la portion considérée, laquelle peut être semblable ou inverse pour deux portions données, tout à fait indépendamment du rapport de grandeur : ces deux cas pourront être distingués au moyen du signe positif ou négatif de la courbure totale.

Gauss fait intervenir un concept important qui sert à qualifier la courbure, celui de positif ou de négatif. Ce terme renvoie à la position de la portion de surface considérée. C'est aussi bien la manière que l'on présente de décrire ou d'observer la courbure, selon par exemple que je suis situé devant ou derrière. La positivité indique de quel point de vue la portion est courbée, intérieur ou extérieur.

Cette distinction n'a cependant déterminée que si l'on considère que les figures sont sur des faces déterminées des deux surfaces en cause: dans le cas de la sphère, l'auteur regarde les figures sur la face extérieure, et dans le cas de la surface courbe, sur la face sur laquelle on érige les normales.

L'élément qui sert à déterminer la positivité ou la négativité de la courbure est la normale sortante. C'est un observateur, testeur abstrait qui définit une sorte d'extérieur. C'est la normale qui en quelque sorte prolonge la courbure. Abstraction de l'orthogonalité au plan tangent elle concrétise par rapport à la situation spatiale la courbure que « décrit » le plan tangent. Mais elle donne aussi bien une indication sur la nature d'un parcours courbe de la surface. C'est tout autant une orientation qui passe dans la géométrie de la courbure. De ce point de vue nous n'avons rien perdu de la structure, bien entendu, abstraite, d'un observateur astronomique.

Un observateur ainsi métrisé est-il bien encore un observateur? On doit considérer qu'il observe, ainsi mis en position, la courbure, de l'intérieur (ce sera tout le sens du *theorema egregium*). Et il enregistre le taux de variation de la normale à la surface en le rapportant à sa présentation pour un instrument de mesure. Au lieu d'observer comme un astronome une planète lointaine dans le cadre d'une vision d'abord étendue, la portée du regard est au contraire restreinte à une situation qui représente l'effectivité de la courbure.

De la que l'on a le signe positif dans le cas des surfaces convexo-convexes ou concavo-concaves, lesquelles ne sont pas essentiellement différentes, et le signe négatif dans le cas de surfaces concavo-convexes. Je reviendrai sur la question de convexité et de concavité. On voit ici dans le premier cas la normale point dans des directions qui ne rétrogradent pas. Dans le second cas elles rétrogradent au sens où l'effet de courbure fait qu'elle revient en arrière, l'orientation de la normale sortante étant ainsi renversée; le

changement d'orientation correspond à une rétrogradation dans un parcours dont la trajectoire est une courbe fermée;

La courbure est donc ainsi définie ou positive ou nulle ou négative. Quel type de prise en tironons-nous sur la réalité? Par un nouveau mixte, remontée de la physique dans la géométrie où se constituent de nouvelles contraintes, mais avec une abstraction de cette contrainte physique qui s'installe dans la géométrie (un physico-géométrie) nous apprenons précisément par la mise en place de ce dispositif la physique géométrique nous donne les moyens de comprendre la réalité physique.

Il faut comprendre que la remontée de la physique est tout autant une décomposition analytique des actes par lesquels nous saisissons un phénomène physique, ou une caractéristique physique. Je constitue la stabilité suivant laquelle je suis un contour de manière à en transcrire la perception complète.

C'est pourquoi nous irons plus tard vers le tenseur de courbure.

Que remarquer sur la qualité fournie par le signe de la courbure qui est dite positive ou négative? Le qualitatif est enregistré directement dans le rapport à la sphère. L'application de Gauss conserve l'orientation. Le signe de la courbure indique de quel côté par rapport au plan (de courbure nulle) la surface ou le volume sont incurvés. Là encore le passage par une courbure de signe opposé indique un changement d'orientation du vecteur normal.

La comparaison des aires des deux portions correspondantes de la surface courbe et de la surface de la sphère auxiliaire conduit à présent à un nouveau

concept de la même manière que, par exemple, le concept de densité s'obtient par comparaison du volume et de la masse.

Avant de donner la définition de la mesure de courbure il nous faut nous attarder sur les formulations de Gauss. Il a réussi à installer l'aire de la surface courbe dans un rapport à l'aire de la sphère, comme s'il s'agissait d'un taux de sphéricité, et il emploie tout naturellement une comparaison avec la densité physique, rapport de volume à la masse. L'image sur la sphère ou sa courbure joue le rôle du volume et la surface courbe que l'on compare à la sphère celui de la masse. Combien un corps occupe de place pour une masse donnée c'est ce à quoi renvoie le rapport de la surface appliquée dans la sphère à la surface que l'on examine. Le langage sphérique permet l'analogie qui donne une signification sur la base de cette analogie au concept de courbure. Il est nécessaire de poursuivre l'analyse.

Si je demande quelle place, portion de sphère découpée selon les normales centrées en celle-ci occupe la surface considérée, j'ai affaire à une construction, dans l'idéal de la géométrie, qui est de nature physique. La courbure c'est ce qui force une place dans la sphère. De la sorte la surface initiale produit son effet sur l'observateur qu'est la sphère.

L'auteur nomme proprement mesure de courbure en un point de la surface courbe, la valeur de la fraction dont le dénominateur est l'aire infiniment petite de la surface courbe en ce point, et le numérateur, l'aire de la portion correspondante de la surface de la sphère auxiliaire, ou la courbure entière de cet élément. On voit que, dans le sens de l'auteur, la courbure entière et la mesure de courbure dans les surfaces courbes sont analogues à ce que, dans les lignes courbes, on appelle respectivement l'amplitude et la courbure.

Gauss se rapporte à la courbure des courbes (dimension un) et ce qui dans les courbes est amplitude est courbure et c qui est courbure est mesure de courbure. Je rappelle ce qu'est la courbure moyenne d'une courbe. Soient M et M' deux points de la courbe L; les tangentes en M et M' orientées dans le sens de parcours sur la courbe font entre elles un angle ω ; le rapport de l'angle ω à la longueur de l'arc MM' est appelée courbure moyenne de l'arc MM'. On appelle courbure de la courbe L au point M la limite de la courbure moyenne de l'arc MM' quand M' tend vers M.

$$C = \lim_{\text{arc}MM' \rightarrow 0} \frac{\omega}{\text{arc}MM'}$$

La courbure en tout point d'une droite est nulle, la courbure en tout point d'un cercle de rayon R est 1/R. Pour tout autre courbe la courbure varie d'un point à l'autre. Au voisinage des points où elle est nulle la courbe ressemble à une droite. On peut dire que la courbure moyenne est l'expression de la manière dont une droite tourne en fonction de la longueur parcourue.

On remarque le rôle important joué par le concept de limite. Il s'agit de concentrer en un point, le rapport de la courbure et de la longueur, la limite donne le moyen de préserver le quotient lui-même. Comment conserver dans la diminution infinie le rapport d'une longueur et d'une courbure? Il faut donc voir que par l'intervention de la limite c'est une sorte de synthèse qui est effectuée. La limite permet de concentrer et de saisir la virtualité du déploiement.

Gauss a procédé par extension à partir des courbes ou planaires ou gauches. Le même rapport existe entre courbure entière et mesure de courbure, il lui faut passer en

dimension deux. Le quotient qu'il fait intervenir joue le même rôle de concentration synthèse entre une aire et une courbure (moyenne) en un point. La réduction à la ponctualité là encore, fait apparaître la structure essentielle de la courbure. Le passage à la limite conceptuellement parlant est bien un élément essentiel de la définition du concept de courbure. Pourquoi? C'est la forme à la fois qualitative et métrique qui caractérise ce concept. On y voit encore une mesure sans que cette mesure soit celle d'une longueur immédiate donnée. En des termes à peine métaphorique on dira qu'elle acquiert une réalité dans la mesure où elle se concentre dans l'esquisse virtuelle. La courbure c'est ce par quoi nous sommes ponctuellement toujours en train de tourner.

La solution du problème qui consiste à trouver la mesure de courbure en chaque point d'une surface courbe se présente sous des formes différentes selon la manière dont la nature de la surface courbe est donnée. La manière la plus simple, si les points dans l'espace en général sont distingués au moyen de trois coordonnées rectangulaires x , y , z , est de représenter l'une des coordonnées comme fonction des deux autres: on obtient ainsi l'expression la plus simple de la mesure de courbure. Mais en même temps se dégage une relation remarquable entre la mesure de courbure et les courbures des courbes qui s'obtiennent en prenant l'intersection de la surface courbe et des plans perpendiculaires à cette surface.

La stratégie d'exposition de Gauss consiste ici à reprendre, une fois posé le concept même de courbure, les conditions de possibilité de calcul de la courbure en coordonnées. Puisque nous disposons de l'équation de la surface, et du rapport établi entre la courbure et la surface on doit pouvoir donner une expression de la courbure en les termes de l'équation de la surface. L'équation que propose Gauss est

celle que l'on obtient pour une sous-variété en termes de fonction implicite.

Je reprends l'exposé de façon plus explicite.

Considérons une sous-variété de dimension 2 de \mathbb{R}^3 et $i: M \rightarrow \mathbb{R}^3$

1) $n(p) \in \mathbb{R}^3$ est perpendiculaire à M_p

2) $n(p), v, w$ est orienté positivement dans \mathbb{R}^3 dès que $v_p, w_p \in M_p$ le sont.

Nous avons donc l'application normale $n: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui de fait va sur la sphère unité $n: M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$

Gauss écrit X, Y, Z pour $n^1(p), n^2(p), n^3(p)$

C'est là l'application de Gauss. On peut en donner des formules explicites en coordonnées. Je reprends la présentation de Spivak.

Si $M = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid W(p) = 0\}$

pour $W: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ alors $dW = 0$ sur M soit $d(v_q) = 0$ pour tout $v_q \in M_q$

On développe

$$\frac{\partial W}{\partial x}(q) \cdot v^1 + \frac{\partial W}{\partial y}(q) \cdot v^2 + \frac{\partial W}{\partial z}(q) \cdot v^3 = 0$$

$$\left\langle \left(\frac{\partial W}{\partial x}(q), \frac{\partial W}{\partial y}(q), \frac{\partial W}{\partial z}(q) \right), v \right\rangle = 0 \text{ pour tout } v_q \text{ dans } M_q$$

$$n(q) = \text{le vecteur normalisé } \left(\frac{\partial W}{\partial x}(q), \frac{\partial W}{\partial y}(q), \frac{\partial W}{\partial z}(q) \right)$$

On donne une expression de n en coordonnées de \mathbb{R}^2 . Soient (s,t) ces coordonnées Gauss les appelle (p,q) . On appelle la fonction inverse

$$\chi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$$

soit f . Nous avons besoin des composantes de cette fonction comme application dans \mathbb{R}^3 pour obtenir une formule pour n .

Si $q = f(s,t)$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^1} \Big|_q = \left(\frac{\partial f}{\partial s}(s,t) \right)_q = \left(\frac{\partial f^1}{\partial s}(s,t), \frac{\partial f^2}{\partial s}(s,t), \frac{\partial f^3}{\partial s}(s,t) \right)_q$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_q = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s,t) \right)_q = \left(\frac{\partial f^1}{\partial t}(s,t), \frac{\partial f^2}{\partial t}(s,t), \frac{\partial f^3}{\partial t}(s,t) \right)_q$$

Et donc

$n(f(s,t)) =$ le produit croisé normalisé

$$\left(\frac{\partial f^1}{\partial s}, \frac{\partial f^2}{\partial s}, \frac{\partial f^3}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial f^1}{\partial t}, \frac{\partial f^2}{\partial t}, \frac{\partial f^3}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\frac{\partial f^1}{\partial s} \frac{\partial f^3}{\partial t} - \frac{\partial f^2}{\partial t} \frac{\partial f^3}{\partial s}}{\Delta}, \dots, \dots$$

Δ est la norme du produit croisé

Enfin en termes de graphes

Si M est le graphe de $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ t q $M = \{(x,y,g(x,y)) : x,y \in \mathbb{R}^2\}$

M est l' image de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(s,t) = \{s,t,g(s,t)\}$$

$n(s,t,g(s,t)) =$ le produit croisé normalisé

$$\left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial x} \right) \times \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

La définition du produit vectoriel nous indique comment donner une verticale pour une surface quelconque comme précisément la normale à la surface.

Il est la formule de la sortie du plan. C'est pourquoi Gauss insiste sur l'origine astronomique de ses constructions. On sait que la norme du produit vectoriel au carré de deux vecteurs u et v se définit comme l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs u et v aire représentée par le produit vectoriel orthogonal au plan des vecteurs u, v , normé. On se souviendra du fait que le vecteur produit vectoriel ainsi donné est bien celui par lequel la surface est située dans l'espace à trois dimensions. Si l'on se rapporte à un système d'axes orthonormés il doit être noté que nous attachons ainsi à tout point de la surface un repère. Ce repère peut toujours se ramener à la station verticale d'un homme qui primitivement est situé et initialement constitutif du tridimensionnel. Toute surface est munie de son instrument de sortie dans l'espace et cette sortie n'est rien d'autre que la représentation de l'espace à trois dimensions mise en mouvement. Elle a cessé de la sorte d'être le pur contenant statique pour devenir un opérateur de démultiplication du contenant initial. De ce fait en même temps l'observation abstraite ou plutôt l'observateur ainsi produit est local et nous avons obtenu de comprendre la surface comme déterminant son déplacement. Et le mouvement théorique par lequel nous avons établi la construction de la normale est aussi un moment du passage à la surface même par opposition au fait de la situer dans le système de coordonnées.

On a les moyens de comprendre la définition de la mesure de courbure que nous avons commentée philosophiquement plus haut.

$$k(p) = \lim_{A \rightarrow p} \frac{\text{aire } n(A)}{\text{aire } A}$$

Considérons la surface S^2 et l'application $n : S^2 \rightarrow S^2$ qui est l'identité

$$k(p) = \frac{\lim_{A \rightarrow p} \text{aire } n(A)}{\text{aire } A} = 1$$

Il est facile de voir avec cette définition que le plan a une courbure nulle.

De même qu'une sphère de rayon r a une courbure de $1/r^2$

Et le cylindre n'a pas de courbure.

Cette définition est très intuitive et elle peut être formalisée.

Considérons

M sous-variété de R . Nous pouvons la munir de la métrique riemannienne

induite par la métrique riemannienne de R . \langle, \rangle donne $i^* \langle, \rangle$. Avec l'orientation de M cette métrique détermine une 2-forme dV sur M

$dV(q)(v_p, w_q) =$ l'aire algébrique du parallélogramme engendré par v_p, w_q

Sur la sphère on a aussi un élément de volume induit par la métrique riemannienne et son orientation usuelle. C' est une 2-forme soit σ' .

$$k(p) = \frac{n^*(\sigma')(p)}{dV(p)}$$

On divise deux formes mais c'est possible toute 2-forme sur une 2-variété est un multiple de la 2-forme non nulle dV .

La définition donnée par Spivak nous situe dans l'interprétation moderne mais elle ne fait que traduire les concepts de fond de Gauss. J'en commente certains aspects.

D'abord je puis induire une métrique sur la surface. Ce qui veut dire que je peux toujours, ne serait-ce que parce que je me suis donné une sous-variété de \mathbb{R}^3 transporter sur cette sous-variété ou plutôt sur son espace tangent en un point $T_p(S)$ un produit intérieur qui si $T_p(S)$ est inclus dans \mathbb{R}^3 est le produit intérieur de \mathbb{R}^3 .

Pourquoi introduire le concept de sous-variété? (cf. Gauss 2)

Il est tout aussi remarquable que dans un premier temps l'induction de cette métrique réalise ce par quoi la surface (sous-variété) appartient à, dépend de l'espace ambiant; mais cette construction est ce qui rend possible toutes les mesures les calculs de longueur des courbes, d'aires, des angles des vecteurs tangents etc.) On sait alors calculer l'aire algébrique du parallélogramme engendré par deux vecteurs tangents en un point. Cette aire est aussi donnée dans le langage plus moderne des formes : c'est une 2-forme, dont la construction est équivalente au produit vectoriel comme nous l'avons déjà noté.

On doit remarquer que la définition moderne use de la métrique induite par la métrique riemannienne. On veut mesurer une courbure.

On sait qu'Euler le premier a montré que deux de ces plans sécants, qui se coupent également l'un l'autre à angles droits, ont cette propriété que dans l'un se trouve le plus grand et dans l'autre le plus petit rayon de courbure, ou plus exactement que dans les deux plans pris ensemble se trouvent les deux courbures extrêmes.

Je reviens sur l'expression de ce théorème. Les articles 1 à 3 donne les préparations élémentaires avec les conventions de notation et des résultats de trigonométrie sphérique. Je rappelle la convention de notation des points de la sphère unité ci-dessus

$$S^2 = \{ \underline{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3) \in E^3 \mid \langle \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}} \rangle = 1 \}$$

les vecteurs de la base canonique sont notés par Gauss (1), (2), (3)

Les angles entre droites et droites, plans et plans, et droites et plans dans E sont définis au moyen de longueurs de segments de grands cercles et angles entre grands cercles sur S^2 .

L'identité suivante est prouvée.

$\langle \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}, \underline{\tilde{\mathbf{a}}} \times \underline{\tilde{\mathbf{b}}} \rangle = \langle \underline{\mathbf{a}}, \underline{\tilde{\mathbf{a}}} \rangle \langle \underline{\mathbf{b}}, \underline{\tilde{\mathbf{b}}} \rangle - \langle \underline{\mathbf{a}}, \underline{\tilde{\mathbf{b}}} \rangle \langle \underline{\mathbf{b}}, \underline{\tilde{\mathbf{a}}} \rangle$, les points sont sur la sphère.

Cette identité est connue comme identité de Lagrange. Le théorème de Lagrange est plus exactement

$$\langle \underline{\mathbf{a}}_1 \times \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3 \rangle^2 = \det(\langle \underline{\mathbf{a}}_i, \underline{\mathbf{a}}_j \rangle)_{i,j=1,2,3} \text{ pour } \underline{\mathbf{a}}_1, \underline{\mathbf{a}}_2, \underline{\mathbf{a}}_3 \in E^3$$

Cas particulier : ($\underline{\mathbf{a}}_3 = \underline{\mathbf{a}}_1 \times \underline{\mathbf{a}}_2$)

$$\langle \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} \rangle = \langle \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{a}} \rangle \langle \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{b}} \rangle - \langle \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}} \rangle^2$$

Tout le travail effectué par Gauss correspond à une installation d'une signification sphérique du calcul vectoriel. Déjà à cause de la nature de la sphère auxiliaire. Les différents points de la sphère représentent les directions des droites parallèles au rayon ayant leur extrémité en ces points.

Comme tout point de l'espace est déterminé par trois coordonnées, c'est-à-dire la distances du point de trois plans fixes perpendiculaires entre eux, il est nécessaire de considérer avant tout, les directions des axes perpendiculaires à ces plans. Les points de la sphère, qui représentent ces directions nous les noterons par (1), (2), (3). La distance de l'un des ces points à l'un ou l'autre des deux autres sera un quadrant.

Donc la sphère a repris ses droits dans l'espace et la signification du calcul vectoriel est également développée de ce point de vue. C'est la signification que Gauss accorde au produit croisé.

C'est seulement ainsi que je peux revenir à l'application sphérique ou application de Gauss dont le commentaire a été fait au début, et que Gauss lui-même annonce dans l'introduction. Celle-ci i) est introduite dans l'article 6.

Outre cette application est introduite dans cet article ii) la définition de la valeur absolue de la courbure totale (curvatura totalis) d'un sous ensemble compact D d'une surface M de E^3 , comme étant l'aire de son image par l'application sphérique dans S^2 . Enfin iii) la définition de la mesure de courbure est introduite. C'est elle que l'on appelle aujourd'hui la courbure gaussienne.

J'ai donné une signification à peine modernisée à cette définition.

La courbure gaussienne $K(A)$ de M au point $A \in M$

$$|K(A)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{aire}(N(D_\varepsilon))}{\text{aire}(D_\varepsilon)}$$

D_ε étant un ε - voisinage compact de A dans M

Un signe est attribué à cette courbure. Celle-ci est donnée comme négative ou positive selon que

la différentielle de N en A composée avec une translation de E qui renvoie $N(A)$ sur A c'est - à - dire l'application linéaire tangente

$\tau \circ N_*|_A: T_A M \rightarrow T_A M$ du plan tangent à M en A sur lui - même préserve l'orientation.

La propriété de préservation de l'orientation est définie par Gauss topologiquement

préservation par N du nombre d'intersection des paires de courbes transverses sur M passant par A ; la propriété de N d'appliquer la direction winding de ∂D_ε autour de D_ε sur la même winding direction de $N(\partial D_\varepsilon)$ autour de $N(D_\varepsilon)$

La notion essentielle, d'orientation doit être commentée. Qu'est-ce que l'orientation d'une surface? Si l'on se donne une surface et un plan tangent à celle-ci $T_p(S)$, orienter ce plan c'est d'abord orienter un petit voisinage du point p , c'est-à-dire encore déterminer un mouvement positif le long d'une courbe fermée suffisamment petite autour de chaque point du voisinage. Si l'on peut recoller ces orientations au sens suivant : dans l'intersection de deux voisinages l'orientation coïncide alors on dit que la surface est orientable.

Cette idée se réalise conceptuellement dans les calculs suivants. On fixe une paramétrisation d'un voisinage d'un point p d'une surface S , soit $x(u, v)$. On détermine une orientation du plan tangent $T_p(S)$ c'est-à-dire une orientation d'une base ordonnée $\{x_u, x_v\}$. Si p appartient au

voisinage coordonné d'une autre paramétrisation $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$ la nouvelle base est exprimée en fonction de la première par

$$\bar{\mathbf{x}}_u = \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}$$

$$\bar{\mathbf{x}}_v = \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}$$

$$u(\bar{u}, \bar{v}), \quad v(\bar{u}, \bar{v})$$

la dernière expression indiquant le changement de coordonnées.

iv) avec la courbure gaussienne, la courbure totale (avec la signe qui convient) d'un sous ensemble compact d'une surface orientée M dans E^3 est définie

Courbure totale : $\int_D \mathbf{K} d\sigma$ $d\sigma$ est l'élément de surface de la surface orientée M

Les articles 7, 8, 9, 10 contiennent des formules pour calculer la courbure gaussienne K d'une surface M de E avec l'interprétation extrinsèque de la de la valeur absolue et du signe de la K .

Gauss prouve que

$$\begin{aligned}
(1 + z_x^2 + z_y^2)^2 K &= z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 \\
(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)K &= (\varphi_{yy}\varphi_{zz} - \varphi_{yz}^2)\varphi_x^2 + (\varphi_{xx}\varphi_{zz} - \varphi_{xz}^2)\varphi_y^2 + \\
&(\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2)\varphi_z^2 - 2\left(\begin{array}{cc} \varphi_{yy} & \varphi_{xz} \\ \varphi_{zy} & \varphi_{zz} \end{array}\right)\varphi_x\varphi_y + \left(\begin{array}{cc} \varphi_{yz} & \varphi_{yx} \\ \varphi_{xz} & \varphi_{xx} \end{array}\right)\varphi_y\varphi_z + \\
&\left(\begin{array}{cc} \varphi_{xz} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{yz} & \varphi_{yy} \end{array}\right)\varphi_y\varphi_z)
\end{aligned}$$

Nous parvenons enfin au théorème qui provient d'Euler.

En chaque point A d'une surface M de E^3

$K(A) = k_1 \times k_2$, k_1, k_2 étant les valeurs extrêmes des courbes planes passant par A obtenues comme intersection de M avec les plans contenant le vecteur normal à M en A.

C'est le théorème où nous étions rendus à la fin du texte cité.

Je reprends deux remarques de commentaires.

Après l'installation du calcul vectoriel dans un cadre sphérique Gauss définit l'application de Gauss qui fait de la sphère le repère des surfaces. Il s'agit de ramener les normales à une surface de E^3 définies sur la surface à prendre leur valeur dans la sphère unité. Ceci suppose que nous ayons affaire à des surfaces orientables et orientées. Et on cherche à comprendre comment cette normale (application normale) varie de manière infinitésimale. C'est pourquoi on considère la différentielle de l'application de Gauss; ce qui nous permet d'examiner sa géométrie.

Les différentes caractéristiques de la courbure telles qu'on a commencé à les définir sont une réalisation de cette application sur la sphère unité. Il s'agit de regarder point par point l'application linéaire tangente et son image sur la sphère. La sphère est entièrement intégrée comme norme référant point par point, à l'évaluation de la variation de la normale et c'est elle qui définit donc la courbure. La courbure c'est ce en quoi la normale varie mais comme construite dans la sphère.

Il faut ajouter que la linéarité de l'application tangente de l'application gaussienne est le reflet de la signification générale de l'application tangente; c'est une façon pour le vecteur vitesse de mesurer la variation des normales.

Le théorème d'Euler est un récapitulatif des relations entre courbure gaussienne d'une surface et les courbes comme section planaire en un point. La courbure normale est la projection de la normale d'une courbe section du plan passant par le point considéré et contenant la normale à la surface sur cette normale. Ces courbures normales ont des valeurs extrémales appelées courbures principales; Et le théorème dit que la courbure gaussienne est le produit de ces courbures principales. La signification conceptuelle est là encore importante: Je parcours la surface par des sections de plans normaux et je sais comment varient alors ces sections courbures. Autre façon d'explorer en profondeur la constitution de la courbure. A sa manière la courbure gaussienne concentre ces valeurs des courbures principales. Remarques sur la nature de l'objectivité de la courbure.

L'article 12 contient la formule qui est le résultat central de toute la Dissertation.

Si la surface est donnée comme une sous-variété image d'une immersion on écrit

$E = \langle f_u, f_u \rangle, F = \langle f_u, f_v \rangle, G = \langle f_v, f_v \rangle$, notation de Gauss

alors on a l'équation de Gauss :

$$4(EG - F^2)^2 K = E(E_{vv}G_{vv} - 2F_{uv}G_{vv} + G_{uu}^2) - G(E_{uu}G_{uu} - 2E_{uv}F_{vv} + E_{vv}^2) + F(E_{uv}G_{vv} - E_{vv}G_{uu} - 2E_{vv}F_{vv} + 4F_{uv}F_{vv} - 2F_{uv}G_{uu}) - 2(EG - F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu})$$

D'où le theorema egregium.

Si une surface courbe de E3 peut être isométriquement appliquée sur une autre surface courbe, alors les valeurs de la courbure gaussienne aux points correspondant à chacune par cette isométrie sont les mêmes.

On en tire

Une isométrie entre les surfaces courbes de E3 préserve la courbure totale des sous-ensembles compacts correspondants.

Sur une surface courbe qui peut être développée sur un plan, la mesure de la courbure est partout égale à zéro. Nous obtenons à partir de là l'équation caractéristique pour les surfaces développables sur un plan

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0$$

Cette équation est connue depuis longtemps, mais n'a jamais été prouvée selon l'auteur avec une rigueur suffisante.

Je vais commenter ce théorème et sa démonstration. Je rappelle à la suite de Dombrowski qu'il a été caractérisé par l'invariance de la courbure. Certainement introduite par Weingarten en 1883.

Il s'agit d'une caractérisation par l'invariance de la courbure par isométrie. Gauss avait certainement en tête l'invariance par isométrie et non seulement par flexion: déformation continue de la surface qui préserve la métrique interne du sous-espace i.e. la longueur des courbes sur la surface.

la courbure totale d'une "figure" d'une surface courbe est la même indifférente à la forme que la surface porte dans l'espace.

L'article 13 Gauss esquisse son programme d'une géométrie intrinsèque

« Considérons la surface non pas comme le bord d'un corps mais comme des corps dont une dimension a été supprimée et si en même temps nous considérons celle-ci comme flexible et non extensible, alors nous voyons que deux relations essentiellement différentes doivent être distinguées, d'une part celles qui présuppose une forme définie de la surface dans l'espace, d'autre part celles qui sont indépendantes des formes variées que la surface peut revêtir. C'est de cette dernière que nous discutons ici. Mais on peut voir aisément que la considération de figures construites sur la surface, leurs angles, leurs aires, leurs courbures entières, la jonction de points au moyen de la plus courte distance et autres semblables, relèvent de ce cas. De telles investigations doivent partir du fait que la vraie nature des surfaces courbes est donnée au moyen de l'expression d'un élément linéaire de la forme $\sqrt{E dp^2 + 2F dpdq + G dq^2}$ »

Commentaire provisoire: est-ce que la géométrie intrinsèque perd la forme des surfaces, si ce qui 'entre' c'est la mesure, la métrique à quoi bon?

"De ce point de vue un plan et une surface développable sur un plan par exemple une surface cylindrique, une surface

conique, etc. sont considérées comme essentiellement les mêmes..."

Les articles 13, 14 15 traitent des propriétés de base de certaines familles de géodésiques normales, (géodésiques paramétrés par longueur d'arc), d'une surface M de E^3 . Ce sont les propriétés de l'application de Gauss. En 14 les équations différentielles ordinaires pour les géodésiques d'une surface courbe de E^3 sont établies. Elles sont établies au moyen des conditions extrinsèques déjà découvertes par Euler en 1744. Le vecteur accélération d'une géodésique normale de la surface M considérées comme une courbe de E^3 , c'est-à-dire aux point non critiques de la courbe le vecteur normal) est toujours orthogonal à la surface M .

Aux articles 15 et 16 Gauss prouve le théorème suivant appelé lemme de Gauss.

Géométriquement. Si les courbes u -paramétrées de f sont toutes des géodésiques normales de M qui sont orthogonales à au moins une courbe v -paramétrée, alors les courbes u -paramétrées et v -paramétrées forment un réseau orthogonal de courbes de M .

Analytiquement.

lemme de Gauss

Soit M une surface de E^3 . Soient I et J des intervalles de R contenant 0 et soit $f : I \times J \rightarrow M$ une application différentiable du rectangle $I \times J$ du

(u,v) -plan R^2 dans M tq pour tout $v \in J$:

$f(., v) : I \rightarrow M$ ($u \rightarrow v$) est une géodésique normale

(paramétrée par longueur d'arc) de M et

$$\langle f_u(0,v), f_v(0,v) \rangle = 0$$

alors $\langle f_u(u,v), f_v(u,v) \rangle = 0$ pour tout $(u,v) \in I \times J$

On tire d'abord deux conséquences de ce lemme, on le modernise et on le commente.

Si $f(0,.) : J \rightarrow M$ est constante ou une immersion injective

les extrémités des rayons géodésiques de longueur constante ε issus d'un point fixe A de la surface M de E^3 se trouvent sur une courbe qui est orthogonale à ces rayons (et qui pour de petites valeurs de $\varepsilon > 0$ est précisément l'enveloppe sphérique de rayon ε dans M autour de A)

Les extrémités des perpendiculaires géodésiques de longueur constante ε érigées à partir des points d'une courbe régulière c de la surface M (dans E^3) se trouvent sur une courbe orthogonale à ces perpendiculaires (et qui pour $\varepsilon > 0$ petit est précisément la courbe parallèle à c à une distance ε dans M).

En termes modernes le théorème énoncé et ses corollaires sont des propriétés de l'application exponentielle. Ce que je présente rapidement maintenant.

Avant cette présentation je fais quelques commentaires et rappels. Gauss se propose comme objectif de constituer les bases de la géométrie intrinsèque. Il s'agit de faire dépendre la structure des nouveaux objets géométriques qui sont

introduits de la nature de la surface dans sa "substance même" à la définition de propriétés de laquelle ils contribuent. Le théorème cité plus haut que je vais commenter davantage fait partie de la même entreprise. Il installe des coordonnées curvilignes sur la surface.

En particulier toute la théorie des géodésiques se développe sur cette ligne de travail. Je reprends quatre définitions comme le fait Do Carmo.

Soit α une courbe paramétrée : $I \rightarrow S$. Un champ de vecteur w le long de α est une correspondance qui assigne à chaque $t \in I$ un vecteur $w(t) \in T_{\alpha(t)}(S)$. Le champ de vecteur w est différentiable en t_0 si pour une paramétrisation $x(u,v)$ en $\alpha(t_0)$ les composantes $a(t)$ et $b(t)$ de $w(t) = ax_u + bx_v$ dans la base $\{x_u, x_v\}$ sont des fonctions de t différentiables en t_0

Soit w un champ de vecteur différentiable sur un ouvert U de S et p un point de U .

Soit $y \in T(S)$. Considérons une courbe paramétrée

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$$

avec $\alpha(0) = p$ et $\alpha'(0) = y$ et soit $w(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ la restriction du champ de vecteur w à la courbe α . Le vecteur obtenu par la projection normale de $(dw/dt)(0)$ sur le plan $T_p(S)$ est appelé la dérivée covariante en p du champ de vecteurs w par rapport au vecteur y . $(Dw/dt)(0)$ ou $(D_y w)(p)$

Cette définition suppose que nous ayons pénétré assez loin dans les conceptions qui président à la géométrie intrinsèque. Il s'agit de transférer aux courbes appartenant à la surface les contraintes sur la variation du champ de vecteur. Faire dépendre notre définition de la notion d'accélération de la surface et des courbes qui y sont situées. De ce fait on considère la composante du vecteur "accélération" qui est située dans le plan tangent et donc qui dépend strictement uniquement de la surface. (Elle est covariante). Ce phénomène de constitution de l'objet analysé en faisant dépendre de lui, de sa structure géométrique les propriétés des objets qui étaient destinés à en produire l'analyse, l'entrée dans l'intrinsécité est un phénomène qui est développé de multiples façons. Le statut de la dérivée covariante est essentiel. On a affaire à l'appréhension de la variation du vecteur vitesse, ce qui donne une plus forte constitution à l'accélération intrinsèque et qui va dans le sens d'une pré-constitution physique de la surface.

Il est temps maintenant de passer à la présentation et l'analyse de l'application exponentielle.

Pour ce faire je dois encore introduire le concept de géodésique. Je dois encore introduire une notion préalable celle de parallèle et à cette dernière fin j'ai introduit la notion de dérivée covariante. Qui est la composante tangentielle de l'accélération, « l'accélération comme vue depuis la surface » selon une expression de Do Carmo.

Un champ de vecteurs w suivant une courbe paramétrée $\alpha : I \rightarrow S$ est dite être parallèle si $Dw/dt = 0$ pour tout $t \in I$

Ce qui veut dire qu'il y a parallélisme si la projection de l'accélération est nulle. Dans le plan la notion de champ parallèle suivant une courbe paramétrée se réduit à celle d'un champ constant le long de la courbe : la longueur du vecteur et l'angle qu'il fait avec une direction fixe sont constants.

Cette notion est une notion sans doute essentielle à la théorie des surfaces et des variétés; il faut redéfinir comme une notion spécifique le concept de parallèle, c'est-à-dire reconstruire les conditions qui le rendent possible. Comment produire comme un résultat les conditions qui ne sont donc plus données, du plan.

L'application exponentielle.

Etant donné un point p s'une surface régulière S et un vecteur non nul $v \in T_p(S)$ il existe une unique géodésique paramétrée $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, avec $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$

Et puisque la vitesse d'une géodésique est constante nous pouvons aller sur ses traces en un temps donné en ajustant notre vitesse de manière appropriée.

Si $v \in T_p(S)$ et $v \neq 0$, tq $\gamma(|v|, v/|v|) = \gamma(1, v)$ on pose

$\exp_p(v) = \gamma(1, v)$ et $\exp_p(0) = p$

On applique une longueur égale à $|v|$ le long de la géodésique qui passe par p dans la direction de v . Le point de la surface obtenue de la sorte est noté $\exp_p(v)$

Nous pouvons travailler sur deux sortes de coordonnées : les coordonnées normales et les coordonnées polaires géodésiques.

Nous nous souvenons de ce qu'est conceptuellement une géodésique et quel objectif est visé par son instauration. L'usage de coordonnées géodésiques nous permet de nombreux avantages ; ce sont ceux que nous tirions sans le savoir de l'usage des droites dans le plan.

Les théorèmes que Gauss établit tirés des propriétés géodésiques sont tous des équivalents à des théorèmes élémentaires du plan euclidien: ils sont ici les conséquences de la définition de géodésique. Ce sont elles qui permettent la définition des parallèles et donc des réseaux orthogonaux. Dans cet effet de décomposition des intuitions spontanées dont nous disposions dans le plan, le quadrillage de la surface a pour objectif, par delà l'abstraction du concept de coordonnées hors de sa structuration cartésienne initiale d'en établir la dépendance métrique.

La courbure joue un rôle d'analyseur géométrique, mais on voit que la constitution de ces coordonnées est travaillée

comme effet des géodésiques et peut se voir comme des effets de prolongement.

Dans une terminologie moderne les propriétés établies dans le lemme de Gauss s'écrivent ainsi:

$f(u, v) = \exp_{f(0, v)}^M (u, f_u(0, v))$ et $\|f_u(0, v)\| = 1$, pour tout

$(u, v) \in I \times J$, rectangle de \mathbb{R}^2

Dans l'article 17 et 18 Gauss considère une surface M de E^3 dans la représentation : $f : U \rightarrow E^3$

L'angle orienté entre un vecteur tangent unité \underline{a} sur M au point $f(u, v)$ et le vecteur tangent $f_u(u, v)$ à la u -courbe paramétrée $f(u, v)$ est donnée par l'unique nombre $\theta(\underline{a}) \in]-\pi, \pi[$

$$\cos \theta(\underline{a}) = \frac{\langle f_u, \underline{a} \rangle}{\sqrt{E}}$$

$$\sin \theta(\underline{a}) = \frac{\langle E f_v - F f_u, \underline{a} \rangle}{\sqrt{E} \sqrt{EG - F^2}}$$

Gauss introduit une 1-forme différentielle, la variation angulaire

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{F}{E} dE + E_v du - G_u dv - 2F_u du \right)$$

Gauss prouve que si c est une géodésique normale $c : [0, \sigma] \rightarrow M$

$$(\theta(\dot{c}))' = \Theta(\dot{c}) \int_c \Theta = \theta(\dot{c}(s)) - \theta(\dot{c}(0))$$

L'intégrale mesure l'angle dont le champ de vecteur tangent à la u-courbe paramétrée f_u s'écarte de la direction parallèle de Levi-Civita suivant c .

Gauss introduit à l'article 19 des cartes spéciales particulièrement bien adaptées aux investigations trigonométriques sur les triangles géodésiques de M .

Système de coordonnées pour lequel toutes les courbes u-paramétrées sont des géodésiques normales de M et rencontrent les courbes v-paramétrées orthogonalement.

Remarque sur les coordonnées.

Théorème de Gauss-Bonnet pour les petits triangles géodésiques d'une surface M dans E^3 avec les angles α, β, γ ,

$$\int_{\Delta} \mathbf{K} d\sigma = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

L'excès de la somme des angles d'un triangle formé par les plus petits parcours, sur deux droits est égal à la courbure totale du triangle.

En généralisant l'excès des angles d'un polygone à n côtés dont les côtés sont les plus petits parcours, sur $(n-2)\pi$ est égal à la courbure totale du polygone.

Je rappelle que le théorème de Gauss celui qui est considéré comme le résultat fondamental de la théorie des

surfaces est démontrée dans l'article 11, ainsi que l'équation de Gauss. Il s'ensuit le *theorema egregium*

Theorema

"Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet."

Une isométrie entre deux surfaces courbes de E^3 préserve la courbure totale des sous ensembles compacts correspondants.

Reprenons ce qu'il y a de remarquable dans ce théorème : une propriété qui dépend de la position de la surface dans l'espace ambiant ne dépend en fait que de la métrique. Ce peut être en même temps l'introduction des conditions de possibilité de calcul dans ce qui pouvait apparaître comme dépendant de la position. Qu'est-ce qui a fait que la courbure telle que définie est apparue comme extrinsèque? Alors que la construction avait été déjà organisée comme métrique et intrinsèque? Evidemment en ce que la dépendance de la normale avait été mise en forme et que finalement nous voyons la courbure gaussienne comme un effet sur la normale, son rythme de variation.

La véritable question devient alors celle de la relation qui existe entre la phénoménologie de la description et la structuration mathématique du concept de courbure. C'est une question que je ne développe pas ici. Je remarque rapidement ceci : elle intervient de façon différente dans les deux façons de faire de la géométrie, extrinsèque pour l'intervention de la normale dans l'application de Gauss,

intrinsèque dans la première forme dans l'établissement des propriétés métriques.

C'est dans l'approfondissement de cette question que l'on peut comprendre l'évolution du concept de courbure.

Enonçons le théorème suivant.

Theorema egregium. Invariance de la courbure gaussienne par isométrie.

Si une surface courbe (dans E^3) est appliquée sur une autre surface quelconque, la mesure de la courbure (les valeurs de la courbure gaussienne) en chaque point reste invariante.

De là Gauss déduit le théorème suivant:

Une isométrie entre deux surfaces courbes dans E^3 conserve la courbure totale des sous-ensembles compacts correspondants

Sur une surface courbe qui peut être développée sur un plan la mesure de la courbure est partout égale à zéro.

Nous obtenons immédiatement à partir de là l'équation caractéristique des surfaces développables sur un plan, à savoir

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0$$

où z est une fonction de x et de y . Cette équation est connue depuis un certain temps, mais de l'avis de l'auteur n'a pas jusqu'ici été prouvée avec une rigueur suffisante.

Remarquons que la définition de la courbure en terme de quotient nous met sur la voie de sa caractéristique intrinsèque. C'est un rapport en un point des deux aires qui sont comme aires des éléments métriques. Et de fait je mesure le taux d'étalement de la l'aire initiale sur la sphère.

Je l'ai en tout état de cause rapporté une aire sur la forme sphérique. C'est en quelque sorte combien elle mesure quand on la replace sur une sphère. La courbure en ce sens nous dit quelle transformation métrique nous devons faire subir à une aire quand elle est vue comme étalée sur la sphère et ce ponctuellement.

De ce point de vue nous pourrions dire que la courbure est essentiellement métrique, que c'est le contraire qui serait étonnant.

Considérons la démonstration de ce fameux théorème dans sa forme modernisée mais à peine.

Il faut remarquer que cette démonstration a atteint la rigueur recherchée par Gauss, mais elle est étonnamment synthétique malgré le très grand nombre d'éléments qu'elle comporte.

Une stratégie du calcul. Est développée dans le chapitre suivant.