PANORAMA DE PROBLÈMES D'UNE APPROCHE CONTEMPORAINE DIALECTIQUE DES THÉORIES DE GALOIS

Contents

1. Introduction.

L'opposition entre philosophie analytique et philosophie continentale des sciences a connu depuis quelques décénies un affaiblissement certain, sans pour autant disparaître complètement. La question de la dialectique fut dès l'origine un point de partage décisif, en particulier dans sa version hégélienne[1]. L'idée d'une approche dialectique des mathématiques est donc restée pendant longtemps très problématique - au moins dans le monde anglo-saxon - d'autant plus que Hegel lui-même avait tiré les premiers coups de feu, en exprimant l'infériorité définitive des mathématiques par rapport à la philosophie - spéculative - pour exprimer la vérité.

Comment penser en effet convenablement la science qui fait du principe de non-contradiction l'un de ses fondements essentiels à partir d'une méthode qui se définit pratiquement comme la subversion de ce principe ? Comment envisager un procès dialectique évolutif, une historicité - voire une subjectivité - des théories mathématiques, alors que leurs vérités produites sont toujours directement objectives, éternelles et immuables. Comme le rappellait récemment Salanskis, en se référant à la fameuse thèse popperienne, il n'y a pas dans les mathématiques d'événement de type *réfutation*[2].

Pourtant en France, dans les années 1930 et 1940, Lautman et Cavaillès ont proposé des philosophies des mathématiques qu'on peut qualifier de dialectiques - même si leurs rapports à Hegel ne vont pas sans poser de questions -, s'inscrivant ainsi en rupture avec les perspectives anglo-saxonnes. Parallèlement, depuis la seconde moitié du XXème siècle, des philosophes analytiques ont peu à peu investi des domaines auparavant non traités par leur courant, voire même rejetés, notamment la métaphysique, au point de remettre en cause l'exclusion originelle de toute pensée dialectique - ou au moins sur la dialectique. Ainsi comme l'explique Paul Redding dans [15], un certain nombre de tentatives de rapprochements entre la tradition analytique et la pensée hégélienne ont vu le jour.

Nous proposons alors d'examiner la possibilité de réarticuler aujourd'hui une approche philosophique dialectique aux mathématiques. "Aujourd'hui" signifie en tenant compte des événements philosophico-mathématiques contemporains qui importent pour notre problème, à savoir par exemple pour nous, l'exigence de pouvoir formaliser des aspects du discours philosophique, notamment en ayant recours à la théorie des catégories. Pour incarner notre hypothèse de travail, nous concentrerons notre attention sur un domaine particulier des mathématiques, les théories de Galois de 1830 à nos jours. Ce choix est notamment motivé par le fait que ces théories traitent mathématiquement d'un problème central et peut-être constitutif de toute orientation dialectique, celui de la détermination de l'*indéterminé*[3]; mais aussi par sa durée suffisamment longue pour envisager un développement dialectique. Nous examinerons donc l'évolution des théories de Galois jusqu'à leurs formulations catégoriques contemporaines et discuterons des orientations philosophiques actuelles, qui pourraient être pertinentes pour elles, au regard d'une perspective dialectique.

Nous aborderons la problématique d'une approche dialectique des théories de Galois selon trois axes de questions, directement corrélatifs à l'idée de dialectique : 1) l'axe de l'histoire, 2) l'axe épistémologique et 3) l'axe ontologique.

2. Procès dialectiques des théories de Galois.

Nous faisons l'hypothèse que l'évolution des théories de Galois en presque deux siècles, peut se comprendre selon une histoire conceptuelle qui n'est pas sans rapport avec la dialectique hégélienne, en utilisant les opérateurs de Cavaillès de *paradigme* et *thématisation*[4]. Pour ce faire nous proposons de diviser cette histoire en trois séquences : les théories heuristiques de Galois, puis les théories structurales

[1]Russell d'abord hégélien, a ensuite exprimé sa "rébellion" (voir [16], chap. 5, cité dans [13]) contre le néo-hégélianisme britannique de Bradley de la fin du XIXème siècle. Le positivisme logique de Ayer et du Cercle de Vienne prirent aussi la philosophie hégélienne pour cible.

[2]Salanskis, J.-M. : Philosophie des mathématiques, Vrin, Paris, 2008, p. 139.

[3]Chez Platon, c'est le problème symmétrique de celui de la participation - voir à ce sujet, la discussion dans [3].

[4]Ils sont proposés - pour d'autres objets dans [6], deuxième partie

et enfin les théories catégoriques. Les théories heuristiques comprennent les travaux originaires de Galois au début des années 1830, et les résultats de Riemann sur l'uniformisation des fonctions multiformes aux alentours de 1850. Nous expliquerons ce que ces travaux-ci ont de "galoisiens", alors qu'ils ne sont habituellement pas nommés ainsi et en quoi ils s'articulent aux premiers. Ont justifiera alors le terme d'heuristique à leur égard.

Nous nommons théories structurales de Galois, la théorie de Galois algébrique pour les corps, reformulée par Artin en 1938 et la théorie de Galois des revêtements topologiques peu à peu mise en œuvre dans la première moitié du XXème siècle à partir des travaux de Riemann et Poincaré. Le terme structurale vient du fait qu'elles sont formulées dans le langage et l'esprit des structures mathématiques (algébrique, topologique et d'ordre), au sens de Bourbaki[5]. On passe des théories heuristiques aux théories structurales en généralisant les hypothèses sur les structures, par l'opérateur dialectique de paradigme, introduit par Cavaillès. Enfin, dans la seconde moitié du XXème siècle, Grothendieck formule une théorie catégorique de Galois qui englobe les théories structurales dans le premier Séminaire de géométrie algébrique SGA 1 en 1959-1960. Trente ans plus tard, Janelidze propose une théorie de Galois catégorique encore plus générale. Le paradigme est ici encore à l'œuvre, mais en tant que Grothendieck et Janelidze utilisent la théorie des catégories, on montrera en suivant [13], qu'un processus de thématisation joue aussi un rôle.

On examinera alors rapidement la dialecticité des opérateurs de Cavaillès par rapport à la dynamique interne du négatif de Hegel.

3. La question de l'unité des théories de Galois.

Après avoir analysé différentes théories de Galois - sans être exhaustif - en proposant un commentaire rationnel de leurs enchaînements successifs et donc en présupposant leurs différences relatives, on rencontre naturellement la question de l'unité. En quoi les différentes théories mathématiques évoquées sont elles toutes des "théories de Galois" ? Au-delà de la dénomination commune, en quoi peut-on dire que les différentes étapes citées ne sont que les moments d'une même histoire ? Pour répondre à cette question, nous nous référerons à la théorie des idées problématiques dialectiques de Lautman. Celui-ci a en effet proposée une analyse conceptuelle des premières théories de Galois de notre liste - les théories heuristiques et la version de Artin - qu'il a intitulée "montée vers l'absolu" - [9] p. 165-178. Selon Lautman, les différentes théories mathématiques de Galois viendraient toutes tenter de formuler et résoudre un problème de nature philosophique, et plus précisément épistémologique - au sens de la théorie générale de la connaissance. Ce problème serait celui de lever une indétermination - Galois a employé le terme d'ambiguïté - relative à une situation de connaissance imparfaite. La montée vers l'absolu consiste donc à passer d'un niveau de connaissance imparfait - en cela qu'il n'arrive pas à distinguer des objets par certaines propriétés, comme par exemple les nombres complexes i et $-i$ au moyen de polynômes à coefficients réels - à un niveau de connaissance parfait - celui des polynômes à coefficients complexes dans notre exemple. L'unité des théories de Galois, soit en définitive leur essence, serait alors à chercher du côté de leur fonction épistémologique, celle de classifier les degrés d'indétermination - d'ambiguïté ou d'indiscernabilité - d'une situation. Nous discuterons ces différents termes en prenant appui sur les théories galoisiennes abordées ici.

Pour exposer sa théorie des idées problématiques dialectiques, Lautman ne s'est pas référé explicitement à la dialectique de Hegel, mais à celle de Platon qui est aussi souvent articulée à des couples de contraires - en particulier dans le *Parménide*. Plus spécialement, pour son chapître sur la montée vers l'absolu galoisienne, c'est le couple cartésien parfait/imparfait qu'il mobilise. On examinera alors en quoi cette approche est hégélienne et en quoi elle ne l'est pas, en se référant au travail de Barot dans [3]. Nous comparerons alors la théorie de Lautman à différentes options philosophiques voisines

[5]Bourbaki, N.: L'Architecture des mathématiques, in Le Lionnais F.: Les grands courants de la pensée mathématique, Hermann, Paris 1948, rééd. 1997. p. 40-41.

récentes, en prenant toujours pour exemple de référence les théories de Galois. Nous la confronterons ainsi à l'*herméneutique formelle* de Salanskis[6] - pour qui l'histoire des théories mathématiques serait celle des réponses successives à une *énigme* précomprise, qui appelle une compréhension -, à la théorie de l'*explication* mathématique telle qu'elle est proposée et discutée par des auteurs se réclamant du mouvement de la philosophie de la pratique mathématique[7] et finalement à la perspective de Lawvere qui voit dans la théorie des catégories une manière d'unifier la dynamique dialectique de la philosophie et celle des mathématiques, dans une référence répétée à la Logique de Hegel[8].

Si toutes ces approches convergent - avec les perspectives dialectiques - sur le fait de décrire la pratique mathématique dans la perspective d'un progrès épistémique, voire épistémologique, elles divergent pour ce qui est de l'ontologie.

4. Le problème ontologique d'une approche dialectique des théories de Galois.

Il est frappant de constater que les approches dialectiques dans l'histoire de la philosophie - Platon, Hegel et dans la perspective de Lautman, Descartes - sont souvent articulées à des thèses ontologiques fortes. À l'inverse, on sait que la question de l'existence des entités mathématiques restent toujours ouverte et source de débats au sein de la communauté épistémologique. C'est la question justement du platonisme. Qu'est-ce que les théories de Galois apportent à cette problématique ? Dans la formulation ensembliste des théories structurales de Galois, au moins dans leur version algébrique - et plus généralement dans une version modèle-théorique proposée par Poizat [14] -, quel est le statut existentiel des indéterminées X_i - que l'on rajoute aux corps K pour obtenir les anneaux de polynômes $K[X_i]$ - et des "éléments imaginaires" au sens de [14] ?

Ensuite quelle modification - au niveau ontologique - apporte le passage de la formulation ensembliste à la formulation catégorique ? À ce titre, on analysera deux conceptions qui s'opposent. D'un côté on peut voir - comme Colin MacLarty - dans la théorie des catégories la bonne manière d'exprimer le structuralisme[9], avec pour conséquence la résolution, voire la destitution des questions ontologiques - voir [12] p. 354-406. Les notions fondamentales de l'ontologie ensembliste que sont la fonction et l'identité, sont ainsi remplacées par celles de flèches - ou dans un sens faible, de morphismes - et d'isomorphisme. D'un autre côté, on peut reconnaître - comme Zalamea et Lawvere - dans la théorie des catégories un moyen de formaliser certains aspects des positionnements ontologiques fort. C'est ainsi que Zalamea propose des pistes pour mettre en forme mathématique au moyen des catégories des éléments de la philosophie de Lautman - [19] - et développe lui-même une *ontologie transitoire* pour élaborer sa *philosophie synthétique des mathématiques contemporaines* - [20].

À partir de ces deux conceptions opposées, on réinterrogera donc les liens entre une approche dialectique et les divers options ontologiques. Autrement dit, on traitera dans cette dernière partie, la question : une approche dialectique des théories de Galois peut-elle être ontologiquement neutre ?

5. Enjeu.

Au-delà de l'examen philosophique des théories de Galois selon les dimensions historique, épistémologique et ontologique, l'enjeu de ce travail est donc d'évaluer la pertinence d'une approche dialectique des théories de Galois au regard de la configuration philosophico-mathématique actuelle.

---

[6] Voir [17] et [18]

[7] Voir par exemple les contributions de Paolo Mancosu et Johannes Hafner dans [12] p. 134-178 et notamment leur discussion de la thèse de Kitcher de l'explication comme unification - [8].

[8] Voir par exemple [10], [11] et leur discussion dans [13]

[9] Pour discuter cette thèse, on se référera également aux travaux de Steeve Awodey - par exemple [1] et [2].

References

1. Awodey, S.: An answer to G. Hellman's question "Does category theory provide a framework for mathematical structuralism ?", Philosophia Mathematica (3), vol. 12 (2004), pp. 54–64.
2. Awodey, S.: Structuralism, Invariance, and Univalence, , Philosophia Mathematica (1), vol. 22 (2013), pp. 54–64.
3. Barot, E.: La dualité de Lautman contre la négativité de Hegel, et le paradoxe de leurs formalisations. Contribution à une enquête sur les formalisations de la dialectique, dans Philosophiques, Volume 37, numéro 1, printemps 2010, p. 111-148, Albert Lautman, philosophe des mathématiques, sous la direction de Jean-Pierre Marquis, Éditeur : Société de philosophie du Québec.
4. Borceux, F. & Janelidze, G., Galois theories, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
5. Bourbaki, N.: L'Architecture des mathématiques, in Le Lionnais F.: Les grands courants de la pensée mathématique, Hermann, Paris 1948, rééd. 1997.
6. Cavaillès, J.: Sur la logique et la théorie de la science [1947], Bibliothèque des textes philosophiques, Vrin, Paris, 2008.
7. Grothendieck, A.: Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1960-61. Revêtements étales et groupe fondamental, SGA1. Lecture Notes in Math. 224, Springer-Verlag, Berlin, New-York (1971).
8. Kitcher, P.: Explanatory unification and the causal structure of the world, in P. Kitcher and W. Salmon (eds.), Scientific Explanation, vol. XIII of Minnesota Studies in the Philosophy of Science (Minneapolis: University of Minnesota Press), 410–505, 1989.
9. Lautman, A., Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques [1938], dans Les mathématiques, les idées et le réel physique, Paris, Vrin, 2006, p. 125-234.
10. Lawvere, F. W.: Categories of space and of quantity, dans The Space of Mathematics : Philosophical, Epistemological and Historical Explorations, Berlin : DeGruyter, 14-30, International Symposium on Structures in Mathematical Theories (1990), San Sebastian, Spain (1992).
11. Lawvere, F. W.: Grassmann's dialectics and category theory, dans Proceedings of the 1994 Conference to commemorate 150 years of Grassmann's "Ausdehnungslehre", Hermann Guenther Grassmann (1809-1877) : Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar, Boston Studies in the Philosophy of Science, dit par Schubring, Gert, Dordrecht-Boston-London : Kluwer Academic Publishers, t. 187, 255- 264 (1996).
12. Mancosu, P.: The Philosophy of Mathematical Practice, Edited by Paolo Mancosu, Oxford University Press, 2008
13. Mélès, B.: Pratique mat'ématique et lecture de Hegel, de Jean Cavaillès à William Lawvere, Philosophia Scienciæ, 16-1, 2012, p. 153-182.
14. Poizat, B.: Une Théorie de Galois Imaginaire, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 48, No. 4 (Dec., 1983), pp. 1151-1170.
15. Redding, P.: Analytic Philosophy and the Return of Hegelian Thought, cambridge University Press, 2007.
16. Russell, B.: Histoire de mes idées philosophiques. Tel. Gallimard, Paris, 1961.
17. Salanskis, J.-M. : L'herméneutique formelle, L'Infini, le Contenu, l'Espace [1991]. Réédition Klincksieck, Paris, 2013.
18. Salanskis, J.-M. : Philosophie des mathématiques, Vrin, Paris, 2008
19. Zalamea, F.: Albert Lautman et la dialectique créatrice des mathématiques modernes, dans Les mathématiques, les idées et le réel physique, Paris, Vrin, 2006, p. 17-33.
20. Zalamea, F.: Synthetic philosophy of Contemporary Mathematics, trad. Z. L. Frazer, Eds. Urbanomic, Windsor Quarry and Sequence Press, New-York, 2012.