PASSER AU GLOBAL : LE CAS D'ÉLIE CARTAN, 1922-1930.

Renaud Chorlay

RÉSUMÉ. – Après avoir enrichi la notion de connexion entre 1922 et 1925, Élie Cartan jette entre 1925 et 1930 les bases de l'étude topologique et géométrique globale des groupes de Lie et variétés homogènes. Nous voulons montrer que ce passage aux questions globales s'accompagne d'une réorganisation complète, aux niveaux théorique, thématique et rhétorique, autour d'une polarité local – global jusque là absente des travaux de Cartan ; elle remplace, selon nous, une polarité infinitésimal – fini héritée du 19[e] siècle. Nous procédons par une lecture chronologique attentive aux modes d'écritures, en comparant systématiquement avec des auteurs tels Hermann Weyl ou Otto Schreier. Nous montrons en particulier combien, derrière l'apparente stabilité des termes, « voisinage », « variété » ou « groupe » prennent à partir de 1925 des sens radicalement différents.

ABSTRACT. – After his work on connections and generalised spaces between 1922 and 1925, Élie Cartan began laying the foundation of the topological and geometric study of Lie groups and homogeneous spaces (1925-1930). We will endeavour to establish that the emergence of global questions is but part and parcel of a thorough restructuring around the epistemological polarity between local and global, a restructuring that occurs at three levels : a theoretical level, a thematic level and a rhetorical level. This new central polarity replaced a 19[th] century polarity between the infinitesimal and the finite. Our chronological exposition of Cartan's work in the period between 1922 and 1930 will pay special attention to modes of writing, comparing with the works of Hermann Weyl and Otto Schreier. We shall see, in particular, that in spite of the stability of terms such as "neighbourhood", "manifold" or "group", the meaning of these words underwent a dramatic change after 1925.

Mots-clés : Cartan (Élie), Weyl, Einstein, local, global, connexion, groupe de Lie, variété.
Classification AMS : 01A22, 01A53, 01A58, 01A83.

Pour un mathématicien formé après 1950, dans un cadre où les notions de variété, variété fibrée, groupe et algèbre de Lie possèdent des assises solides ; dans un cadre où la classification des outils, des problèmes et des énoncés selon une polarité *local - global* jouit d'une transparente familiarité, la lecture du travail d'Élie Cartan dans les années 1920 est, sans doute, la source d'un émerveillement légitime. Entre 1922 et 1925, ce dernier contribue au renouvellement de la géométrie différentielle locale, dans le sillage des travaux de Levi-Civita, Weyl et Schouten sur le cadre géométrique de la théorie de la relativité générale. À partir de 1925, il aborde les problèmes globaux relatifs à la topologie et la géométrie des groupes de Lie, des espaces homogènes, des espaces symétriques. Il offre une première synthèse de cette moisson de résultats globaux dans sa monographie de 1930 sur *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs* [Cartan 1930].

Nous souhaitons montrer que cette lecture d'un passé pourtant proche est anachronique sur un point fondamental, et masque par là même une question historique d'importance : cette lecture repose sur une organisation systématique des connaissances mathématiques selon un couple local – global qui n'est pas celle des travaux d'Élie Cartan jusqu'en 1925 ; une organisation systématique qu'Élie Cartan, par son travail de recherche et de pédagogie, *contribue à faire émerger* dans la période 1925-1930. L'organisation d'une partie de l'univers mathématique – à exposer ou à conquérir – autour du couple local – global ne consiste pas en la juxtaposition d'un grand nombre d'éléments dont la quantité et les points communs « manifestes » susciteraient « naturellement » une grille de lecture en terme de local et de global. Les éléments ne suscitent pas spontanément le cadre ni n'en relèvent par nature. Les textes porteurs d'une nouvelle grille n'enregistrent pas passivement : ils organisent activement – par la sélection des éléments, leur ordre, le type de démonstration choisi, le mode d'emploi des outils les plus techniques, les grands problèmes désignés – un univers mathématique dont l'étude historique montre qu'il n'a pas toujours été organisé ainsi. La mise en contexte de travaux montre combien *d'autres grilles de lecture* que la grille local/global ont pu être utilisées, non moins légitimement et par des mathématiciens non moins soucieux de questions d'architecture des mathématiques.

Notre objet premier n'est donc pas l'histoire des théories géométriques globales mais l'émergence de la polarité local – global dans les théories géométriques. Le cas d'Élie Cartan présente, pour cette enquête, un intérêt qui ne dérive pas de la seule valeur mathématique de ses travaux ; on le saisit mieux en esquissant la comparaison avec le travail de Hermann Weyl sur la même période. Cette comparaison s'impose : Cartan situe systématiquement ses travaux sur les espaces généralisés par rapport à ceux de Weyl sur les connexions affines, la symétrie de jauge et l'idée de géométrie purement infinitésimale ; à partir de 1925, les travaux de Cartan sur la topologie des groupes de Lie simples et semi-simples trouvent leur première impulsion dans les articles de Weyl sur la représentation linéaire des algèbres semi-simples complexes. Mais, au-delà de l'entrelacement des travaux, nos deux auteurs diffèrent par leur position historique relative à l'émergence du couple local – global. Dans son *Idée de surface de Riemann* [Weyl 1913], Weyl met en place les structures d'espace topologique et de variété analytique d'une manière que les successeurs reconnaîtront comme parfaitement rigoureuse ; le texte est de bout en bout et explicitement articulé autour du couple local – global (ou plutôt *im Kleinen / im Grossen*) ; les techniques de définition intrinsèque par modèle local, de recollement des morceaux ou d'utilisation de revêtements sont mises en place avec la plus grande clarté. Autrement dit, dans les années 1920, Weyl travaille dans un univers mathématique qui est déjà structuré, techniquement et conceptuellement, par une polarité local – global.

Il en va tout autrement de celui d'Élie Cartan, nous nous attacherons à l'établir dans la premier partie de cet article. Nous montrerons entre autres que Cartan prolonge dans des directions inédites des théories mathématiques largement structurée, techniquement comme conceptuellement, par la polarité infinitésimal – fini. Nous souhaitons montrer que l'enrichissement – apparemment progressif – du questionnaire s'accompagne, à partir de 1925, d'une réorganisation d'ensemble de l'architecture des mathématiques chez Élie Cartan : de nouvelles questions apparaissent, les sens de certains termes tels « variété » ou « groupe » se modifie profondément, le rôle de certaines techniques est repensé ; au plus près du texte, on note que certaines formulations font leur apparition à mesure que d'autres, *implicitement* locales, se voient peu à peu reléguées du côté des abus de langages et des incorrections. Nous montrerons enfin que, sur la période 1925-1930, l'évolution des horizons problématiques ne suit pas exactement la même chronologie que celle des canons d'écritures.

Sur la forme, nous procéderons donc à une présentation chronologique, en cherchant à caractériser les *moments* successifs de cette réorganisation d'ensemble : l'approfondissement de la géométrie infinitésimale (1922-1925), le tournant de 1925 , l'apprivoisement des questions globales et la refonte didactique (1926-1930). On conçoit qu'on ne pourra esquiver une part de technicité mathématique, du moins sur certains points nécessaires à notre démonstration. L'attention à l'évolution des canons d'écriture imposera aussi le recours régulier au texte original, pour repérer l'évolution du lexique ou l'apparition de structures syntaxiques telles, par exemple, « être localement [*propriété*] ». Un dernier point doit être signalé : autant cet article est conçu pour qu'un lecteur ne sachant rien du travail d'Élie Cartan puisse le lire, autant la comparaison régulière et nécessaire avec les travaux de Hermann Weyl nécessite une certaine familiarité avec l'œuvre de ce dernier. Nous présenterons assez en détail son travail de 1925 sur la représentation linéaire des algèbres de Lie semi-simples complexes ; pour le reste, nous invitons le lecteur à se reporter aux travaux de référence de Ehrard Scholz [Scholz 2001b] et Thomas Hawkins [Hawkins 2000].

1. L'APPROFONDISSEMENT DE LA GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE, 1922-2925

Entre 1922 et 1925, les réflexions d'Élie Cartan sur la relativité générale et les travaux de Hermann Weyl l'amènent à proposer une généralisation de la notion de connexion affine.

Nous présentons les principaux éléments de la théorie des espaces généralisés telle qu'il la met en place entre 1922 et 1925, en nous appuyant principalement sur les textes suivants : cinq notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (entre février et avril 1922 [Cartan 1922 b-f][1]), la série d'articles *Sur les variétés à connexion affine et la relativité généralisée* [Cartan 1923, 1924b, 1925e], la conférence *La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielle* [Cartan 1925b] et le cours sur *La géométrie des espaces de Riemann* [Cartan 1925a]. L'objectif n'est pas ici de présenter le détail de la genèse de ces travaux ni leur chronologie fine : il suffira de noter l'apparition, sur la fin de la période, de la notion de groupe d'holonomie et du thème de la synthèse des points de vue de Klein et de Riemann sur la géométrie. Ce sont bien plus les éléments stables du cadre théorique que nous voulons souligner, un cadre théorique construit autour du couple infinitésimal – fini implicitement local et présenté de manière implicitement locale. Nous montrerons que ce cadre et ce mode d'écriture ne découle ni du choix des outils – les mêmes seront utilisés dans les études globales après 1925 – ni d'une ignorance des questions globales ou du rôle de la topologie ; pour assurer ce dernier point, nous élargirons le champs des textes étudiés en convoquant l'article de 1915 [Cartan 1915] sur les groupes en géométrie ainsi que le cours sur les invariants intégraux de 1922 [Cartan 1922a].

1.1 Une pédagogie de l' « exclusivement local »

Les termes dans lesquels Cartan présente la nouvelle conception de la physique, plus précisément de la Mécanique, et la nécessaire évolution du cadre géométrique accompagnant cette nouvelle Mécanique sont proches de ceux de Weyl ou d'Einstein. Ainsi dans la première note aux C.R.A.S. lit-on en introduction :

> On sait que dans la théorie de la relativité généralisée, le tenseur qui caractérise complètement l'état de la matière au voisinage d'un point d'Univers est identifié à un tenseur faisant intervenir uniquement les propriétés *géométriques* de l'univers au voisinage de ce point. [Cartan 1922b 613]

La nature locale des dépendances n'est que la conséquence d'une formulation infinitésimale des problèmes et des structures, le « voisinage » étant vite remplacé par un « voisinage immédiat » au sens clairement infinitésimal :

> Imaginons un espace qui, au voisinage immédiat de chaque point, ait tous les caractères de l'espace euclidien. Les habitants de cet espace sauront, par exemple,

[1] Sauf mention du contraire, la pagination est celle des *Œuvres Complètes*.

> repérer les points infiniment voisins d'un point A au moyen d'un trièdre trirectangle ayant ce point A pour origine ; mais nous supposerons en outre qu'ils ont une loi leur permettant de repérer par rapport au trièdre d'origine A, tout trièdre de référence ayant son origine A' voisine de A. (…) En définitive, *un tel espace sera défini par la loi de repérage mutuel* (de nature euclidienne) *de deux trièdres d'origines infiniment voisines*. [Cartan 1922c 616]

Le problème même des connexions, ainsi présenté par un Cartan très proche ici de Weyl, est celui du lien entre morceaux d'espace infiniment petits et non assez petits. Le vocabulaire est un peu moins strict que chez Weyl, qui n'employait jamais *Umgebung* ou *im Kleinen* pour désigner le niveau infinitésimal : chez Cartan, « voisinage » et « voisinage immédiat » s'échangent sans autre forme de procès, et le terme « infiniment » peut disparaître dans le cas de l'origine « A' voisine de A », là où Weyl ne l'aurait pas omis. Que le problème se présente au niveau des morceaux infiniment petits d'espace, Cartan le fait sentir dans son article sur les *Variétés à connexion affine et la relativité généralisée* en des termes non ambigus. Après avoir présenté la théorie classique de la gravitation, il introduit le « point de vue de la relativité généralisée » :

> Il suffit (…) pour que l'on puisse formuler les lois de la physique, que les deux conditions suivantes soient réalisées :
>
> 1° On dispose, pour mesurer les grandeurs d'état physiques, d'un système de référence susceptible, pour le petit morceau d'espace-temps où se trouve l'observateur, de jouer le rôle d'un vrai système de Galilée ;
>
> 2° On connaît la connexion affine de l'espace-temps, c'est-à-dire on sait comment doivent être comparés les observations faites par rapport à deux systèmes de référence de Galilée d'origine infiniment voisines. [Cartan 1923 692]

Comme chez Weyl, ce changement de vue sur la géométrie invitant à la mise en place d'une nouvelle structure, la connexion, est préparé par une relecture de la physique classique : équations de Maxwell pour Weyl (mises en contraste avec l'action à distance chez Coulomb) ; pour Cartan, caractérisation du champ gravitationnel **E** par rot **E** = 0 et « l'équation fondamentale de Poisson $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=-4\pi\rho$ » [Cartan 1923 669][2].

[2] « (…) il importe de remarquer que le point de vue nouveau auquel nous nous sommes placé nous oblige à énoncer les lois de la Mécanique sous une forme *exclusivement locale*, c'est-à-dire à tout ramener à la Mécanique des milieux continus ; nous ne savons pas, en effet, ce que sont deux systèmes de référence équipollents, lorsque leurs origines ne sont pas infiniment voisines. » [Cartan 1922c 671]

Par delà la proximité thématique et les nuances de formulations – importantes pour notre propos – dans l'introduction par Weyl et Cartan aux problèmes géométriques suggérés par la théorie de la relativité générale, on doit relever un commun changement de regard sur les objets de la géométrie différentielle. Pour motiver l'introduction de la notion de connexion infinitésimale, Cartan, après Weyl, insiste sur l'association à *chaque* point d'une variété d'un espace *propre* et ayant une géométrie connue, celle d'un simple « espace affine centré » (espace vectoriel) ou d'un espace vectoriel muni d'une forme quadratique non-dégénérée etc. Le problème est moins celui de la nature de ces espaces élémentaires attachés à chaque point – Cartan et Weyl divergeront d'ailleurs de manière importante sur ce point – que celui de les liens qui peuvent s'établir entre les espaces attachés à des points différents. Ce nouveau point de vue, cherchant à articuler à un premier espace (une « variété ») une collection d'espaces (tous du même type) associé au premier, s'écarte des conceptions plus usuelles en géométrie différentielle intrinsèque, dans lesquelles l'espace que constitue la « variété » est le seul envisagé. Dans cette conception plus traditionnelle, la géométrie est *différentielle* parce que les changements de coordonnées admissibles y sont différentiables et parce que ce sont des invariants différentiels qui sont recherchés. Les outils sont ceux du calculs différentiels, mais ne nécessitent pas qu'on approche les questions en faisant alterner les points de vue infinitésimaux et finis. Dans la conception nouvelle, que Levi-Civita, Weyl, Cartan, Schouten font émerger, les espaces associés à chaque point sont saisis comme des voisinages infinitésimaux. Nous avons cherché, dans notre thèse [Chorlay 2007], à décrire ce changement de point de vue par le néologisme d'« infinitésimalisation », pour pouvoir le comparer avec, en particulier, les démarches de localisation. Nous ne pouvons ici qu'être allusifs sur ce point.

1.2 Des choix techniques différents de ceux de Weyl

Si le mouvement de la pensée conduisant de la reformulation des lois de la Mécanique par la relativité générale à la nécessaire mise en place d'une nouvelle structure géométrique connectant les structures infinitésimales classiques valides en chaque point est décrit dans des termes très proches chez Weyl et Cartan – avec toutefois une attention stricte aux termes séparant les niveaux infinitésimaux et locaux chez Weyl qu'on ne retrouve pas chez Cartan –, les outils techniques utilisés pour décrire les connexions ne sont pas les mêmes chez nos deux auteurs. Présentons dans ce paragraphe une première série de conséquences avant, dans le paragraphe suivant, de voir en quoi ces outils permettent à Cartan de multiplier les structures d'espace en jouant sur la multiplicité des algèbres de Lie.

On est frappé, en lisant en parallèle *RZM*[3] et *Les variétés à connexion affine*, par l'absence chez Cartan d'outils qui semblaient essentiels chez Einstein et Weyl. Certes Weyl introduisait des éléments de calcul sur les formes différentielles sur les variétés abstraites et signalait son indépendance envers une éventuelle structure métrique. Ces éléments ne jouaient toutefois ni un rôle central ni un rôle bien spécifiquement caractérisé dans l'architecture de la théorie. Les notions de tenseur et le calcul différentiel absolu tenaient, elles, le premier rôle. De son côté, Cartan annonce dès son introduction :

> La lecture du Mémoire ne suppose pas la connaissance du calcul différentiel absolu : en revanche, elle suppose connues les règles fondamentales du calcul des intégrales multiples, en particulier celles qui font passer d'une intégrale étendue à un domaine fermé à l'intégrale étendue au domaine à une dimension de plus limité par le premier. Au fond, les lois de la Dynamique des milieux continus et celles de l'Electromagnétisme s'expriment par des équations analogues à la formule de Stokes où à cette formule généralisée. [Cartan 1923 663]

Cartan rompt ici non seulement avec Weyl mais aussi avec l'esprit original des formulations einsteiniennes, qui trouvaient leur source directe dans les travaux de Levi-Civita et Ricci-Curbastro. Bien plus que le calcul différentiel absolu, ce sont les théories des groupes selon Lie, des surfaces selon Darboux et des invariants intégraux selon Poincaré[4] qui forment l'arrière plan de ce travail de Cartan.

Si passionnante que soit la présentation de Weyl, quelle que soit l'unité que lui donne la poursuite systématique de l'objectif d'infinitésimalisation, sa présentation est en partie rendue complexe par le mode même d'exposition consistant à formuler avec soin les différentes étapes de la théorie, à peser sur les plans mathématiques et épistémologiques leur degré de nécessité et l'intimité de leurs liaisons les unes aux autres ; d'où une profusion de formulations et d'outils, dont la validité est parfois provisoire ; d'où aussi une certaine difficulté à discerner chez ce mathématicien-philosophe, dans ces étapes et ces allers-retours, ce qui relève de la nécessité mathématique stricte de ce qui relève de l'analyse

[3] Nous utilisons cette abréviation, entrée dans l'usage, pour désigner l'ouvrage *Raum, Zeit, Materie* de Hermann Weyl [Weyl 1919] et [Weyl 1922b].
[4] Par exemple dans *Sur les résidus des intégrales doubles* [Poincaré 1887] ou dans le tome III des *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste* [Poincaré 1899]. Ces travaux forment le point de départ des *Leçons sur les*

épistémologique. Cette richesse est d'ailleurs visible dans l'évolution des concepts et des formulations sur la période 1918-1923. En comparaison, le style de Cartan surprend par son caractère direct et l'unité de ses moyens : le calcul sur les formes différentielles – le produit extérieur, la dérivation extérieure et son interprétation géométrique par la formule de Stokes – et la formulation en termes de repère mobile sont les seuls outils ; tout semble découler naturellement de leur usage.

Le schéma de présentation adopté par Cartan se conserve sur la période 1922-1925, retenons-en les grands traits. Cartan commence par présenter le formalisme du repère mobile en géométrie affine :

> Imaginons que l'on fasse correspondre à chaque point **m** de l'espace un système de référence cartésien[5] d'origine **m** ; soient $\mathbf{e}_{1,}$ $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ les trois vecteurs qui définissent, avec **m**, ce système de référence. Nous pourrions même imaginer qu'à chaque point corresponde une infinité de tels systèmes de référence. Nous aurons ainsi un ensemble de systèmes de référence dépendant d'un nombre de paramètres pouvant aller jusqu'à 12 ; nous appellerons u_i ces paramètres.
>
> Lorsqu'on fait varier infiniment peu les paramètres, le point **m** et les vecteurs $\mathbf{e}_{1,}$ $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ subissent des variations infiniment petites, qui sont des vecteurs, et qui sont par suite exprimables linéairement au moyen de $\mathbf{e}_{1,}$ $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Soit
>
> $$(1) \qquad \begin{cases} dm = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \\ de_1 = \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3 \end{cases}$$
>
> Les ω^i et ω_i^j sont linéaires par rapport aux différentielles du_i ; ces douze formes de Pfaff permettent en somme de repérer le système de référence d'origine **m**+d**m** par rapport au système de référence d'origine **m**. On peut dire aussi qu'elles définissent le petit déplacement affine qui permet de passer de celui-ci à celui-là. [Cartan 1923 694]

Cartan n'a pas besoin de rappeler à son lecteur l'origine de ces formules ; donnons quelques éléments, pour mémoire. Un repère mobile de l'espace usuel est une application différentiable $x \to (\mathbf{m}(x), \mathbf{e}_1(x), \mathbf{e}_2(x), \mathbf{e}_3(x))$, x variant dans un espace de paramètres : un espace unidimensionnel si l'on étudie la repère mobile sur une courbe, bidimensionnel si l'on étudie un repère mobile sur une surface etc. On verra que le paramètre x n'apparaît pas dans les

invariants intégraux professées par Cartan [Cartan 1922a]. Pour un aperçu de l'histoire des formes différentielles et de la formule de Stokes, nous renvoyons à [Katz 1979], [Katz 1981] et [Katz 1985].

[5] Cartan explique quelques lignes plus que dans le cadre affine, on ne peut entendre par repère cartésien que la donnée d'un point et de trois vecteurs non coplanaires.

formules (1), non plus que la dimension de l'espace dans lequel il évolue, vont jouer un rôle important dans la généralisation de la notion d'espace que propose Cartan. Les formules (1) s'obtiennent en différenciant cette application et en exprimant les différentielles par rapport au repère mobile lui-même ; cela fait apparaître les formes ω^i et ω^i_j associant à chaque variation infinitésimale du paramètre les composantes de la variations instantanée du repère mobile.

Reprenons le fil de l'exposé de Cartan. Il fait ensuite remarquer que les intégrales de ces différentielles sont nulles sur un chemin fermé, pour justifier que leurs dérivées extérieures sont nulles. Il ne s'agit pas ici de faire sentir le rôle de la topologie : la dérivation extérieure n'est, dans les textes de Cartan de cette période, jamais utilisée de manière autonome ; elle est systématiquement déduite d'une transformation d'intégrale par la formule de Stokes : les différentielles sont encore fondamentalement des « éléments d'intégrale » et la formule de Stokes permet de donner une signification géométrique à ce type de calcul différentiel, sans que « géométrique » renvoie ici le moins du monde à une interaction entre topologie et Analyse, ou entre aspects locaux et globaux. Le rappel du formalisme classique du repère mobile permet de formuler de manière simple le problème de la connexion des espaces affines infinitésimaux associés à deux points infiniment voisins et, techniquement, de se placer dans l'arène du calcul sur les formes différentielles. Une fois ce rappel classique effectué, Cartan introduit les connexions affines en disant simplement « la connexion affine de la variété s'exprimera par des formules identiques de forme à (1) » [Cartan 1923 696]. Se posent ensuite les questions d'intégrabilité, que Cartan introduit sous leur forme géométrique. Première question :

> Les lois de la connexion affine définissent en quelque sorte le raccord des espaces affines tangent en deux points infiniment voisins **m** et **m**'. Que se passe-t-il quand on considère deux points quelconques de la variété ?
>
> On ne peut répondre que si l'on se donne un chemin déterminé allant de $\mathbf{m}_0$ en $\mathbf{m}_1$; [Cartan 1923 697]

A ce chemin est associé un système d'équations différentielles ordinaires, l'intégration est possible ; comme chez Lie, ou même chez Jordan dans son travail de 1867 sur les groupes de mouvements, Cartan interprète explicitement cette intégration comme une composition de transformations, la composition d'une infinité de transformations infinitésimales donnant une transformation finie [Cartan 1923 703]. Deuxième question :

> Le raccord des espaces affines tangents en deux points quelconques **m** et **m**' peut-il être défini indépendamment du chemin suivi pour aller de **m** en **m**' ? Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les équations aux différentielles totales (1) ou (3) soient complètement intégrables. [Cartan 1923 699]

Cette condition d'intégrabilité est simplement l'annulation des dérivées extérieures. Si elle est vérifiée, l'intégration donne le changement de variable permettant de retrouver la nature affine de l'espace : « la variété est elle-même un espace affine » [Cartan 1923 699]. Aux outils près, le questionnement local est ici le même que celui qu'on trouvait chez Weyl dans sa lecture de l'annulation de la courbure (de la connexion), ou chez Riemann en 1854 : comment savoir si un espace décrit par un système de coordonnées curvilignes est en fait l'espace ordinaire – du moins un ouvert de cet espace ? Lorsque les équations sont non intégrables, Cartan tire tout naturellement de son calcul extérieur deux conséquences importantes. Premièrement, la non intégrabilité signifie que les dérivée extérieures (d**m**)' et (d$\mathbf{e}_i$)' ne sont pas nulles (il dit que les formes ne sont pas « exactes ») : posant (d**m**)'= Ω^1 $\mathbf{e}_1$ + Ω^2 $\mathbf{e}_2$ + Ω^3 $\mathbf{e}_3$ il nomme ce vecteur la « torsion de la variété à connexion affine donnée ; de même avec (d$\mathbf{e}_i$)' = Ω_i^1 $\mathbf{e}_1$ + Ω_i^2 $\mathbf{e}_2$ +Ω_i^3 $\mathbf{e}_3$, « les formes Ω_i^j définissent ce qu'on appelle la courbure de la variété à connexion affine donnée » [Cartan 1923 702]. Deuxième conséquence, le calcul différentiel extérieur garantit que les différentielles extérieures des formes de torsion et de courbure sont elles-mêmes nulles ; Cartan en propose des interprétations en termes de lois de symétrie, ou de lois de conservation [Cartan 1922b 614].

Signalons deux prises de distance par rapport à la théorie de Weyl. Premièrement, Cartan souligne qu'il ne voit pas la « nécessité logique » qui conduit Weyl à imposer l'existence de « coordonnées géodésiques » interdisant l'apparition de torsion [Cartan 1923 659].

Le choix du calcul sur les formes différentielles amène Cartan à s'écarter de Weyl sur un autre point. Lorsqu'il aborde la question de l'insertion de l'électromagnétisme dans l'édifice de la relativité – restreinte, dans un premier temps – Cartan souligne qu'on peut concevoir les équations de Maxwell de deux manières différentes. Soit on met en avant les équations aux dérivées partielle du premier ordre, ce que fait Weyl ; la connexion joue alors un rôle essentiel, et l'on peut chercher à unifier la gravitation et l'électromagnétisme en élargissant aux dilatations la gamme des transformations infinitésimales considérées. Soit, et c'est le point de vue qui est préféré par Cartan, on lit la théorie de Maxwell en termes d'équations intégrales (relatives à des flux, des circulations etc.) qui résument un grand nombre de faits d'expérience et, techniquement, n'utilisent que les opérateurs relatifs aux formes

différentielles et à la formule de Stokes : « Si nous adoptons ce point de vue, les équations de Maxwell sont indépendantes de toute hypothèse sur la connexion affine de l'espace-temps » [Cartan 1924b 817].
La fin de cette partie de l'article de Cartan est consacré à la question de savoir si cette indépendance peut être conservée en relativité générale et au lien avec la notion de torsion.

1.3 Espace(s), géométrie(s)

1.3.1 L'espace tangent comme « espace attaché »

Dans *RZM*, Weyl non seulement reformulait la récente notion géométrique de transport parallèle sur une variété munie d'un ds^2 mais autorisait dans l'infiniment petit les similitudes et non plus seulement les isométries ; il introduisait ainsi la symétrie de jauge et une nouvelle courbure (*Streckenkrümmung*). Il enrichissait par là le jeu des structures possibles, sans sortir d'un cadre structuré par la notion d'invariance et le couple infinitésimal/fini. Cartan, pour sa part, continue à exploiter les possibilités offertes par la formulation en termes de repère mobile pour proposer, au delà des espaces à connexion affine ou euclidienne, une vaste « généralisation de la notion d'espace » – pour reprendre le titre d'un article de 1924. On va voir comment sa description *des* géométries et le mode original de formations d'*espaces* consistant à « attacher » à chaque point d'une première variété un espace de géométrie donnée contribue à enrichir la notion de variété sans faire intervenir de notion topologique ou de question globale. En particulier, rien dans ce qu'écrit Cartan à propos de cet « attachement » n'évoque l'opposition entre une structure localement triviale sur la base (la structure d'un produit) et une structure globalement non triviale du point de vue topologique. Bien plus, on verra que le dispositif théorique ne peut ménager aucune place pour les interrogations globales relatives à la nature des « espaces attachés » : si la variété de base est, elle, saisie de manière implicitement locale, l'évocation des espaces attachés sert avant tout à donner un contenu géométrique à des formules relatives à des familles différentiables de transformations infinitésimales d'un groupe de Lie donné.

Dans l'article *Sur les variétés à connexions affines,* la question de l'attachement d'un espace à un autre est évoquée dès le cas affine et l'on voit Cartan y préciser sa conception de l'espace tangent en un point d'une variété. Citons intégralement le paragraphe très riche dans lequel est présentée l'idée générale de connexion affine :

> Considérons maintenant une variété numérique à trois dimensions, dont chaque point **m** est supposé défini par trois nombres u^1, u^2, u^3. Faisons correspondre par la pensée à chaque point **m** un espace affine contenant ce point, et soient $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ trois vecteurs formant avec **m** un système de référence pour cet espace. La variété sera dite à « connexion affine » lorsqu'on aura défini, d'une manière d'ailleurs arbitraire, une loi permettant de repérer l'un par rapport à l'autre les espaces affines attachés à deux points *infiniment voisins* quelconques **m** et **m'** de la variété ; cette loi permettra de dire que tel point de l'espace affine attaché au point **m'** correspond à tel point de l'espace affine attaché au point **m**, que tel vecteur du premier espace est parallèle ou équipollent à tel vecteur du second espace. En particulier, le point **m'** lui-même sera repéré par rapport à l'espace affine du point **m** et nous admettrons la loi de continuité d'après laquelle les coordonnées de **m'** par rapport au système de référence affine d'origine **m** sont infiniment petites ; cela permettra de dire en un certain sens que l'espace affine attaché à **m** est l'espace affine *tangent* à la variété donnée. [Cartan 1923 696]

On voit que l'espace affine repéré par les $\mathbf{e}_i$ est tangent au sens où les changements de repères infinitésimaux dépendent linéairement des translations infinitésimales d**m** sur la variété. C'est la donnée de la connexion qui, la première, instaure une solidarité entre les espaces tangents attachés à des points différents : on est ici au plus loin de la notion de variété fibré tangente à une variété différentiable.

En un sens, tout ce paragraphe n'est qu'une introduction aux formules (1) décrivant le repère mobile, en particulier $d\mathbf{m} = \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2 + \omega^3\,\mathbf{e}_3$; ce paragraphe illustre de manière frappante l'un des traits communs au développement de ces théories des connexions chez Weyl et Cartan : nos auteurs reprennent des formules qui sont *déjà là* – dérivation covariante pour l'un, repère mobile pour l'autre –, l'innovation théorique consistant en grande partie à proposer des schémas d'interprétation géométrique mettant au premier plan les questions de lieu de validité. En termes anachroniques : où cela « vit »-il ? De quel espace cela me donne-t-il une propriété ? Ces questions ne se donnent pas d'elles-mêmes dans le simple jeu des formules : ces formules, on peut entièrement les lire dans une grille relevant du monde de la grandeur, dans un univers mathématique organisé par les notions de grandeur et de relation, de grandeurs primitives et dérivées, de changements de variables admissibles et d'invariants. À ce titre, ces travaux de la période 1918-1925, bien qu'implicitement locaux et antérieurs à l'émergence explicite des problématiques globales chez Weyl[6] et Cartan, marquent un changement radical de cadre problématique porteur de possibilité d'interrogations globales. On a vu Weyl évoquer à plusieurs reprises l'espace tangent : la nature de ses éléments, son rôle de voisinage infinitésimal ou son lien avec la variété à laquelle il est tangent peuvent sembler, selon les passages, exprimés par des métaphores fluctuantes ; mais ce qui importe au développement de la théorie, c'est moins de préciser la nature de ces espaces que de faire ressortir comme fondamental leur caractère *centré*, le fait qu'ils sont par nature attachés chacun à un point et que le lien entre espaces attachés à des points différents est problématique. Dans ce dernier paragraphe, Cartan répond à ce même enjeu de création d'un cadre problématique centré sur la question du *lieu*, tout en adoptant une autre démarche que celle de Weyl. Ce dernier posait d'emblée la question de la connexion entre espaces tangents à deux points infiniment proches. Cartan part de la possibilité générale de faire « correspondre par la pensée à chaque point **m** un espace affine contenant ce point » pour formuler en fin de paragraphe la condition à laquelle cet espace peut être *vu comme* l'espace tangent.

Par delà les différences d'outils privilégiés entre Weyl et Cartan, on trouve dans leurs travaux de géométrie différentielle de cette période un mode d'écriture présentant des nombreux traits communs : moins des définitions – certainement pas des définitions de « structures » – qu'un art de faire parler les formules ; une herméneutique géométrique. Le texte entremêle deux types d'éléments, des formules – qui généralisent souvent des formules « bien connues » – et des explications cherchant à guider le lecteur vers le bon *point de vue* : les objets ne *sont* pas ceci ou cela, ils sont *vus comme…* . Cette dialectique est nécessaire à l'intelligence du texte : dans une suite de formules de plus en plus générales, le lien n'est pas directe d'une formule à l'autre ; une formule plus générale ne découle pas d'une autre formule par déduction ou calcul. C'est la mise en place d'un nouvelle lecture de formules classique qui *légitime* l'introduction de formules plus générales. En ce sens, le passage sur l'espace tangent que nous commentons ne se comprend que lorsqu'on lit les formules généralisées qu'il permet d'introduire, nous le verrons dans un instant. Ce procédé théorique (et rhétorique) possède toutefois deux inconvénients. Chercher à modifier les points de vue est un art délicat : on n'est jamais sûr de bien se faire comprendre ; on ne peut être assuré de convaincre. Sur ce deuxième point, on peut lire en 1929 la comparaison que fait Weyl des travaux sur les espaces généralisés de Cartan d'une part, de l'école de Princeton (Eisenhart, Veblen, Thomas) d'autre

[6] Du moins en géométrie différentielle, la problématique est bien sûr globale chez Weyl dans *L'idée de surface de Riemann.*

part : c'est peu de dire que Weyl n'est pas convaincu de la pertinence du point de vue de Cartan [Weyl 1929].

1.3.2 Un modèle à trois espaces : l'espace observé, son groupe, l'espace des observateurs

L'attachement aux points d'une variété d'un espace qui peut être vu comme l'espace tangent n'est qu'un cas particulier d'une « opération » très générale que Cartan présente quelques pages plus loin, et qu'on trouvait évoquée dès les notes de 1922. Ici encore, la généralisation semble découler naturellement des choix techniques du repère mobile et du calcul différentiel extérieur : les groupes de Lie – du moins l'espace vectoriel formé par leurs transformations infinitésimales – s'insèrent naturellement dans le cadre, comme Cartan le faisait déjà remarquer en 1915 à la fin de l'article de l'*Encyclopédie* consacrée à *La théorie des groupes continus et la géométrie*. Ainsi lit-on dans *Sur les variétés à connexions affines* :

> Considérons un groupe fini et continu quelconque G à n variables x_1, x_2, …,x_n, ce groupe étant, par exemple, défini par r transformations infinitésimales indépendantes
>
> X_1f, X_2f, … X_rf. [Cartan 1923 717]

Rappelons que les variables x_i désignent ici les coordonnées dans l'espace sur lequel agit le groupe et non celles de « l'espace du groupe » - aussi appelé espace des paramètres ; comme chez Lie, la considération d'un groupe de Lie fait d'emblée intervenir deux espaces différents, celui du groupe (ici de dimension r) et celui sur lequel le groupe agit. C'est ce second espace qui est tout d'abord mis en avant, le groupe intervenant non par son espace de paramètres (ce que nous appelons aujourd'hui le « groupe de Lie ») mais par ses générateurs infinitésimaux X_1,…, X_r (base de ce que nous appelons l' « algèbre de Lie » du groupe), présentés ici, comme chez Lie, comme des opérateurs différentiels linéaires (d'où la présence d'un f désignant une fonction générique sur laquelle les opérateurs agissent).

Cartan poursuit en rappelant le cadre d'interprétation géométrique qui était déjà celui de l'article de 1915, fusion des points de vue de Lie et Klein. Il aborde ensuite la manière de « faire correspondre » de tels espaces aux points d'une variété, mais la présentation est ici un peu différente de celle choisie dans le cas des connexions affines :

> Cela posé, imaginons un ensemble continu d'observateurs, réduits à des points, et dont chacun adopte un système de coordonnées pour l'étude de l'espace (E), ces systèmes étant naturellement tous équivalents entre eux. La variété formée par ces observateurs points est, je suppose, à p dimensions, chaque point étant défini d'une manière quelconque par p coordonnées u_1,…, u_p. Si l'on passe d'un point **m** de la variété à un

point infiniment voisin **m**', on passera dans l'espace (E) d'un certain système de coordonnées à un autre que nous supposerons infiniment voisin ; autrement dit, on passe des coordonnées x_i utilisées par l'observateur **m** aux coordonnées x_i' utilisées par l'observateur **m**' en effectuant une certaine transformation infinitésimale du groupe G, soit

$$\omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f + \ldots + \omega_r X_r f$$

en désignant par $\omega_1, \ldots, \omega_r$ des expressions linéaires en $du_1, \ldots, du_p$ avec des coefficients fonctions de $u_1, \ldots, u_p$. [Cartan 1923 718]

La généralisation du cas affine est assez directe : au lieu de considérer que le repère mobile est donné par une transformation *affine* dont les composantes (dans un repère arbitraire fixé) sont des formes linéaires en les du_i, on va considérer que le « repère mobile » d'une géométrie de groupe G est donné par une transformation infinitésimale du groupe dont les composantes sont des formes linéaires en les du_i ; on peut lire cette transformation infinitésimale variable comme associant à chaque translation infinitésimale sur la variété des observateurs un changement infinitésimal de repère dans l'espace (E) compatible avec sa géométrie de groupe G. Soulignons encore que ce qui apparaît dans les formule ce n'est pas l'espace (E), ni même le groupe G ; seules les transformations infinitésimales apparaissent, le reste relève du cadre géométrique d'interprétation. En suivant le modèle du raisonnement proposé dans le cas affine, la recherche de conditions d'intégrabilité amène à considérer la dérivée extérieure de $\omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f + \ldots + \omega_r X_r f$, l'écriture de cette dérivée faisant apparaître des « éléments d'intégrale double » dans lesquels interviennent les constantes de structure c_{hks} du groupe[7].

Mais il nous importe surtout de remarquer que le passage du cas affine au cas plus général permet de mieux comprendre le lien entre les différents espaces impliqués, ainsi que les conceptions sous-jacentes des notions d'« espaces » et de « géométries ». Dans le cas affine, le rôle des transformations affines était à la fois central et implicite, et, pour des raisons évidentes, la distinction entre transformations infinitésimales et transformations finies ne s'imposait pas[8] ; l'espace attaché à chaque point était l'espace tangent, de même dimension que la variété. La généralisation à tout groupe de Lie fait apparaître plus clairement les rôles de trois espaces différents : l'espace (E), le groupe de Lie (lui-même décrit soit par ses transformations infinitésimales soit par ses transformations finies) et la variété des

[7] Rappelons leur définition : $[X_h, X_k] = \Sigma_s c_{hks} X_s$.

[8] Si en effet on se place dans l'espace vectoriel des matrices carrées réelles, le groupe Gl(n,**R**) en est un ouvert : son espace tangent en l'identité est assimilable à l'espace vectoriel ambiant ; les deux espaces (celui du groupe et l'espace tangent en Id) coïncident de plus entièrement au voisinage de l'identité, il n'y a aucune raison de les distinguer si, comme Cartan, on adopte un point de vue universellement local.

« observateurs » ; la variété des observateurs est un espace de dimension quelconque qui joue le rôle d'espace de paramètres de repères mobiles dans l'espace (E), mobile selon les lois prescrites par le groupe G. La plupart des liens qui « allaient de soi » dans la description classique des espaces tangents à une variété sont ici explicités, ce qui permet, en retour de mieux comprendre la démarche de Cartan dans le cas affine. Outre l'explicitation du rôle des différents espaces, le cas général présente aussi un changement de *point de vue* important par rapport au point de vue initial sur le cas affine. Alors, il semblait essentiel de comprendre qu'à chaque point correspond un espace affine différent, d'où la question de la connexion au sein d'une collection d'espaces affines. Dans le cas général, le point de vue est renversé : il n'y a qu'un espace (E), qui peut être un espace affine, et la variété initiale ne joue que le rôle de variété des paramètres des repères mobiles ; on passe d'un point de vue dans lequel la variété est l'objet principal et les espaces attachés secondaires à un point de vue dans lequel l'espace (E) est unique et la variété des observateurs l'une des possibles parmi un infinité d'autres. On peut bien sûr dire que ce changement de point de vue exprime la trivialité locale des fibrés en question, mais ce n'est pas là la question de Cartan. Ce changement de point de vue – qui avait d'ailleurs déjà été présenté dans le passage consacré au cas affine – permet de mieux comprendre certaines des constructions de Cartan. On avait vu, dans le cas affine, l'interprétation infinitésimale des notions de courbure et de torsion. Le changement de point de vue consistant à fixer l'espace (E) permet d'associer à tout chemin dans la variété des observateurs un repère mobile dans (E) ; les deux repères associés aux deux extrémités du chemin dans la variété des observateurs diffèrent d'une transformation *finie* de G, qui peut ne pas se réduire à l'identité lorsque le chemin est fermé[9]. On comprend en particulier pourquoi le chemin peut être fermé dans la variété initiale (celle des observateurs) et ne pas l'être dans (E), ce que mesure la torsion.

On comprend que le modèle général qui guidait déjà la présentation du cas affine n'est pas tiré de la géométrie différentielle classique, ni de la théorie des invariants différentiels ou du calcul différentiel absolu ; le modèle sous-jacent est celui du lien entre un groupe de Lie et l'espace sur lequel il agit. Cartan prend d'ailleurs ce cas comme premier exemple de sa conception générale ; après avoir présenté analytiquement les conditions d'intégrabilité, il commente :

> La circonstance particulière qui vient d'être étudiée se présentera en particulier si nous prenons pour variété (V) la *variété des paramètres* du groupe. Si

[9] Dans son cours sur *La géométrie des espaces de Riemann* Cartan présente cela comme le « développement » de la variété sur l'espace de référence (E) [Cartan 1925a 18].

$$x_i' = f_i(x_1,\ldots,x_n\,;\,a_1,\ldots,a_r)$$

> sont les équations finies de la transformation T_a la plus générale du groupe G, on pourra regarder $a_1,\ldots,\ a_r$ comme les coordonnées d'un point **m** d'une variété (V) à r dimensions. Si $a_1^0,\ldots,a_r^0$ sont les paramètres de la transformation identique et si $\mathbf{m}_0$ est le point correspondant de (V), nous admettrons que le système de coordonnées adopté par l'observateur **m** se déduit par transformation T_a du système de coordonnées adopté par l'observateur $\mathbf{m}_0$. [Cartan 1923 720]

Il existe donc dans ce cas une connexion canonique triviale. Rappelons que dans la théorie de Lie, la stabilité par crochet de l'ensemble des transformations infinitésimales n'est autre que la condition d'intégrabilité garantissant que les transformations finies obtenues par intégration vérifient la propriété de stabilité par composition. Cartan obtient ses espaces généralisés en n'y supposant plus la condition d'intégrabilité vérifiée : le nouvel espace est modelé sur un groupe de Lie donné, il en est une version moins organisée, où le passage de l'infinitésimal au fini est moins harmonieux. Techniquement, le cas général s'obtient en introduisant une variété des observateurs qui ne soit pas la variété des paramètres du groupes, ce que Cartan explicite quelques lignes plus loin.

On voit que ce formalisme permet à Cartan d'introduire les connexions affines, euclidiennes (relatives à un ds^2), conformes ou projectives, et, pour chacune d'elles, de mesurer l'obstruction à l'intégrabilité par des « courbures » de tous types : courbure au sens de Riemann, torsion, courbure d'homothétie (lorsque, avec Weyl, on passe du groupe des isométries relatives à un ds^2 au groupe des similitudes), courbure d'élation dans le cas conforme [Cartan 1922e 624] etc. De ce cadre général découlent les études particulières menées par Cartan dans cette période : le théorème de Weyl montrant l'unicité de la connexion affine sans torsion (pour le dire dans le vocabulaire de Cartan) compatible avec un ds^2 (ou, plus généralement, une métrique au sens de Weyl) donne un premier modèle de problèmes. La possibilité de définir les géodésiques pour d'autres structures que les structures riemanniennes en fournit un second – ainsi dans le rapprochement entre connexions conformes et propriétés optiques de l'espace de la relativité générale [Cartan 1822e 626]. On doit insister sur le fait que la conception de Cartan de ce qu'est une géométrie ne laisse pas de place pour les questions globales : non seulement la variété des observateurs n'est considérée que localement – éventuellement le long de chemins, mais alors deux chemins reliant les mêmes points sont toujours implicitement supposés former le bord complet d'une surface –, mais ni la variété des paramètres (ce que nous appelons le groupe de Lie G) ni l'espace (E) ne sont considérés globalement. Lorsque Cartan « attache » par la pensée des espaces affines ou projectifs en chaque point d'une variété pour étudier les connexions affines ou projectives, il n'attache pas dans un cas l'espace $\mathbf{R}^n$ et dans l'autre l'espace compact et éventuellement non orientable $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. Cartan ne se départit pas ici du point de vue classique exprimé en toute clarté dans l'article de 1915 sur les groupes continus et la géométrie, une géométrie est définie par un groupe (c'est-à-dire les transformations voisines de l'unité) agissant sur des séries de variables qu'on peut considérer comme représentant les points (ou d'autres objets : plans, sphères) d'un ouvert d'un espace. Les notions de *transformations* (infinitésimales ou finies) et de *propriétés* géométriques possèdent un sens technique parfaitement défini, ce n'est pas le cas de l'*espace* sur lequel le groupe agit, du moins pas au sens d'espace topologique. L'accent sur le groupe et l'absence de point de vue sur l'espace dans sa totalité était d'ailleurs visible dès l'introduction de la notion de géométrie affine :

> En Géométrie ordinaire, il existe des propriétés des figures que l'on appelle *propriétés affines* : ce sont celles qui se conservent lorsqu'on effectue une transformation homographique quelconque conservant le plan à l'infini. [Cartan 1923 693]

Le Programme d'Erlangen n'est pas loin : les géométries affines ou métriques (relatives à une forme quadratique non dégénérée à coefficients constants) s'obtiennent à partir la géométrie projective.

1.4 Un deuxième thème : réconcilier les points de vue de Klein et de Riemann

Cette construction théorique impressionnante par sa généralité comme par l'unité de ses moyens conduit Cartan à étudier deux autres problèmes reposant sur la notion de groupe – celui de la décomposition des tenseurs en tenseurs irréductibles, celui du groupe d'holonomie – qui joueront tous deux un rôle important dans l'introduction des problématiques globales. L'introduction, à partir de 1925, du groupe d'holonomie s'accompagne du développement d'un nouveau thème : à celui d'une géométrie et d'une physique « purement locales » s'ajoute celui de la conciliation des points de vue de Klein et de Riemann ; ce nouveau thème n'est plus, comme l'était le précédent, directement hérité de Weyl et Einstein.

1.4.1 Représentations tensorielles et tenseurs irréductibles

Contrairement à Einstein, Levi-Civita ou Weyl, Cartan n'utilise pas fondamentalement le calcul tensoriel et la notion de tenseur. Les tenseurs interviennent toutefois dans la deuxième partie de l'article sur *Les variétés à connexions affines*, mais les longues mises en place théoriques de Weyl sont remplacées par une brève introduction, toujours guidée par les principes de l'article de 1915 sur la géométrie et les groupes continus :

> Considérons dans un espace affine un être géométrique, ou plutôt un ensemble d'êtres géométriques se déduisant l'un de l'autre par une transformation affine. Si l'on choisit un système de coordonnées affines, cet être géométrique est défini analytiquement par un certain nombre (que nous supposerons fini) de quantités y_1, y_2,…, y_p, que nous appellerons ses coordonnées. Lorsqu'on fait un changement de coordonnées, ces quantités subissent une transformation et toutes les transformations qui correspondent à tous les changements de coordonnées possibles forment évidemment un groupe. Nous dirons que l'ensemble des quantités y_i constitue un tenseur à p composantes. Nous réservons plus spécialement le nom de tenseurs au cas où le groupe des transformations effectuées sur les y_i est linéaire. Les coordonnées d'un point, les composantes d'un vecteur, les coefficients de l'équation d'une quadrique, etc. constituent autant de tenseurs. [Cartan 1925e 933]

Voilà pour la mise en place algébrique : la géométrie affine – c'est-à-dire celle du groupe affine – définit des classes stables de figures géométriques dont le repérage par des coordonnées invite à porter le regard sur les représentations linéaires du groupe de départ. Il est inutile de rappeler ici que Cartan est aussi spécialiste de la représentation linéaire des groupes – du moins des algèbres – de Lie et que ses travaux de 1913-1914 sur les représentations irréductibles des algèbres de Lie réelles sont à la pointe de cette théorie. Après cette rapide mise en place algébrico-géométrique, Cartan passe en quelques lignes de l'espace affine aux variétés à connexion affine :

> Considérons maintenant une variété à connexion affine à n dimensions. Nous appellerons tenseur attaché à un point **m** de cette variété un ensemble de quantités qui subiront une transformation linéaire lorsqu'on changera le système de référence (d'origine **m**) attaché à l'espace affine tangent en **m**. Il existe deux tenseurs remarquables attachés à un point **m** de la variété, c'est le *tenseur de torsion* dont les composantes sont les coefficients $A^i_{\alpha\beta}$ et le *tenseur de courbure* dont les composantes sont les coefficients $A^j_{i\alpha\beta}$. [Cartan 1925e 934]

La question qui intéresse Cartan est celle de la décomposition de ces tenseurs en tenseurs irréductibles et l'interprétation géométrique de chacune des composantes. La notion de base est la suivante :

> Les composantes de tout tenseur attaché au point **m** subissent une substitution linéaire (et homogène) quand on effectue un changement de système de référence d'origine **m**. Le tenseur sera dit *irréductible* lorsqu'il sera impossible de trouver un certain nombre de combinaisons linéaires (à coefficients constants) des composantes du tenseur donné formant pour elles-mêmes un tenseur. [Cartan 1925e 934]

Nous n'entrons pas ici plus avant dans la présentation de ces questions. Il nous suffit d'établir le lien, à partir de 1924-25 chez Cartan, entre la théorie des espaces généralisés et les questions de représentations linéaires irréductibles des algèbres de Lie classiques. Dans cette deuxième partie de l'article *Sur les variétés à connexion affine*, une note de Cartan fait explicitement référence à un travail récent de Weyl sur la question :

> Au moment de la rédaction de ce Mémoire (décembre 1922), je regardais comme très vraisemblable, mais sans en avoir la démonstration, le théorème d'après lequel tout tenseur attaché à un groupe linéaire *simple* ou *semi-simple* est décomposable en tenseurs irréductibles. M. H. Weyl a réussi tout récemment à démontrer cet important théorème [*Das Gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung* (*Gött. Nachr., 1924*] ; voir aussi : *Zur Theorie der Darstellung der einfachen continuirlichen Gruppen* (*Sitzungsb. Berlin, 1924, p.338-345*). [Cartan 1925e 934]

La suite de l'article de Cartan présente et prolonge ces travaux de Weyl.

1.4.2 Le groupe d'holonomie

Cette deuxième partie de l'article *Sur les variétés à connexion affine* contient aussi l'introduction détaillée du groupe d'holonomie dans les cas affines et euclidiens, mais nous nous appuierons plutôt sur un texte strictement contemporain de la rédaction de cet article, la conférence que Cartan donne en août 1924 au Congrès international de Mathématiques de Toronto sur *La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielle* [Cartan 1925b]. Cartan y présente sa théorie des espaces généralisés et introduit à cette occasion un thème inédit, celui de la rencontre des points de vue de Klein et Riemann sur la géométrie. Il commence par présenter ce qu'il y a d'apparemment incompatible entre les points de vue de Klein et Riemann, entre la géométrie au sens du Programme d'Erlangen et la géométrie au sens des *Hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*. Pour Klein c'est un groupe sous l'action duquel l'espace est en un sens *homogène* qui définit les géométries usuelles (euclidienne, projective, cayleyennes). Les espaces considérés par Riemann ne possèdent pas, eux, cette sorte d'homogénéité. Les développements récents dans la direction

« riemannienne », sous l'impulsion de la théorie d'Einstein, conduisent Cartan à sa question principale : « Quel rôle la notion de groupe joue-t-elle, ou plutôt doit-elle jouer, dans ce champ nouveau de la Géométrie ; est-il possible de faire rentrer dans ce cadre, suffisamment élargi, du Programme d'Erlangen toutes les géométries nouvelles et une infinité d'autres » [Cartan 1925b 892]

C'est bien entendu sa théorie des espaces généralisés que Cartan vise à introduire et la possibilité qu'elle offre de forger des connexions à partir de tout groupe de Lie. Il commence par introduire les thèmes – présents, eux, chez Weyl – de validité infinitésimale de la géométrie au sens de Klein et du caractère par nature *centrées* des géométries ainsi obtenues :

> (…) si un espace de Riemann ne possède pas d'homogénéité absolue, il possède cependant une sorte d'homogénéité infinitésimale ; au voisinage immédiat d'un point donné, il est donc assimilable à un espace euclidien. Toutefois si deux petits morceaux voisins d'un espace de Riemann peuvent être assimilés chacun à un petit morceau d'espace euclidien, ces deux petits morceaux sont sans liens entre eux, ils ne peuvent pas, *sans convention nouvelle,* être regardés comme appartenant à un seul et même espace euclidien. Autrement dit, un espace de Riemann admet, au voisinage d'un point A, une rotation autour de ce point, mais une translation même considérée dans les effets qu'elle produit sur une région très petite de l'espace, n'a pas de sens. [Cartan 1925b 893]

Cette formulation du problème des connexions en termes de translations lui permet de relire le travail de Levi-Civita, en montrant que ce n'est pas le transport parallèle des vecteurs qui est fondamental – il est appelé à disparaître en géométrie conforme, par exemple – mais la réintroduction des translations dans le cadre Riemannien[10].

Dans cette conférence, Cartan ne présente aucun des aspects techniques, ne fait pas même allusion au repère mobile, au calcul différentiel extérieur et ne fait pas le lien explicite avec les générateurs infinitésimaux des groupes continus. Il choisit de mettre au premier plan des éléments que l'on verra porteurs, à partir de 1925, de développements globaux. Pour l'heure, c'est la possibilité de représenter un espace (V) dans l'espace (E) le long d'un chemin dans (V) qui est mise en avant. Ainsi dans le cas euclidien :

[10] Ainsi à propos de la notion de « parallélisme » : « Ce serait restreindre sa portée que de n'y voir, comme on l'a fait en général, qu'un procédé de comparaison de vecteurs issus de deux points infiniment voisins ; il faut y voir au contraire un moyen d'introduire dans un espace de Riemann toute la gamme des déplacements de l'espace euclidien, du moins en ce qui concerne les effets qu'ils produisent dans une région infiniment petite de l'espace. » [Cartan 1925b 894]

> Comme on le voit, la notion de parallélisme de M. Levi-Civita permet d'assimiler à un vrai espace euclidien, ou du moins à une portion de cet espace, toute la région d'un espace de Riemann qui avoisine un arc de courbe AB tracé dans l'espace donné. [Cartan 1925b 894]

Le terme « avoisine » étant bien sûr à entendre ici au sens infinitésimal. La différence entre l'espace de départ et un simple espace euclidien n'est plus décrite au moyen de la courbure, comme elle l'était depuis Riemann et encore dans la première partie de *Sur les variétés à connexion affine*, mais par le fait que deux chemins de mêmes extrémités ne donnent pas nécessairement des développement coïncidant dans l'espace euclidien de référence : c'est le phénomène que Cartan baptise, important ce terme de la Mécanique, de *non-holonomie*. Pour une formulation plus précise que celle donnée dans la conférence on peut se reporter à la deuxième partie de *Sur les variétés à connexions affines* ; Cartan y dépasse le point de vue infinitésimal qui présidait, sur ces questions, aux réflexions de la première partie :

> Nous avons vu au chapitre II qu'étant donné une variété à connexion affine, à tout contour fermé infiniment petit partant d'un point **m** de la variété et y revenant est associé un déplacement affine infinitésimal (...). *En général ces déplacements infinitésimaux n'engendrent pas un groupe.*
>
> Il n'en est plus de même si l'on considère tous les contours fermés possibles (finis) partant de **m** et y revenant. A chacun d'eux est associé, par le procédé indiqué au n°34, un déplacement affine fini de l'espace affine tangent en **m**. Il est évident que tous ces déplacements forment un groupe (continu) (…).
>
> Il résulte qu'à tout point **m** de la variété est associé un groupe *g* de déplacements affines. [Cartan 1925e 922]

Le raisonnement se transpose directement aux espaces généralisés puisqu'il n'utilise que la distinction entre transformations infinitésimales et transformations finies et la possibilité de développement dans un espace de géométrie donnée – au sens de Klein – le long d'un chemin. Cartan démontre comme premier résultat que la structure de ce groupe ne dépend pas du point **m** puisqu'à chaque chemin reliant deux points de la variété (implicitement supposée connexe) est associée un isomorphisme des groupes associés aux extrémités : le choix du groupe d'holonomie comme objet central d'étude constitue, après la technique du développement dans un espace au sens de Klein, une deuxième voie pour étudier l'espace comme un tout et non plus une collection de voisinages infinitésimaux. C'est ce groupe d'holonomie qui est au centre des réflexions de *La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie* *différentielle* ; après avoir présenté les espaces à connexions projectives ou conformes, Cartan répond à l'interrogation sur laquelle il ouvrait son exposé :

> En résumé, dans les généralisations précédentes, l'idée directrice est la suivante. Dans un espace holonome au sens de M. F. Klein, tout est commandé par le groupe fondamental et ses différentes opérations. Ce sont ces opérations qui font de l'espace un tout organique. Dans les espaces non holonomes, ce sont encore les opérations qui sont un principe d'organisation, mais uniquement de proche en proche. C'est précisément en analysant ce que cette organisation a d'incomplet que nous allons arriver au rôle tout à fait nouveau que va jouer encore la notion de groupe dans les géométries nouvelles. [Cartan 1925b 896]

Puis, exposant la notion de groupe d'holonomie dans le cas euclidien (ou riemannien, vu comme l'euclidien non holonome) : « Le groupe d'holonomie d'un espace mesure en quelque sorte le degré de non holonomie de cet espace, de même que le groupe de Galois d'une équation algébrique mesure en quelque sorte le degré d'irrationalité des racines de cette équation. » [Cartan 1925b 897]

La théorie de Cartan permet donc de fondre dans un même cadre élargi les conceptions de la géométrie de Klein et de Riemann. On pourrait dire que Klein propose une vision globale des espaces là où Riemann fait alterner les aspects infinitésimaux et finis, en un sens infinitésimaux et locaux. Mais on voit que ce n'est pas le couple local/global, ou le triplet infinitésimal/local/global qui est mobilisé par Cartan pour décrire cette jonction des points de vue. Le caractère global du point de vue de Klein est décrit en termes d'homogénéité, puis en parlant de l'espace comme d'un « tout organique » ; mais, on le voit dans l'article sur *Les variétés à connexions affines* ou déjà en 1915, c'est le groupe qui fait l'unité, l'espace sur lequel le groupe agit n'est pas étudié dans ses aspects globaux, en particulier topologiques. On voit que c'est encore la notion de groupe qui sert d'unificateur ; pour unifier les points de vue de Klein et Riemann, deux groupes sont à considérer : d'une part le groupe G décrivant la géométrie au voisinage immédiat de chaque point et faisant de chaque voisinage infinitésimal un espace géométrique au sens de Klein ; d'autre part le groupe d'holonomie de l'espace qui est un sous-groupe de G (bien défini à conjugaison près dans G), décrivant l'espace dans son unité organique.

Cette prise en compte d'un espace comme totalité au moyen des groupes ne tient pas compte de la structure globale de la variété comme espace topologique, deux points en attestent. Premièrement l'affirmation répétée que la réduction du groupe d'holonomie à l'identité caractérise les espaces affines, euclidiens, projectifs … au sens de Klein – ce qui est parfaitement cohérent avec la prise en compte purement locale des espaces sur lesquels agissent les groupes. Deuxièmement, Cartan a beau affirmer que le groupe d'holonomie est obtenu en considérant *tous* les chemins partant et revenant à un point **m** donné, il affirme systématiquement le caractère *continu* (i.e. connexe) du groupe ainsi obtenu ; il ne tient en fait compte que des chemins contractiles dans la variété, et sa saisie de *tous* les chemins ne signifie encore nullement une prise en compte de la topologie de la variété mesurée, par exemple, par son groupe fondamental (au sens de Poincaré !) π_1. On verra justement que l'un des premiers textes dans lesquels Cartan fait intervenir les aspects globaux est consacré au caractère non nécessairement continu du groupe d'holonomie et au sens topologique (pour la variété) de ce nouveau degré de complexité dans la structure du groupe.

1.5 Un horizon local

On voit que Cartan saisit les espaces de manière à la fois implicite et systématique au niveau local ; comme chez Weyl (dans *RZM*), la problématique est construite autour d'un polarité infinitésimal – fini, sous forme d'un aller-retour : nécessité, tout d'abord, de formules de manière « locale » (i.e., techniquement, infinitésimale[11]) les lois de la physique et de la géométrie[12] ; travail, ensuite, de passage de l'infinitésimal au fini – d'un fini implicitement local. Si cette saisie universellement et implicitement locale ne découle pas du choix des outils – les mêmes seront mis au services d'un questionnement global après 1925, elle ne résulte pas non plus d'une ignorance ou d'une naïveté. C'est bien plus un cloisonnement de traditions de recherches que l'on peut mettre en évidence : la géométrie différentielle n'est pas la théorie de l'uniformisation des fonctions algébriques ou analytiques ; la théorie des invariants intégraux n'est pas l'Analysis situs.

Le sens du terme « variété », d'emploi constant chez Weyl et Cartan, illustre parfaitement le cloisonnement des horizons problématiques. Notons tout d'abord que ce terme de « variété » est chez Cartan d'emploi constant sans y être jamais défini. Il l'était très rapidement dans *Espace, Temps, Matière* de Weyl, qui tenait toutefois à présenter la notion de changement de coordonnées locales et le rôle de l'hypothèse de différentiabilité des changements de carte[13].

[11] Avec, nous l'avons souligné, des distinctions lexicales présentes chez Weyl et absentes chez Cartan.

[12] Avec, ici encore, des différences que nous avons évoquées entre Weyl et Cartan, en particulier sur le rôle de la théorie de Maxwell.

[13] « Mais il n'est pas nécessaire d'exiger que toute la multiplicité, avec tous ses éléments soit représentée univoquement et réciproquement par les systèmes de valeurs des coordonnées (par exemple, cela est exclu pour la sphère) mais il faut que, si P est un élément de la multiplicité, il existe un voisinage de P qui puisse être représenté univoquement, réciproquement et d'une manière continue, par les systèmes de valeurs de *n*

Le but de Weyl n'était pas alors de mettre en place une opposition entre approches locale et globale : plus classiquement, Weyl devait mettre l'accent sur la non-unicité de la représentation analytique (locale) pour introduire les grandeurs tensorielles et les problématiques d'invariance et d'intrinséquéité. Cette présentation contraste de manière radicalement avec la définition axiomatique des variétés (bidimensionnelles, munies d'une structure de courbe analytique complexe) que Weyl donnait en 1913 dans son *Idée de Surface de Riemann* : mais il était dans ce contexte théorique l'héritier de soixante ans de recherches globales.

Cette mise en place conceptuelle de la notion de « variété » est absente chez Cartan dans les textes de 1922-1925 sur la généralisation de la notion d'espace ; une raison en est sans doute que le choix central du calcul sur les formes différentielles le dispense de vérifier systématiquement l'intrinséquéité de toutes ces constructions : l'indépendance des opérations algébriques et différentielles de ce calcul envers « le choix des variables » a été établie une fois pour toute dans son cours sur les invariants intégraux, Cartan ne prend pas même la peine de la rappeler ici [Cartan 1922a 65]. Par ailleurs, on a déjà souligné que la formule de Stokes jouaient un double rôle de légitimation du calcul sur les formes différentielles et de lien vers un domaine d'interprétation géométrico-physique des formules, sans aucune intervention de questions topologiques ; cette formule est d'ailleurs utilisée indifféremment au niveau infinitésimal et dans le fini, et cette relative indifférence se conçoit bien dans la mesure où cette formule est plus un moyen d'illustration qu'un réel outil d'étude de la situation mathématique. Enfin, on pourrait se demander dans quelle mesure le choix du calcul différentiel extérieur comme outil privilégié invite à une attention au global dans la mesure où la « condition d'intégrabilité » $\omega' = 0$ n'est valide que localement. On trouve encore la réponse dans le cours sur les invariants intégraux. Il n'y est pas distingué des formes fermées et, parmi elles, des formes exactes ; seule la notion de forme « exacte » intervient, caractérisée par l'annulation de la dérivée extérieure. Dans le chapitre VII de ces Leçons, Cartan démontre le « théorème important » :

> La dérivée de la dérivée d'une forme différentielle extérieure quelconque est identiquement nulle. [Cartan 1922a 71]

---

coordonnées. Si x_i est un système de n coordonnées, x_i^* un autre, les valeurs des coordonnées x_i et x_i^* du même élément sont liées par des relations :

(3) $$x_i = f_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

qui sont résolubles par rapport aux x^*_i, et où les f_i sont continues. Tant que nous ne savons rien de plus sur la multiplicité, nous ne sommes pas en état de distinguer un système de coordonnées d'un autre.

Pour l'étude analytique d'une multiplicité continue quelconque, il est nécessaire d'échafauder une théorie de l'invariance vis-à-vis de toutes les transformations de coordonnées de la forme (3). » [Weyl 1922b 73]

Puis il passe à la réciproque :

> Ce théorème admet une réciproque, à savoir :
>
> Si la dérivée d'une forme différentielle Ω est nulle, la forme Ω peut être regardée comme la dérivée d'une forme Π dont le degré est inférieur d'une unité à celui de Ω. [Cartan 1922a 71]

Après une page de démonstration, Cartan glisse la

> Remarque.- Si les coefficients de la forme Ω sont uniformes dans un certain domaine, la condition $\Omega' = 0$ n'est pas toujours suffisante pour assurer l'existence d'une forme Π uniforme dans ce domaine et dont Ω soit la dérivée extérieure. Considérons par exemple le domaine (fermé et sans frontière) à deux dimensions formé par les points d'une sphère Σ, et soit Ω une forme de degré 2 uniforme dans ce domaine (à coefficients admettant des dérivées partielles du premier ordre continu). La dérivée Ω' est manifestement nulle. Néanmoins, s'il existait une forme ω linéaire dont la dérivée ω' fût égale à Ω, on aurait, en intégrant deux fois $\int \omega$ le long d'un même grand cercle de la sphère dans deux sens différents,
>
> $$\iint_{\Sigma} \Omega = 0 ,$$
>
> l'intégrale étant étendue à toute la surface de la sphère. L'équation précédente donne une condition supplémentaire pour que Ω puisse être regardée comme dérivée exacte d'une forme ω uniforme sur toute la sphère. [Cartan 1922a 73]

Nous citions intégralement cette remarque pour souligner plusieurs points. Tout d'abord la parfaite conscience qu'a Cartan de l'existence de contraintes topologiques ; mais aussi l'absence de terme spécifique pour désigner ce type de problème ou, en retour, pour qualifier les énoncés précédents de « locaux ». Cela se comprend dans le cadre mobilisé par Cartan : non pas un couple local/global, mais une remarque sur la question de l'uniformité des fonctions en jeu. Il est aussi significatif que ce point ne soit abordé que sous forme d'une remarque, et ne joue aucun rôle dans la marche de la théorie des invariants intégraux présentée par Cartan. Comme dans le travail des années 1922-1925 sur les connexions, les questions globales sont au delà de l'horizon du questionnement.

Les traits que nous soulignions dans le cas des formes différentielles se retrouvent dans l'exposé du rôle des groupes en géométrie que Cartan rédige, d'après Fano, pour l'édition française de l'*Encyclopädie* [Cartan 1915]. Sur plus de cent pages on ne trouve que trois éléments ayant trait au couple local/global. Dans le paragraphe 2, consacré à la théorie de Lie, Cartan note après avoir introduit les transformations infinitésimales :

> On obtient les transformations finies du groupe (au voisinage de la transformation identique) en effectuant une infinité de fois de suite les transformations infinitésimales. [Cartan 1915 1732][14]

Dans le paragraphe suivant, consacré à la présentation des thèses du Programme d'Erlangen, il conclut sur l'insertion de la géométrie différentielle et de la théorie des invariants différentiels *à la* Lie dans l'édifice des géométries :

> Le point de vue de F. Klein qui vient d'être exposé a l'avantage de mettre en évidence la vraie nature de la *géométrie différentielle* et de montrer que cette géométrie ne s'oppose pas à la géométrie projective ou à la géométrie algébrique. Elle ne s'oppose qu'à la géométrie de l'*espace complet*. De même qu'il y a une géométrie métrique, une géométrie projective, etc. qui traitent des propriétés métriques, projectives, etc. de l'espace pris dans son intégralité, il y a une géométrie différentielle métrique, une géométrie différentielle projective, etc. qui traitent des propriétés métriques, projectives, etc. de l'espace pris au voisinage d'un point. La théorie des invariants différentiels est du domaine de ces géométries différentielles. [Cartan 1915 1737][15]

Ici ce n'est plus le travail local sur l'espace du groupe (transformations voisines de l'identité) mais le travail local sur l'espace des variables transformées qui est commenté. On a vu que cette conception de la géométrie différentielle comme géométrie relative à des familles de difféomorphismes locaux domine encore dans les années 1920. Le même thème est enfin repris au paragraphe 44, consacré aux invariants et invariants différentiels.

> La théorie de S. Lie a l'avantage d'une très grande généralité ; mais, outre l'inconvénient d'exiger des intégrations, elle en a un autre plus grave, c'est de ne résoudre les problèmes relatifs aux invariants que du point de vue des fonctions analytiques. Ses résultats ne se rapportent en général qu'à un certain domaine autour d'un point et ne peuvent pas, à cause de la généralité même de la théorie, être étendus à tout l'espace. En particulier, la théorie de S. Lie ne peut remplacer la théorie *algébrique* des invariants. [Cartan 1915 1845] [16]

La source de cette discussion des mérites respectifs des théories algébriques et différentielles des invariants est citée en note infrapaginale : c'est aux critiques que Study adressait à Lie en

[14] Ce passage est repris sans modification de l'article de Fano.
[15] Ce passage est repris sans modification de l'article de Fano.
[16] Ce passage est un apport original de Cartan, il ne se trouve pas dans l'article de Fano.

1908 que renvoie Cartan[17]. Dans un exposé de synthèse sur la théorie des groupes et la géométrie, Cartan ne peut ignorer ces critiques, et elles sont quasiment reprises telles quelles (la véhémence en moins !) du débat entre Study et Engel. Le caractère local est explicite et rapproché du « point de vue des fonctions analytiques » ; ce point de vue est qualifié de général : on devine que nos auteurs conçoivent que des études du passage au global – conçues classiquement en termes de prolongement analytique et de multivocité – sont possibles mais qu'elles présenteraient une infinité des cas particuliers. Nos auteurs prennent acte du fait que les critiques de Study ont permis de mieux comprendre la nature propre (locale) de la théorie de Lie mais ne voient pas là l'occasion de désigner le dépassement du local comme un champ de recherche autonome et prometteur ; ils se contentent de reconnaître la légitimité d'autres modes de recherche, en particulier la théorie des invariants algébriques. Cette division des tâches avait déjà été évoquée par Felix Klein en 1893 dans ses conférences au congrès de Chicago [Klein 1893 18]

On doit de plus souligner qu'en dehors des trois passages cités, l'exposé est indifférent au couple local/global et rédigé selon le point de vue universellement et implicitement local usuel. On voit que, comme en théorie des formes différentielles, la nature locale des résultats peut ponctuellement être explicitée, sans affecter profondément la construction de tout l'exposé.

2. LE TOURNANT DE 1925

Le cheminement peut sembler paradoxal : en 1924, des questions de géométrie purement infinitésimales amènent Hermann Weyl à examiner la question – purement algébrique – des représentations linéaires des algèbres de Lie simples et semi-simples ; c'est la théorie dont Cartan est le meilleur spécialiste au monde, depuis, en particulier, ses travaux de 1913-1914. C'est pour démontrer une des deux conjectures qu'il formule à leur propos que Weyl introduit, à titre d'outils et d'étapes du raisonnement, des éléments topologiques globaux relatifs aux groupes de Lie. Nous devons donc dans un premier temps entrer un peu dans l'architecture de preuve mise en place par Weyl pour comprendre l'irruption inattendue de questions globales en théorie des groupes de Lie. Weyl décloisonne ici deux théories – celle de l'uniformisation (avec sa notion de revêtement), celle des groupes et algèbres de Lie – dont il s'était déjà rendu maître. Cartan est dans une situation bien différente : il excelle dans

[17] Cette critique fort intéressante [Study 1908] est analysée dans [Hawkins 2000 p.448-450] ainsi que dans [Chorlay 2007 p.379-386] où de larges extraits sont traduits de l'allemand.

plusieurs théories, toutes (implicitement) locales. Sa réaction aux articles de Weyl, prudente dans un premier temps, conduit à la fin de 1925 à un premier petit texte dans lequel les perspectives globales semblent devoir réorganiser complètement l'approche de la géométrie différentielle, dans ses problèmes comme dans son mode d'écriture.

2.1 Introduction de la polarité local – global en théorie des groupes de Lie : Weyl, 1924-1925

Porté par des travaux de géométrie différentielle largement indifférents aux questions globales, Weyl est amené par son analyse du problème de l'espace vers l'étude des algèbres de Lie et de leurs représentations linéaires. Dans une série d'articles de 1924-1925, qui va modifier tout le faciès de la théorie des groupes de Lie [18], il mêle des éléments hérités de différentes traditions de recherche dans lesquels le couple local/global ne jouait pas de rôle central ni explicite, pour livrer un ensemble dans lequel il intervient dans chacune des articulations majeures : lien entre le groupe comme variété et le « groupe » des transformations infinitésimales, question de surjectivité de l'exponentielle, rôle du revêtement universel d'un groupe de Lie donné etc. Non seulement ce travail reprend les notions centrales en 1913, en particulier le revêtement universel, mais c'est explicitement que Weyl emprunte des concepts à la théorie de l'uniformisation.

2.1.1 Des « grandeurs linéaires simples » à la topologie de groupes usuels.

Nous étudions ici deux textes de Weyl, deux communications de 1924 sur *La théorie de la représentation continue des groupes continus simples* [19] et *Le fondement groupe-théorétique du calcul tensoriel* [20] ; nous aborderons au paragraphe suivant le long article publié en plusieurs parties dans *Mathematische Zeitschrift* en 1925 sur la *Théorie de la représentation des groupes continus semi-simples par des transformations linéaires* [21]. Nous centrons l'étude sur la démonstration du théorème de complète réductibilité des représentations linéaires des algèbres de Lie semi-simples, en laissant de côté une large part du travail de Weyl, par exemple celui consacré à la caractérisation des représentations irréductibles, des poids et

---

[18] Nous nous appuyons bien sûr en de nombreux points sur le précieux livre de T. Hawkins sur l'histoire de la théorie des groupes de Lie [Hawkins 2000].

[19] *Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuirlichen Gruppen* [Weyl 1924b]. Nous utilisons la pagination des *Gesammelte Abhandlungen*.

[20] *Das Gruppentheoretisch Fundament der Tensorrechnung* [Weyl 1924a]

systèmes de racines, ou de la détermination explicite des caractères. Nous utiliserons librement le vocabulaire moderne, en parlant par exemple de l'algèbre de Lie plutôt que, comme Weyl encore en 1925, des transformations infinitésimales du groupe ; nous suivons par contre certaines notations de Weyl, qui n'utilise pas systématiquement la convention consistant à utiliser la même lettre en majuscule et en minuscule pour un groupe de Lie et son algèbre de Lie, ce qui crée une petite difficulté pour le lecteur inattentif. Commençons, par le cas du groupe spécial linéaire.

Weyl expose le motif initial de son intérêt pour la théorie de la représentation linéaire des groupes et algèbres de Lie par son rôle dans ce qu'il nomme le « fondement du calcul tensoriel » ; suivons-le. Soit **r** un espace « affine centré » *r*-dimensionnel, soumis au groupe **g** (= Sl(n,**C** ou **R)**) des transformations linéaires de déterminant 1 ; un système de nombres a_1, a_2, …,a_N dépendant du choix de la base dans **r** est le système des composantes d'une « grandeur linéaire » (*lineare Größe*) si tout changement de base t dans **r** induit une transformation linéaire T en les N composantes. $t \to T$ détermine une « représentation » (*Darstellung*) de **g** en un groupe **G** de transformations linéaires – Weyl parle de groupes « isomorphes » ; il s'agit encore d'isomorphismes mériédriques ou, dans le vocabulaire actuel, d'homomorphismes de groupes. Les grandeurs linéaires peuvent donc être vues géométriquement comme des « vecteurs » (*Vektoren*) dans l'espace image ***R***. Weyl définit ensuite la notion de représentations équivalentes (i.e. $T^* = A^{-1}TA$, où A est une transformation linéaire inversible de ***R*** fixée une fois pour toute) et fait le lien avec la notion d' « orientation » qu'il avait utilisée dans son analyse du problème de l'espace. Viennent ensuite les notions de représentation irréductible (aucun sous-espace vectoriel strict de ***R*** n'est stable sous l'action de **G**) ou « grandeur linéaire simple », de somme de représentations et de « composition » (produit tensoriel) de représentations : la première conjecture est que toute grandeur linéaire est décomposable (de manière unique) en somme de grandeurs simples indépendantes, ou que toute représentation linéaire du groupe spécial linéaire est somme de représentations irréductibles (théorème de réductibilité complète pour ce groupe) [Weyl 1925 545]. Ces éléments issus de la théorie classique de la représentation linéaire ne suffisent pas à formuler la question exacte du fondement du calcul tensoriel. En effet, fait remarquer Weyl, les grandeurs linéaires qui se présentent en physique sont des tenseurs (soumis donc aux représentations linéaires composées de $\mathbf{g}^n$ et de puissances de la représentation

[21] *Theorie der Darstellung kontinuirlicher halbeinfacherGruppen durch lineare Transformationen* [Weyl 1925].

contragrédiente associée) soumis à des conditions de symétrie : outre le nombre de composantes, ce sont les conditions de symétries qui définissent un type de grandeur (*Größenart*) linéaire [Weyl 1924a 461], conditions de symétries qui renvoient elles-mêmes à la théorie de Frobenius des représentations linéaires des groupes de symétrie S_n. Chaque type de tenseur détermine donc une représentation linéaire de **g**, et la deuxième conjecture fondamentale est qu'il n'existe d'autres grandeurs linéaires que les tenseurs [Weyl 1925 546]. Pour démontrer la validité des deux conjectures, Weyl va nouer ensemble différents « fils » [Weyl 1925 547], celui de la théorie des Frobenius-Young[22], celui de la théorie de Cartan des représentations irréductibles des algèbres de Lie semi-simples, celui enfin de la méthode de formation d'invariants par intégration sur un groupe de Lie ; cette méthode, inaugurée par Hurwitz [Hurwitz 1897], Weyl l'apprend dans les publications de Schur du début des années 20.

La gageure consiste dans le rapprochement des aspects algébriques (i.e. infinitésimaux) et topologiques, étudiés jusque là indépendamment. Bien que faisant le lien avec la théorie de Lie, Hurwitz n'utilise pas la stratégie fondamentale consistant traduire le problème de groupe en un problème d'algèbre de Lie : la méthode d'intégration ne travaille qu'au niveau du groupe, dont la compacité garantit le bon comportement comme domaine d'intégration. Cette méthode de formation d'invariants par intégration permet, en formant dans l'espace sur lequel le groupe agit linéairement un produit scalaire invariant ; un éventuel sous-espace linéaire invariant sous l'action du groupe possède alors un canoniquement un supplémentaire invariant, son orthogonal : on obtient ainsi le théorème de complète réductibilité [Weyl 1925 559 et suiv.]. On voit que la compacité est le ressort essentiel de la démonstration du résultat algébrique ; on doit donc utiliser le groupe et en aucun cas son algèbre de Lie – jamais compacte. Cartan, de son côté, étudie le problème de la représentation linéaire des algèbres de Lie, ce que Weyl peut qualifier indifféremment de point de vue infinitésimal et de question purement algébrique :

> Si, avec Lie, on ramène les groupes continus à leurs transformations infinitésimales, le problème général de la représentation linéaire se formule ainsi : les éléments d'un groupe infinitésimal forment une variété vectorielle linéaire, dans laquelle est définie une « multiplication-commutateur » distributive [ab] satisfaisant aux règles de calcul :
>
> $$[ba] = - [ab] \, ; \qquad [[ab]c] + [[bc]a] + [[ca]b] = 0.$$

[22] Nous laissons ce point de côté dans notre présentation, il est sans lien direct avec notre problème.

Lorsque les éléments sont des matrices, on doit poser [ab] = ab – ba. On doit associer à chaque élément *a* d'un groupe infinitésimal donné une matrice A : $a \rightarrow A$, de sorte qu'en partant de $a \rightarrow A$ et $b \rightarrow B$, aux éléments λa (λ un nombre), a+b et [ab] correspondent les matrices λA, $A+B$, [*AB*]. C'est donc une question purement algébrique [*Es handelt sich also um reine Algebra*]. [Weyl 1924a 462][23]

Weyl rappelle la solution algébrique de Cartan – en la rapprochant des travaux de Frobenius-Young – sur la détermination des représentations linéaires irréductibles des algèbres de Lie semi-simples ; ces travaux établissent la validité de la seconde conjecture, toutes les représentations irréductibles de l'algèbre de Lie du groupe spécial linéaire étant de type tensoriel (au sens que Weyl donne à ce terme). Il reste à franchir le fossé séparant les résultats infinitésimaux de classification et les résultats obtenus par la méthode « transcendante d'intégration » [Weyl 1925 559] ; il faut donc pouvoir faire des allers-retours entre représentations linéaires d'un groupe (ici le groupe spécial linéaire) et représentations linéaires de son algèbre, et Weyl identifie ici une difficulté qui n'apparaissait dans aucune des études se limitant à l'un des deux niveaux. Il la présente rapidement dans la note des *Göttinger Nachrichten*, après réduction unitaire :

Je pars du groupe infinitésimal $\mathbf{g}$ (à n dimensions) et de sa représentation γ (à N dimensions). D'après l'idée fondamentale de Hurwitz on ne considère tout d'abord dans le groupe $\mathbf{G}$ que le groupe $\mathbf{G_u}$ des transformations unitaires de déterminant 1. Le groupe infinitésimal associé $\mathbf{g_u}$ est formé de toutes les matrices (α_{ik}) pour lesquelles

$$\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0 , \qquad \Sigma_i \alpha_{ii} = 0.$$

A partir des opérations du groupe infinitésimal $\boldsymbol{\gamma_u}$, correspondant à la partie $\mathbf{g_u}$ de $\mathbf{g}$, on obtient d'après Lie une représentation $\mathbf{\Gamma_u}$ de tout le groupe continu $\mathbf{G_u}$. Il reste à se demander si la variété $\mathbf{\Gamma_u}$ recouvre la variété $\mathbf{G_u}$ une fois, ou plusieurs fois – peut-être une infinité de fois ; dans ce dernier cas, la méthode de Hurwitz serait en échec, car $\mathbf{\Gamma_u}$ ne serait pas une figure fermée. [Weyl 1924a 464][24]

---

[23] « *Führt man die kontinuirlichen Gruppen mit Lie auf ihre infinitesimalen Operationen zurück, so formuliert sich das Darstellungsproblem allgemein folgendermaßen : die Elemente einer inf. Gruppe bilden eine lineare Vektormannigfaltigkeit, innerhalb deren eine distributive « kommutator-Multiplikation » [ab] erklärt ist, welche den Rechnenregeln genügt :* [ba] = - [ab] ; [[ab]c] + [[bc]a] + [[ca]b] = 0. *Sind die Elemente Matrizen, so ist [ab] = ab-ba zu setzen. Es soll jedem Elemente a einer gegebenen inf. Gruppe eine Matrix A so zugeordnet werden :* $a \rightarrow A$*, daß allgemein auf Grund von* $a \rightarrow A$*,* $b \rightarrow B$ *den Elementen* λa *(*λ *eine Zahl), a+b, [ab] die Matrizen* λA*, A+B, [AB] korrespondieren. Es handelt sich also um reine Algebra.* »

[24] « *Ich gehe aus von der inf. Gruppe* $\mathbf{g}$ *(in n Dimensionen) und ihrer Darstellung* γ *(in N Dimensionen). Nach dem Grundgedanken von Hurwitz betrachtet man innerhalb G zunächst nur die Gruppe* G_u *der unitäre Transformationen von der Determinante 1. Die zugehörige inf. Gruppe* g_u *besteht aus allen Matrizen (*α_{ik}*), für welche* $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$ *,* $\Sigma_i\ \alpha_{ii} = 0$ *ist. Aus den Operationen der inf. Gruppe* γ_u*, welche innerhalb* γ *dem Ausschnitt*

La formulation est ici un peu archaïque : $\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{u}}$ (resp. $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{u}}$) désigne les images de $\mathbf{g}_{\mathbf{u}}$ (resp. $\mathbf{G}_{\mathbf{u}}$) dans $\mathbf{gl}(n,\mathbf{C})$ (resp. $\mathbf{Gl}(n,\mathbf{C})$) ; le passage de $\mathbf{g}_{\mathbf{u}}$ à $\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{u}}$ est univoque, mais, nous dit Weyl, pas nécessairement le passage induit de $\mathbf{G}_{\mathbf{u}}$ à $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{u}}$, c'est cette association de plusieurs éléments de $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{u}}$ à un même élément de $\mathbf{G}_{\mathbf{u}}$ que Weyl décrit dans le langage du 19e siècle comme un recouvrement (*a priori* en un sens informel du terme) à un nombre éventuellement infini de feuillets. Weyl est un peu plus explicite en 1925, expliquant qu'une représentation linéaire de l'algèbre du groupe n'induit de représentation (univoque) du groupe que sur un voisinage de l'élément neutre, représentation dont le prolongement à tout le groupe peut faire apparaître un problème de multiformité. Les notations ont changé : les groupes sont désignés par les **g**, leurs algèbres de Lie par les **g°** :

> A partir d'une représentation du groupe infinitésimal $\mathbf{g}_{\mathrm{u}}°$ à n^2-1 paramètres réels on obtient par intégration, suivant Lie, la matrice associée *T* pour tous les *t* de $\mathbf{g}_{\mathbf{u}}$ appartenant à un certain *voisinage* [*Umgebung*] de l'élément unité *e*. Mais si l'on choisit un t_0 dans ce voisinage, on peut prolonger la représentation au voisinage de t_0 sur lequel est appliqué le voisinage initial par la translation de *e* vers t_0. On voit bien que le *processus de prolongement* à itérer ne rencontre jamais de frontière ; mais *T* n'est pas nécessairement univoque sur $\mathbf{g}_{\mathbf{u}}$, mais seulement sur une « *figure de recouvrement* » [*Überlagerungsgebilde*] se prolongeant sans ramification ni frontière au dessus de $\mathbf{g}_{\mathbf{u}}$. Je dit d'une figure qu'elle est *simplement connexe* si toute courbe continue fermée peut, sur elle, être continûment contractée en un point. La plus forte des figures de recouvrement non-ramifiées non-limitées au dessus d'une figure donnée (la « surface de revêtement universel », qui joue un si grand rôle en théorie de l'uniformisation) est simplement connexe. Cette figure de recouvrement universelle $\mathbf{g}_{\mathbf{u}}$***** au dessus de $\mathbf{g}_{\mathbf{u}}$ est le véritable groupe abstrait dont on étudie les représentations ; $\mathbf{g}_{\mathbf{u}}$ n'est qu'*une* de ses représentations, et en vérité une représentation raccourcie et non homomorphe lorsque la figure de revêtement est à plusieurs feuillets. [Weyl 1925 560][25]

---

g_u aus g entspricht, erhält man nach Lie eine Darstellung Γ_u der ganzen kontinuirlichen G_u. Doch bleibt zunächst fraglich, ob Γ_u die Mannigfaltigkeit G_u einfach oder mehrfach, vielleicht unendlich-vielfach bedeckt ; im letzten Fall würde die Hurwitz'sche Methode versagen, da dann Γ_u kein geschlossenes Gebilde wäre. »

[25] « *Aus einer Darstellung der infinitesimalen Gruppe $g_u°$ von n^2-1 reellen Parametern erhält man durch Integration nach Lie die zugeordnet Matrix T für alle diejenige t von g_u, welche einer gewissen* Umgebung *des Einheitselements e angehören. Aber wählt man ein t_0 in dieser Umgebung, so kann man die Darstellung fortsetzen auf diejenige Umgebung von t_0 in welche die erste Umgebung durch die Translation von e nach t_0 übergeht. Der zu iterierende* Prozeβ der Fortsetzung *stößt offenbar niemals gegen eine Grenze ; aber T braucht nicht auf g_u eindeutig zu sein, sondern erst auf einem «* Überlagerungsgebilde *», das sich unverzweigt und unbegrenzt über g_u hinzieht. Ich nenne eine Gebilde* einfach zusammenhängend, *wenn sich auf ihn jede*

La formulation précise du problème fait donc apparaître une tension entre le local – existence d'une représentation univoque d'un voisinage de *e* relevant la représentation de l'algèbre de Lie – et le global ; la formulation classique en termes de prolongement fait naturellement apparaître les revêtements. Weyl est encore ici bien allusif, il laisse par exemple au lecteur le soin d'expliciter la structure de groupe sur le revêtement universel d'un groupe de Lie ; il ne distingue guère ce qui relève de la simple structure de groupe – par exemple les liens qu'entretiennent un groupe de Lie, son revêtement universel et son algèbre de Lie – et ce qui a trait au problème de la représentation linéaire. Notons aussi que ce n'est pas le couple « *im Kleinen / im Grossen* » qui est ici mobilisé : le passage initial de l'infinitésimal au fini résulte d'une « intégration » ; aucun terme ne vient désigner ce que nous nommons l'application exponentielle et son caractère d'homéomorphisme local. L'intervention du revêtement universel n'est pas commentée dans l'article de 1925, mais elle l'était en 1924 ; là non plus ce n'est pas le couple local/global qui qualifie une articulation jusque-là ignorée dans la théorie, mais le couple algèbre / *Analysis situs* : au caractère « purement algébrique » du problème de la représentation linéaire des algèbres de Lie fait écho, quelques lignes plus loin, « L'*Analysis situs* joue ici un rôle décisif. » [Weyl 1924a 464][26]. Le point central est toutefois acquis sans ambiguïté et modifie toute la structure de la théorie des groupes de Lie : les allers-retours entre le groupe et son algèbre ne sont plus des opérations transparentes ; la transparence n'est que locale, et les considérations globales font apparaître un autre groupe, le revêtement universel du premier. On voit la question topologique s'enrichir peu à peu : dans un premier temps, seule la compacité jouait un rôle ; la question de la compacité du revêtement universel d'un groupe de Lie compact fait ensuite intervenir ce que Hurwitz nommait les « *zusammenhangsverhähltnisse* » sans en avoir, en 1897, l'usage. Si l'on particularise au problème des représentations linéaires, l'aller-retour entre groupe et algèbre montre qu'il y a (en général) plus de représentations linéaires (univoques) pour l'algèbre que pour le groupe de départ ; quand bien même un théorème de complète réductibilité des représentations linéaires serait valide pour le groupe, il ne s'étendrait pas *immédiatement* à l'algèbre.

Une fois la problématique générale mise au jour, il reste à étudier le cas particulier ici en jeu, celui des représentations linéaires de l'algèbre $\mathbf{sl}(n,\mathbf{C})$. Weyl démontre alors la simple

---

geschlossene stetige Kurve stetig in einen Punkt zusammenziehen läßt. Das stärkste unverzweigte unbegrenzte Überlagerungsgebilde (die « universelle Überlagerungsfläche », welche in der Uniformisierungstheorie eine so große Rolle spielt) über einem gegebenen Gebilde ist einfach zusammenhängend. Diese universelle Überlagerungsgebilde g_u* *über* g_u *ist erst die wahre abstrakte Gruppe, um deren Darstellungen es sich handelt ;* g_u *ist nur eine ihrer Darstellungen, und zwar eine verkürzte, nicht-homomorphe, wenn das Überlagerungsgebilde mehrblättrig ist.* »

[26] « *Die Analysis situs spielt hier eine entscheidende Rolle.* »

connexité de $\mathbf{g_u} = \mathbf{Sl}(n,\mathbf{C})$ en écrivant les éléments sous la forme $u^{-1}\varepsilon u$, où u est un élément de $\mathbf{g_u}$ et ε une matrice diagonale : l'idée est donc ici encore d'utiliser une représentation paramétrique par les « angles » apparaissant dans la matrice ε. La non unicité de cette représentation le long d'un chemin fermé nécessite une étude plus détaillée au voisinage des matrices singulières, dans lesquelles les valeurs propres ne sont pas toutes distinctes. Nous n'entrons pas plus avant dans les arguments de Weyl, lui-même étant assez allusif : il nous suffit de connaître les grandes lignes d'un raisonnement que nous verrons repris à un niveau d'abstraction plus élevé dans le cas des algèbres semi-simples abstraites. Avant de passer à un cas si général, Weyl indique dès 1924 la généralisation de sa démonstration aux classes usuelles de groupes semi-simples, celle du groupe complexe (« *Komplexgruppe* ») des transformations linéaires complexes conservant une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée ($\mathbf{Sp}(n,\mathbf{C})$ donc) et celle du groupe des rotations (« *Drehungsgruppe* ») en un nombre pair ou impair de variables, transformations linéaires complexes conservant une forme quadratique non dégénérée ($\mathbf{SO}(n,\mathbf{C})$ donc). Dans chacun des cas, l'étude s'articule en deux temps très nets, une partie infinitésimale (« *infinitesimaler Teil* ») suivie d'une étude intégrale (« *integraler Teil* »). Dans le cas des groupes de rotations, l'analogue de la réduction unitaire amène à considérer les groupes réels $\mathbf{SO}(n,\mathbf{R})$, compacts, dont Weyl montre qu'ils ne sont pas simplement connexes mais que leur revêtement universel n'est qu'à deux feuillets (pour $n\geq 3$) : la compacité est donc préservée [Weyl 1924a 466]. Le cas de $\mathbf{SO}(2,\mathbf{R})$ illustre le rôle de la topologie dans les questions de réductibilité des représentations linéaires. Ce groupe étant homéomorphe au cercle, son revêtement universel n'est pas compact, ce qui interdit d'utiliser la méthode intégrale de formation d'invariants. Weyl montre qu'il ne s'agit pas là d'un simple obstacle technique interne à la démonstration : le résultat de complète réductibilité n'est en fait pas valide pour cette algèbre de Lie. Si T est un générateur de cette algèbre (qui est une droite vectorielle réelle), alors T $\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une représentation possédant un sous-espace invariant, mais non décomposable en somme de deux représentations irréductibles. [Weyl 1925 562]

2.1.2 Le cas général : représentations linéaires des algèbres semi-simples.

Dans les chapitres 3 et 4 de l'article de 1925-26, Weyl entreprend d'étendre le théorème de complète réductibilité aux représentations de toutes les algèbres de Lie semi-simples (complexes), en suivant le modèle donné par les quatre cas étudiés précédemment. Nous reprenons ici les conventions usuelles, en désignant les groupes par des majuscules et les algèbres par des minuscules. Weyl peut ici encore s'appuyer sur les résultats de Cartan sur la structure des algèbre semi-simples, résultats qu'il reformule au passage : son chapitre 3 y est consacré ; cette étude purement algébrique ne nous concerne pas directement. Une première difficulté de cette généralisation tient à ce que, contrairement aux cas étudiés précédemment, les algèbres de Lie ici considérées ne sont plus données comme algèbres de groupes, de groupes linéaires qui plus est. Weyl y supplée en utilisant la représentation adjointe, qui est un isomorphisme d'algèbre de Lie dans le cas semi-simple : **g** est donc identifiée à la sous-algèbre **ad**(**g**) de l'algèbre des transformations linéaires de **g**. L'existence, établie par Cartan dans sa thèse, de « formes réelles » des algèbres semi-simples complexes joue le rôle de la réduction unitaire. Cartan a de plus montré que le groupe adjoint conserve naturellement une forme quadratique sur **g** [27], qui est de plus définie négative dans le cas semi-simple ; travaillant avec la forme de Killing plutôt qu'avec la forme ψ_2 de Cartan, c'est une forme définie positive que Weyl utilise. Après ce chapitre 3, Weyl peut reprendre dans le cas général d'une algèbre semi-simple le jeu d'allers et retours : il faudra lui associer un groupe linéaire, étudier la compacité de ce groupe ainsi que le lien qu'il entretient avec son revêtement universel [28] … le programme n'est pas mince et va faire apparaître de nouvelles considérations topologiques, en particulier sur le comportement de la fonction exponentielle ou la répartition des éléments singuliers dans la variété du groupe ; autant d'éléments nouveaux qui font ressortir le caractère fondamental des études globales de la variété du groupe. Le chapitre 4 s'ouvre ainsi :

> Que **a**° désigne un groupe infinitésimal semi-simple à *r* paramètres, $\mathbf{a_u}$° le groupe infinitésimal obtenu à partir du premier par la « restriction unitaire » définie à la fin du chapitre précédent. Les transformations linéaires infinitésimales $dx = [ax]$ adjointes à leurs éléments *a* engendrent [*erzeugen*] un groupe continu de transformations linéaires

---

[27] rappelons-en brièvement la définition, chez Cartan : si $t \in \mathbf{g}$, considéré comme opérateur linéaire sur **g** (par $t \to (u \to [tu])$), on peut former son polynôme caractéristique $\det (t - \lambda I) = \lambda^n - \psi_1(t) \lambda^{n-1} + \psi_2(t) \lambda^{n-2} + \dots$, Si l'on choisit une base de **g**, on montre que ψ_i est un polynôme homogène en les composantes de *t*, invariant sous l'action de **g** ; ψ_2 est en particulier une forme quadratique invariante. Weyl préfère à ψ_2 la « forme de Killing », $K(t) = \mathrm{tr}(t \circ t)$, liée à la forme de Cartan par $\psi_1^2 = K + 2\psi_2$

[28] Weyl ne parle pas en 1925 de groupe de Poincaré, nous restons proches de ses formulations.

$\tilde{\mathbf{a}}$ (resp. $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$). Puisqu'à $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$ est associée, par la proposition 6 du chapitre III, une forme quadratique définie invariante, $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$ est une *figure fermée*. [Weyl 1925 629][29]

La reconstitution d'un groupe continu à partir d'une algèbre de matrices, fût-elle rendue possible par la présence du groupe ambiant **Gl(g)**, est évoquée pour le moins rapidement. Weyl passe rapidement sur ce point, ce paragraphe introductif étant destiné traduire en termes de transformations finies les résultats sur la structure des algèbre semi-simples. Weyl déroule pour cela « à l'envers » les définitions des représentations adjointes d'un groupe de Lie et de son algèbre qui ouvraient le chapitre 3. Rappelons-en les principaux éléments, en restant fidèle aux formulations de Weyl : parlant comme Lie de tout groupe comme d'un groupe agissant sur un ensemble, il associe à tout groupe de transformations son « groupe adjoint », le groupe agissant sur lui-même par conjugaison. Cette action induit une représentation linéaire du groupe sur ses transformations infinitésimales : la conjugaison par T transformait un élément X du groupe en X' = $T^{-1}XT$, elle transforme un élément infinitésimal x en l'infinitésimal $x' = T^{-1}xT$ [30]. Cette représentation linéaire du groupe induit une représentation linéaire de son groupe infinitésimal donnée par $t \rightarrow [tx]$ [31]. Le début du chapitre 4 relit ces associations à rebours, sans s'attarder sur les questions de passage du local au global mais en s'attachant à illustrer la spécificité des algèbre semi-simples. Ici les éléments notés h appartiennent à une sous-algèbre résoluble maximale **h** [32] :

> L'élément infinitésimal $h = h(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ du groupe adjoint confère à un élément arbitraire
>
> $$x = h(\kappa_1,\kappa_2, \ldots,\kappa_n) + \Sigma_\alpha \tau_\alpha e_\alpha$$
>
> de **a°**, de « paramètres principaux » κ_i et de « paramètres secondaires » τ_α, l'accroissement $dx = [hx]$ donné par les formules

---

[29] « **a°** *bedeutet eine infinitesimale halb-einfache Gruppe von r Parametern,* $\boldsymbol{a_u}$° *dijenige infinitesimale Gruppe, welche aus ihr durch die am Schluss des Vorigen Kapitels gekennzeichnete « unitäre Beschränkung » hervorgeht. Die zu ihrem Elementen* a *adjuntierten infinitesimalen linearen Transformationen dx = [ax] erzeugen eine kontinuirliche Gruppe linearer Transformationen* $\tilde{\mathbf{a}}$ *bzw.* $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$. *Da zu* $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$ *nach Kapitel III, Satz 6, eine invariante definirte quadratische Form gehört, ist* $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$ *eine* geschlossenes Gebilde. »

[30] En formulation contemporaine : en identifiant l'algèbre de Lie **g** du groupe **G** à l'espace tangent en l'identité $\mathbf{1_G}$, l'action de **G** sur **g** est définie par la différentielle en $\mathbf{1_G}$ de la conjugaison ; Ad : $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{Gl(g)}$ $T \rightarrow Ad(T) = d_{\mathbf{1G}}(X \rightarrow T^{-1}XT)$.

[31] En différenciant Ad en $\mathbf{1_g}$ on obtient ad : $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{gl(g)}$ $t \rightarrow (x \rightarrow [tx])$.

[32] Suivant la présentation de la thèse de Cartan, Weyl obtient une telle algèbre en considérant le noyau de ad t_0 pour un élément t_0 de **g** choisi en position générale, c'est-à-dire ayant un nombre maximal de racines distinctes. [Weyl 1925 609]. Le théorème de structure des algèbres semi-simple montre, entres autres, que la restriction du crochet à **h** est nulle, et qu'il existe une base e_α d'un supplémentaire de **h** formée de vecteurs propres pour tout $h \in \mathbf{h}$. C'est ce résultat que Weyl rappelle ici. [Weyl 1925 618]

$d\kappa_i = 0$ ($i = 1,2,\ldots,n$), $d\tau_\alpha = \alpha\, \tau_\alpha$. [Weyl 1925 629][33]

On remonte ensuite dans le groupe fini :

> La transformation finie (ε) de $\tilde{\mathbf{a}}$ qui en résulte par itération :
>
> $$x' = (\varepsilon)x(\varepsilon)^{-1}, \qquad (1)$$
>
> qu'il sera commode de noter e^h, s'exprime dans ces paramètres par
>
> $$\kappa_i' = \kappa_i, \qquad \tau_\alpha' = e^{\alpha}.\tau_\alpha. \qquad (2).$$
>
> Les « éléments principaux » (ε) forment un sous-groupe abélien à *n* paramètres de $\tilde{\mathbf{a}}$. [Weyl 1925 629][34]

Les paramètres α sont imaginaires purs lorsque (ε) appartient à $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$, leur partie imaginaire est l'analogue des « angles » servant à paramétrer les rotations dans les cas usuels.

Si, jusqu'ici, la rapide mise en place des liens entre transformations infinitésimales et transformations finies ne se soucie pas d'articuler explicitement les aspects locaux et globaux, les étapes suivantes – nature du revêtement universel, expression de la mesure invariante sur le groupe – reposent sur un théorème de représentation qui demande à être établi avec soin :

> **Proposition 1**. *Chaque élément t de* $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$ *peut se mettre sous la forme*
>
> $$t = u^{-1}\,(\varepsilon)\, u \qquad (3)$$
>
> *où u, de même que l'élément principal* (ε)*, appartiennent tous deux à* $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$.
>
> Dans les cas particuliers traités dans les chapitres I et II, cette proposition recouvrait des vérités algébriques bien connues. On doit ici la fonder en toute généralité au moyen de la méthode de continuité [*der Kontinuitätsmethode*], par ces mêmes calculs qui nous ont servi plus haut à la détermination du volume. [Weyl 1925 629][35]

Le parallèle avec la « méthode de continuité » de Poincaré en théorie de l'uniformisation des fonctions algébriques est double. Premièrement il s'agit d'une preuve par la topologie d'une vérité qui apparaît algébrique ou analytique. Il s'agit aussi, au niveau plus technique, de

---

[33] *« Das infinitesiale Element $h = h(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ der adjuntierte Gruppe erteilt dem willkürlichen Element $x = h(\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_n) + \Sigma_\alpha \tau_\alpha e_\alpha$ von* ***a***° *mit den « Hauptparametern » κ_i und den « Nebenparametern » τ_α den Zuwachs $dx = [hx]$, der sich aus den Formeln ergibt : $d\kappa_i = 0$ ($i = 1,2,\ldots,n$), $d\tau_\alpha = \alpha\, \tau_\alpha$. »*

[34] *« Die daraus durch Iteration entstehende endliche Transformation (ε) von* $\tilde{\mathbf{a}}$ *: $x' = (\varepsilon)x(\varepsilon)^{-1}$ (1), die man zweckmässig durch e^h bezeichnet, lautet daher, in den Parameter ausgedrückt : $\kappa_i' = \kappa_i$, $\tau_\alpha' = e^{\alpha}.\tau_\alpha$. (2). Die « Hauptelemente » (ε) bilden eine n-parametrige Abelsche Untergruppe in* $\tilde{\mathbf{a}}$ *. »*

[35] « Satz 1. Jedes Elemente t von $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$ läβt sich in der Form bringen $t = u^{-1}(\varepsilon)u$ (3), wo u sowohl wie das Hauptelement (ε) gleichfalls zu $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$ gehören. *In den Kapitel I und II behandelten Sonderfällen traf dieser Satz mit bekannten algebraischen Tatsachen zusammen. Hier soll er allgemein mittels der Kontinuitätsmethode durch die gleichen Rechnungen begründet werden, die uns früher zur Volumenbestimmung dienten. »*

reprendre des arguments topologiques permettant d'établir la surjectivité d'une application abstraite. Weyl commence par calculer le déterminant de l'application qui à u et ε associe $u^{-1}(\varepsilon)u$ et il montre qu'il est non singulier si (ε) ne l'est pas au sens suivant : aucun des e^{α} n'est égal à 1, autrement dit aucune des « rotations » n'est un tour complet. Il en déduit que, lorsque u varie librement et que ε varie parmi les éléments principaux non-singuliers, les $u^{-1}(\varepsilon)u$ forment un « domaine » (*Gebiet*) **T**, nous dirions un ouvert. Puisque $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$ est fermé, les éléments au bord de **T** sont de la forme $u^{-1}(\varepsilon)u$ lorsque ε est singulier [36]. Weyl établit ensuite que ce bord **t** est de codimension 3 dans $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$, donc ne le déconnecte pas : il remarque que la multiplicité des ε singuliers est à n-1 dimensions, et que si ε est un élément singulier fixé, l'ensemble des u donnant le même $u^{-1}(\varepsilon)u$ dépend de deux paramètres indépendants [Weyl 1925 630]. Weyl ne détaille pas la fin du raisonnement sur le lien entre les parties **T, t** et le groupe $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$, l'appellation de « méthode de continuité » devant peut-être renvoyer le lecteur à un type de raisonnement connu.

Ce résultat de représentation des éléments de $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$ sous la forme $u^{-1}(\varepsilon)u$ permet d'établir que le revêtement universel de $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$ n'est qu'à un nombre fini de feuillets. Weyl l'obtient en montrant que le nombre de classes d'homotopie à extrémités fixes de chemins fermés de $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$ est fini. Les arguments sont ici encore plus laconiques que dans la démonstration du résultat précédent, et Hawkins doit s'appuyer sur un cours ultérieur de Weyl pour les reconstituer ; au cœur de l'argument, l'idée que le parcours d'un chemin fermé dans $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$ (ne rencontrant pas le lieu singulier), les « angles » paramétrant ε ne sont pas nécessairement ramenés à leur valeur initiale, mais que, la liste des valeurs propres revenant à la liste initiale, ces angles ne peuvent connaître qu'une permutation : il y a donc au plus (r-n) ! feuillets, où r est le nombre total de paramètres et n la dimension de **h** [Weyl 1925 632]. Weyl peut en déduire la compacité du revêtement universel de $\tilde{\mathbf{a}}_{\mathbf{u}}$ donc, après *unitarian trick*, la complète réductibilité de toute représentation linéaire d'une algèbre de Lie semi-simple (complexe) **a°** [Weyl 1925 633].

Relevons que, lorsque Weyl introduit en théorie des groupes de Lie les revêtements ou les preuves « par continuité », il marque explicitement qu'il s'agit là d'un emprunt à la théorie des fonctions algébriques – plus précisément à la théorie de Riemann puis Poincaré empruntant les voies topologiques plutôt que purement algébriques, de ce que Weyl désigne

---

[36] Weyl l'affirme sans démonstration. Un argument élémentaire est donné par Hawkins , repris d'un article de Cartan que nous présentons plus loin [Hawkins 483].

de façon générale comme la théorie de l'uniformisation. Cette théorie demeure en 1925 chez Weyl l'archétype des théories globales, par ses concepts comme par ses méthodes. On voit Weyl beaucoup plus allusif sur les aspects plus classiquement issus de la théorie de Lie, qui sont souvent repris sans grande modification ; ainsi Weyl peut-il continuer à parler de l'application exponentielle comme du résultat de l'itération des transformations infinitésimales. Ce double standard se comprend en tenant compte du genre du texte : dans cet article de recherche, les concepts et méthodes sont introduits à mesure que s'emboîtent les éléments d'une imposante démonstration ; ce n'est pas le lieu d'un travail de réécriture didactique de tout l'édifice de la théorie des groupes et algèbres de Lie : virtuosité d'un cheminement hybride et non refondation.

Comme nous le notions plus haut, la rencontre entre des problématiques issues de la théorie des groupes de Lie – au sens où elle reposent de manière essentielle sur l'aller-retour entre groupe et algèbre – et des outils – plus généralement des modes de pensée – issus de la théorie de l'uniformisation fait émerger en théorie des groupes de Lie des articulations jusque là non pertinentes. Que la théorie de Lie fut locale, on a vu Engel, Study ou Cartan le rappeler à l'occasion : cela limitait certes *a priori* le champ des applications et invitait à la prudence dans chaque cas particulier … rien qui engage toutefois la structure interne de l'édifice. Par ailleurs, les travaux de Hurwitz faisaient, eux, intervenir les aspects globaux du groupe, mais sans qu'un lien pertinent avec l'algèbre de Lie ne se dessine. Si le travail de Weyl modifie le faciès de la théorie c'est que les aspects globaux relatifs à la variété du groupe (*Gruppenmannigfaltigkeit*) – compacité puis, par ricochet, groupe de Poincaré – deviennent pertinents dans un problème qui semble relever de la pure algèbre des « groupes » de transformations infinitésimales. Le caractère purement local de la transparence de l'aller-retour entre groupe et algèbre n'était pas fondamentalement *ignoré* mais il n'était pas fondamentalement *pertinent* ; il l'est devenu.

2.2 La réaction de Cartan

2.2.1 Une réponse au travail de Weyl sur le « fondement du calcul tensoriel »

Élie Cartan fait paraître en mai 1925 dans le Bulletin des Sciences Mathématiques un article sur *Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples* [Cartan 1925d] dans lequel il démontre le théorème de réductibilité complète des représentations linéaires des « groupes » (i.e. algèbres) de Lie semi-simples. Le lien avec les travaux de Weyl n'est pas ambigu : ce sont les deux articles de 1924 sur *le fondement groupe-théorétique du calcul tensoriel* et *sur la théorie de la représentation linéaire des groupes simples* qui motivent la réponse de Cartan ; son article est par contre publié avant le grand article de Weyl 1925 sur la représentation linéaire des groupes semi-simples, comme une note nous l'apprend :

> D'après les indications qu'il a bien voulu me donner, M. H. Weyl publiera prochainement dans la *Math. Zeitschrift* plusieurs mémoires sur la théorie des groupes continus ; ils contiendront en particulier une démonstration générale du théorème de réductibilité complète avec le même point de départ que celle qui fait l'objet du présent article. [Cartan 1925d 533]

Ce « point de départ » étant les résultats de Cartan sur la structure générale des algèbres semi-simples, et non seulement des algèbres de quatre grandes classes de tels groupes.

Après un rappel sur la question de la réductiblité des représentations linéaires et la notion de tenseur irréductible, Cartan résume ce qu'il retient de Weyl : tout d'abord la technique de Hurwitz de formation d'invariants, en particulier de formes quadratiques invariantes, par intégration par rapport « à un élément de volume qui se conserve par une transformation quelconque du groupe des paramètres », intégration possible pour les groupes continus « dont le domaine est fermé et de volume total fini » [Cartan 1925d 532] ; ensuite :

> On pourra donc démontrer par exemple que tout groupe linéaire à paramètres réels isomorphe au groupe d'une forme de Hermite définie laissera invariante une forme de Hermite définie, à condition que le domaine (des paramètres) du premier groupe *ne recouvre pas une infinité de fois* le domaine du second : c'est la méthode de M. H. Weyl, qui démontre, par des considérations d'*Analysis situs* appliquées au domaine du second groupe, que le domaine du premier ne peut recouvrir qu'une fois celui du second. [Cartan 1925d 533]

Le langage est encore celui de Lie : la *Gruppenmannigfaltigkeit* est le « domaine des paramètres » du groupe continu ; « isomorphe » est à entendre dans le sens spécifique à la théorie des groupes *à la* Lie : les groupes sont de même structure, ils ont, dirions-nous, des algèbres de Lie isomorphes. Le résultat que Cartan résume est donc bien le suivant : M. Weyl a établi que si un groupe continu **G** ayant la même algèbre de Lie qu'un groupe **G'** conservant une forme de Hermite (**G'** est alors de domaine « fermé et de volume fini ») ne possède qu'un nombre fini de feuillets au dessus de **G',** alors il est lui aussi fermé et de volume fini, les intégrales de Hurwitz conduisant à la démonstration de complète réductibilité de ses représentations linéaires. Cartan résume un peu vite en disant que le domaine de **G** ne peut recouvrir « qu'une seule fois » le domaine de **G'** : si Weyl a établi la simple connexité dans le cas spécial linéaire, il a aussi établi que le revêtement universel du groupe des rotations est à deux feuillets, ouvrant d'ailleurs la voie à une interprétation des représentations spinorielles que Cartan avait trouvées, mais comme représentations de l'algèbre de Lie du groupe des rotations. Cartan présente son projet sous les auspices d'une double généralité, son résultat s'appliquant à tous les groupes semi-simples et étant établi pour tous en même temps par une unique méthode générale.

Exactement comme le fait Weyl au même moment, le « groupe spécial à paramètres réels » spécifique à chaque cas est remplacé, dans l'étude générale, par la forme réelle du groupe adjoint (que Cartan nomme ici le « groupe de comparaison »), dont les travaux antérieurs de Cartan montrent la compacité puisqu'il conserve la forme définie négative ψ_2. Cartan et Weyl diffèrent toutefois dans la deuxième phase, celle concernant le lien *fini* entre le groupe donné **G** et le groupe de comparaison $\mathbf{\Gamma}$; là où Weyl utilise l'*Analysis situs*, Cartan utilise l'algèbre :

> (…) les racines de l'équation caractéristique d'une substitution linéaire quelconque G du groupe **G** sont des produits de puissances de certaines racines de l'équation caractéristique de la substitution correspondante T du groupe adjoint $\mathbf{\Gamma}$, les exposants étant des nombres *rationnels* déterminés ; la substitution T étant donnée, cela ne permet, pour les racines de B, qu'un nombre fini *k* de combinaisons, à chacune desquelles correspond *une seule* substitution B. Le nombre *k* se détermine dans chaque cas avec la plus grande facilité, sans qu'on ait à sortir du domaine des transformations infinitésimales. [Cartan 1925d 534]

Le projet de Cartan ne se place pas sous le seul thème de la généralité : dans sa correspondance avec Weyl, il explique qu'il souhaite procéder « (…) sans être obligé de se livrer à des études d'analysis situs toujours délicates. » (cité par Hawkins [Hawkins 2000 493]). Si ses préventions à l'égard de la topologie ne sont pas celles de Weyl, les auteurs se rejoignent sur la question de pureté des méthodes : la question de réductibilité complète des représentations linéaires des algèbres de Lie est d'une nature purement algébrique ; devoir remontrer de l'algèbre au groupe et s'appuyer sur la topologie de ce dernier introduit des éléments topologiques et transcendants *a priori* étrangers. Weyl déjà concluait son article sur le fondement groupe-théorétique du calcul tensoriel sur ce vœux (à propos des quatre cas semi-simples usuels) :

> Une preuve purement algébrique [*ein rein algebraischer Beweis*] de la complète réductibilité dans ces cas, opérant à l'intérieur du groupe infinitésimal, demeure souhaitable. [Weyl 1924a 224][37]

Weyl l'appelle de ses vœux, semble nous dire Cartan : je le fais !

Si l'argument algébrique dispense Cartan de l'étude des classes d'homotopie de chemins dans le domaine du groupe, l'architecture générale de la preuve ne peut se dispenser d'un travail global, proche de celui de Weyl sur des points essentiels. En particulier, les deux démonstrations reposent sur l'étude de l'application exponentielle ; le lien entre **G** et **Γ** est obtenu en comparant les applications exponentielles depuis leur algèbre de Lie commune, et les questions d'injectivité et de surjectivité jouent le rôle fondamental. Le but est atteint lorsque l'étude des deux applications exponentielles – ce que Cartan nomme la représentation sous la « forme canonique » e^{A} – permet d'établir la relation suivante entre ces trois espaces :

> Il y a donc une infinité de formes canoniques pour une même substitution e^{A} de **G**, mais il n'y a en revanche qu'un nombre fini k de substitutions canoniques distinctes e^{λ} correspondant à une substitution générale T du groupe adjoint. [Cartan 1925d 544]

Notre objectif n'est pas ici de présenter toute la preuve de Cartan, mais de considérer les outils mis en œuvre pour obtenir le résultat que nous venons de citer. Par exemple dans le cas du groupe adjoint, après avoir appelé l'espace vectoriel sous-jacent au groupe de Lie l'« espace canonique », il demande :

> Toutes les transformations du groupe adjoint sont-elles de la forme e^{Sa}, une même transformation est-elle susceptible de plusieurs représentations canoniques, voilà ce que nous nous proposons d'étudier dans le cas d'un groupe simple ou semi-simple. [Cartan 1925d 535]

Il s'agit donc d'étudier la surjectivité et de l'injectivité de l'exponentielle. Cette étude, ainsi que l'étude équivalente pour **G**, n'est pas menée algébriquement. Examinons quelques-uns des outils utilisés dans l'étude du cas de **Γ**. Par exemple, Cartan se soucie de réserver le terme de « groupe adjoint » à la composante connexe de l'identité, mais c'est par un argument mi-topologique mi-algébrique qu'il montre qu'il s'agit bien là d'un groupe : plutôt qu'un argument de connexité, Cartan préfère utiliser le fait qu'un système d'équations algébriques identiquement vérifié au voisinage de l'identité l'est entièrement sur cette « plus petite variété algébrique. » ([Cartan 1925d 538], un autre exemple du même type p.540). Autre exemple d'évitement des arguments topologiques, pour montrer que toute matrice générale (ici au

---

[37] *« Ein rein algebraischer Beweis der vollen Reduzibilität in diesen Fällen, welcher innerhalb der*

sens : ayant un nombre maximal de valeurs propres distinctes) du groupe adjoint admet une forme canonique (i.e. exponentielle), c'est sur la théorie des équations différentielles que se repose Cartan : si l'on se donne un chemin reliant dans **Γ** (parmi les matrices générales, Cartan a établi la connexité dans le domaine complexe) une matrice $T_0 = e^{S_0}$ à une matrice T_1, l'exponentielle s'obtient résolvant un système d'équations différentielles ordinaires et les hypothèses de généralité montrent qu' « on ne sera jamais arrêté dans le prolongement analytique de la solution (…) » [Cartan 1925d 541]. Après que cet argument d'Analyse a réglé le cas des matrices générales du groupe adjoint, le cas des matrices non-générales est réglé par un argument topologique : les matrices non-générales sont limites de matrices générales et, si l'on se borne aux matrices réelles, on peut toujours représenter une matrice réelle générale par e^S où les composantes de S définissent dans l'espace canonique réel un point contenu dans une sphère fixe (Σ) ;

> Cela posé, toute substitution *non générale* $\overline{T}$ pourra revêtir la forme canonique. En effet, on peut la regarder comme la limite d'une matrice générale réelle T, qu'on peut toujours représenter dans l'espace canonique réel par un point intérieur à (Σ) ; l'ensemble de ces points aura au moins un point limite $\overline{S}$ à l'intérieur de (Σ), ou sur (Σ), et l'on pourra poser $\overline{T} = e^{\overline{S}}$. [Cartan 1925d 542]

L'étude de l'exponentielle vers **G** est menée selon le même plan, et c'est, comme l'annonçait Cartan, un résultat algébrique sur le liens entre les poids principaux des deux représentations exponentielles de l'algèbre de Lie qui fournit l'argument de finitude [Cartan 1925d 544].

On voit donc Cartan utiliser des outils de topologie générale – connexité par arc, compacité (ou relative compacité) – sans leur accorder une préférence systématique sur les arguments algébriques ou analytiques. Il évite par contre tout recours à la topologie au sens de l'*Analysis situs* : il faut reconnaître que l'étude du groupe de Poincaré des groupes de Lie sous la simple hypothèse de semi-simplicité de l'algèbre relève, en effet, « délicate » ; le travail mené sur ce point par Weyl dans les cas des quatre classes usuelles nécessitait déjà une grande maîtrise de ces aspects, et sa démonstration dans le cas général est un peu allusive ! Au delà du choix des outils, Cartan aborde dans cet article les aspects globaux dont le travail de Weyl lui a montré le caractère essentiel : compacité de la variété du groupe, propriétés d'injectivité et de surjectivité de l'application exponentielle, lien entre deux groupes de même algèbre de Lie. On va voir que cette prise de conscience de la spécificité et de l'importance des aspects

---

infinitesimalen Gruppe operiert, bleibt zu wünschen. »

globaux va avoir un effet décisif sur les autres champs de recherche de Cartan ; quant à sa première réticence devant les études « délicates » d'*Analysis situs,* elle est bientôt levée.

2.2.2 Le „Gestalt switch" de 1925

Dans un bref texte de 1925, tiré d'une communication au congrès de l'Association pour l'Avancement des Sciences [Cartan 1925c], on est frappé du contraste avec les textes précédents sur la géométrie différentielle. Intitulé *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés et l'analysis situs* il aurait pu aussi bien s'intituler *Problèmes globaux en géométrie différentielle*[38]. Le point d'entrée est le groupe d'holonomie :

> J'ai indiqué récemment (*Ann. ENS,* t.XLII, 1925, p .18-29) de quelle manière on pouvait associer à tout espace de Riemann un groupe de déplacements euclidiens (*groupe d'holonomie*), dont chaque opération est associée à un contour fermé, ou *cycle,* tracé dans l'espace de Riemann. Si tous les cycles peuvent par déformation continue se réduire à un point, le groupe d'holonomie est continu et engendré par les déplacements infinitésimaux. Il en est ainsi si l'espace de Riemann est simplement connexe. Si le déplacement associé à un cycle infiniment petit arbitraire est nul, ce qui se traduit par l'annulation du tenseur de Riemann-Christoffel, le groupe d'holonomie se réduit au déplacement identique et l'espace de Riemann se confond avec l'espace euclidien.
>
> Si l'espace de Riemann n'est pas simplement connexe, le groupe d'holonomie n'est plus nécessairement continu. En particulier si le tenseur de Riemann-Christoffel est nul, c'est-à-dire si l'espace de Riemann est *localement euclidien*, le groupe d'holonomie est *discontinu*. Un exemple simple est fourni par un cylindre de révolution (…). [Cartan 1925c 919]

Dans les textes précédents, en particulier l'article *Sur les variétés à connexions affines et la théorie de la relativité généralisée* que Cartan donne en référence, la définition du groupe d'holonomie était systématiquement décrite comme celle d'un groupe *continu*. Nous notions qu'en cela Cartan ne faisait que poursuivre la logique d'un raisonnement qui ne s'articulait en rien autour d'un axe local – global, mais, plus classiquement, autour du couple infinitésimal – fini ; le fini était implicitement local : les chemins finis, en particulier, bordaient toujours des disques généralisés, de sorte que la formule de Stokes permettait d'engendrer et de justifier

[38] Nous modelons ce titre fictif sur celui de la conférence de Henri Cartan, 25 ans plus tard : *Problèmes globaux dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes* [Cartan 1950b].

géométriquement la formation d'invariants différentiels par dérivation extérieure. Il était alors naturel d'interpréter la nullité du tenseur de courbure comme le signe du caractère euclidien de l'espace : non seulement cette interprétation était explicite dans l'article cité, mais dans un texte à vocation plus pédagogique comme celui du Mémorial des Sciences Mathématiques sur *La géométrie des espaces de Riemann* [Cartan 1925a], il était le point de départ du questionnement ; la problématique organisatrice de cet exposé était, comme depuis Riemann, celle des coordonnées curvilignes, du problème de la reconnaissance de situations simples cachées par des coordonnées inappropriées, de la formation d'invariants différentiels caractérisant les équivalences masquées. Le *Gestalt switch* est complet avec la conférence de l'Association pour l'avancement des Sciences, et un terme pourrait en être l'emblème : Cartan y parle d'espaces « localement euclidiens ». Nous n'avions jamais lu sous sa plume la structure syntaxique « être localement [propriété] », et cette nouveauté suffit à réorganiser la démarche autour du triplet (infinitésimal, local, global). Il est significatif que Cartan aborde la question par le biais du groupe d'holonomie ; on peut sans forcer le trait y voir l'effet du travail de Weyl et de sa réception par Cartan. Si la non connexité du groupe de Lie y était un obstacle rapidement levé – il est bien clair que le groupe engendré par les transformations infinitésimales est connexe – elle devenait cependant un élément qu'on ne pouvait plus ne pas considérer. Le passage au groupe d'holonomie est beaucoup plus riche : la non connexité – le caractère « mixte »[39] – de nombreux groupes était bien connu – on le voit dans l'article de l'*Encyclopédie* de 1915 – mais cette non connexité n'était révélatrice d'aucune information pertinente ni générale ; propriété presque accidentelle de tel ou tel groupe, elle n'enseignait rien. Il en va tout autrement lorsque Cartan montre que le caractère mixte du groupe d'holonomie traduit, par son aspect continu (i.e. la composante connexe de l'identité), des informations sur la géométrie infinitésimale et par son aspect discontinu des informations sur les propriétés d'*Analysis situs* de l'espace. Le point de vue universellement local est à la fois congédié syntaxiquement par l'appropriation de tournures du type « être localement [propriété] », et saisi rétrospectivement comme un « manque à voir ». Cartan ne découvre ni n'invente la topologie, mais quelque chose de fondamental dans son regard sur les mathématiques a changé : les aspects globaux n'étaient pas sciemment laissés de côté, ils étaient tout simplement au delà de l'horizon dans un univers structuré par le couple infinitésimal/fini ; après Weyl, la ligne d'horizon s'est déplacée.

[39] Rappelons la terminologie de Lie : entre les groupes « discontinus » (par exemple le groupe des translations engendré par une translation non infinitésimale) et les groupes « continues » (groupes de Lie connexes) se trouvent les groupes mixtes (par exemple, les groupes orthogonaux). [Lie 1888 préface].

> Après cette mise en place fondamentale distinguant la géométrie locale des propriétés d'*Analysis situs* et montrant le double codage dans la structure du groupe d'holonomie, Cartan déroule une courte série d'exemples : texte bref et exotérique, il s'agit de rendre sensible sur de petits cas concrets les grandes articulations qu'on vient de mettre au jour et de d'indiquer à trait léger les chantiers de recherche qui s'ouvrent. La bande de Möbius, la bouteille de Klein et le tore métriquement plat servent à illustrer la non-intégrabilité de certains « transports » (d'une orientation, d'un étalon de longueur).

La fin de l'exposé introduit d'autres éléments d'*Analysis situs* que le groupe fondamental, sans sortir toutefois des notions bien classiques. Cartan donne les grandes lignes de la preuve qu'une surface localement euclidienne et « fermée » est de genre 1 : il suffit d'évaluer le genre au moyen d'une décomposition en triangles suffisamment petits. Ce résultat classique ouvre la voie à de nouveaux travaux portant sur les notions les plus récentes relatives aux connexions :

> Un raisonnement du même genre montre que dans un espace à deux dimensions fermé à connexion métrique (avec torsion) simplement connexe, le parallélisme *absolu* des directions est impossible, car on en déduirait la formule (1)[40], incompatible avec la formule classique d'Euler. Il en résulte facilement l'impossibilité d'attacher à chaque point d'une sphère, *et sans singularité*, une tangente déterminée. [Cartan 1925c 920]

Ce dernier exemple montre que la simple connexité ne garantit pas la trivialité des interactions entre topologie et géométrie, et que le groupe fondamental peut être l'alpha sans être l'oméga de la topologie. Cartan trouvera matière à enrichir cet aspect dans ses travaux sur le lien entre formes différentielles et topologie.

Sur le plan du vocabulaire, notons qu'aucun terme de la famille de « *im Großen* » (déjà stable chez les mathématiciens de langue allemande) ne fait couple avec le « localement » chez Cartan. On verra que « global » est utilisé ponctuellement sans s'imposer nettement parmi d'autres. Sur le fond, la distinction fondamentale ne passe pas entre local et global mais entre l'*Analysis situs* et le reste : on pourrait bien considérer des propriétés topologiques locales – Schreier, par exemple, explicite une hypothèses de locale simple connexité – et considérer des propriétés géométriques ou analytiques globales. Chez Cartan les propriétés d'*Analysis situs* sont implicitement globales, les propriétés géométriques ou analytiques – on pense, en anticipant un peu, au comportement des formes différentielles – sont rapportées au local. Il

[40] Faces + Sommets = Arêtes dans une triangulation.

privilégie une classification en termes de disciplines (*Analysis situs*, géométrie différentielle Riemannienne, Weylienne etc., théorie des groupes de Lie) aux interactions riches et inédites, à une classification dont local – global serait l'axe central.

3. *RENOUVELLEMENT DU QUESTIONNAIRE ET REFONTE DU CADRE THÉORIQUE, 1926-1930*

Le passage au global n'est bien entendu pas la substitution d'un questionnaire à un autre : il y a enrichissement du questionnaire, et, dans le cas de Cartan, un enrichissement qui frappe par la continuité des outils et des objets. Formes différentielle, groupe d'holonomie et invariants intégraux demeurent les outils centraux, mais il semble que leur *portée* et la *doctrine d'emploi* a changé : ils ne « parlent » plus uniquement d'invariants différentiels et de conditions d'intégrabilité, ils permettent aussi une exploration globale des espaces étudiés (compacité, groupe de Poincaré, nombres de Betti). Quant aux objets, nous avons montré que la réflexion de Cartan sur les généralisations de la notion d'espace était tout entière guidée par le noyau de la théorie de Lie classique : là où Lie considérait deux familles de variables (les coordonnées dans l'espace sur lequel le groupe agit, les paramètres des transformations finies du groupe), Cartan introduisait une troisième famille de paramètres et relâchait les conditions d'intégrabilité pour former des espaces moins cohérents que des groupes de Lie, explorables par le formalisme du repère mobile. Le changement complet de point de vue sur les groupes de Lie inauguré par Hermann Weyl va conduire à une profonde modification du regard sur les groupes *et* sur les variétés, sans d'ailleurs que le schéma reliant les uns aux autres soit modifié : la première variété explorée c'est la « variété du groupe », les autres variétés en sont des versions moins homogènes (au sens technique comme au sens figuré). Mais dépasser le point de vue universellement et implicitement local c'est aussi modifier la manière d'écrire les mathématiques, et sur ce point l'évolution de Cartan est plus lente. Nous montrerons qu'une étape importante dans cette évolution est représentée par la rédaction de la monographie sur *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs* [Cartan 1930] et que la mise au point d'une nouvelle manière d'*écrire* sur les « variété » utilise les outils fournis à Cartan par Otto Schreier, dans ses articles de 1926-1928 sur les groupes topologiques.

3.1. Renouvellement du questionnaire

3.1.1 Sur la forme : un apprivoisement progressif

La prise en compte des aspects globaux et l'émergence comme objet d'étude pertinent de la variété du groupe ne conduisent pas à une refonte immédiate des modes d'expression, et c'est à une évolution progressive que l'on assiste dans la période 1925-1930.

Ainsi la nature locale de nombreux travaux peut-elle demeurer implicite. Un exemple est donné par un article de 1926 rédigé avec J.A. Schouten sur *Les géométries riemanniennes à parallélisme absolu* [Cartan, Schouten 1926]. Un résultat central de décomposition en composantes irréductibles est énoncé et démontré sans mention de son caractère local ; c'est en 1931 dans la *Notice sur les travaux scientifiques* qu'il rédige pour l'Académie des Sciences que Cartan reformule ainsi ce résultat :

> Il suffit de trouver les solutions *irréductibles* du problème, une solution réductible étant fournie par un espace de Riemann qui serait, au moins localement, le produit topologique de deux espaces de Riemann satisfaisant chacun aux solutions du problème. [Cartan 1931]

Autre cas de figure, lorsque le couple local / non-local vient qualifier des éléments d'un même article, ce n'est souvent qu'après-coup. Ainsi en 1927 dans *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien* [Cartan 1927d] Cartan peut-il garder pour la dernière phrase de l'article la remarque : « Il est du reste inutile de faire remarquer que la réalisation d'un espace de Riemann donné dans un espace euclidien est purement locale » [Cartan 1927d 1097]. Prenons comme dernier exemple l'article de 1926 sur *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés* [Cartan 1926b]. La quasi-totalité de l'article est rédigée comme avant 1925 : le caractère local est purement implicite, le groupe d'holonomie est supposé continu (i.e. connexe) etc. Seul le dernier paragraphe vient, après une quarantaine de pages, jeter une lumière rétrospective sur la nature de ce qui précède : intitulé *Les groupes d'holonomie et l'Analysis situs*, il reprend les exemples de la conférence de 1925 et s'ouvre sur

> Nous avons supposé implicitement dans tout ce qui précède que le groupe d'holonomie d'un espace *G* à groupe fondamental **G** est *continu*. [Cartan 1926b 1037]

On peut ici penser que l'article a été rédigé en plusieurs temps et que le dernier paragraphe n'appartenait pas à un projet initial fidèle aux conceptions d'avant 1925. Nous n'ajoutons pas d'autres exemples de crainte de devenir fastidieux, mais l'on peut montrer que cette manière d'explicitation rétrospective ou sous forme de remarques finales est largement présente chez Cartan dans le travaux locaux. Même après 1925, la nature locale des énoncés n'a pas à être annoncée ni régulièrement explicitée ; le simple fait qu'elle soit explicitée à un moment, fût-il tardif, marque cependant un net changement par rapport aux écrits d'avant 1925.

On observe aussi des formes de transition dans la description des groupes de Lie. Avant 1925 le groupe est ramené à son algèbre de Lie et l'isomorphisme de « groupe » désigne en fait l'identité de « structure », autrement dit l'isomorphisme des algèbres de Lie. Dans une série de notes de 1927 le vocabulaire n'est plus celui d'avant 1925 mais pas encore ce qui se fixera dans la monographie de 1930 sur la topologie des groupes de Lie. Ainsi dans *Sur les géodésiques des espaces de groupes simples* [Cartan 1927g], le titre indique clairement un thème de recherche tributaire du *Gestalt switch* de 1925. La note s'ouvre toutefois sur un rappel des quatre grandes classes d'isomorphie de « groupes » (d'algèbres) simples et précise ensuite, à propos des « espaces de groupes » :

> Tous ces espaces sont à courbure riemannienne positive ou nulle. Ils peuvent admettre plusieurs *formes* distinctes, dont l'une est simplement connexe. [Cartan 1927g 661]

« Groupe » et « isomorphisme » renvoient donc encore aux groupes « infinitésimaux » et aux classifications des structures ; l'espace « du » groupe est un objet qui n'est pas défini univoquement et l'on peut lire le titre de la note en comprenant qu'à chaque « groupe » sont associés plusieurs « espaces de groupes », de « formes » (i.e. de topologie globale) distinctes.

On peut associer à cette famille des figures de transition la conférence de 1926 à l'Association pour l'Avancement des Sciences [Cartan 1926a]. Cartan y appelle encore « homogène » ce que nous nommerions un espace de Riemann localement homogène[41], mais choisit d'étudier le lien topologique entre deux espaces riemannien « *localement* applicables sans être identiques au point de vue de l'*Analysis situs* : on peut donner l'exemple du plan euclidien et du cylindre de révolution » [Cartan 1926a 993]. Dans cette conférence de 1926 Cartan ne présente pas réellement un travail de recherche, au sens où il aboutirait à des résultats significatifs sur les revêtements des espaces de Riemann ; il semble plutôt qu'il choisit dans un cadre familier la situation la plus simple permettant d'introduire le questionnement global – celle de l'isométrie locale – pour, d'un même geste, apprivoiser les nouveaux concepts, les relier aux anciens et s'essayer à un nouveau mode de formulation pouvant déboucher sur de nouvelles convention d'écriture et de lecture … un auteur en rodage.

3.1.2 Sur le fond : l'exploration de l'« espace du groupe »

[41] « (…) il peut arriver qu'un espace de Riemann admette un groupe *transitif* de déplacements rigides (groupe défini dans un certain domaine au voisinage de chaque point) : l'espace dans ce cas peut être dit *homogène*. » [Cartan 1926a 993]

Il ne peut s'agir ici de présenter, fût-ce à grands traits, les travaux de période 1925-1930 sur la géométrie et la topologie des groupes de Lie et des espaces homogènes : la moisson est vaste et la lecture ardue. Nous voulons toutefois montrer sur deux points comment la nouvelle prise en compte de l' « espace » du groupe permet une *circulation* inédite des questionnements.

On peut isoler une première famille de textes sur la géométrie et la topologie des groupes de transformations, certains publiés avec Schouten. Nous ne retenons ici que *La géométrie des groupes de transformations* de 1927 [Cartan 1927a] et la conférence sur *La théorie des groupes et la géométrie* [Cartan 1927b]. Dans la conception classique des groupes de Lie intervenaient trois types d'éléments, les transformations finies, les transformations infinitésimales, enfin l'espace sur lequel ces transformations agissent ; les priorités, ici, changent :

> Considérons un groupe de transformations fini et continu G à r paramètres $a_1,\ldots,a_r$. Les variables transformées par le groupe joueront dans la suite un rôle tout à fait accessoire. (…)
>
> Nous pouvons regarder les paramètres $a_1,\ldots,a_r$ comme les coordonnées d'un point (a) dans un espace E à r dimensions, que nous appellerons *espace du groupe*. Pour le moment cet espace est un simple continuum ; les propriétés du groupe vont nous permettre d'y introduire des notions géométriques. [Cartan 1927a 675]

C'est fondamentalement sur cet espace du groupe que le groupe agit. Dans ce passage la saisie de cet espace semble purement locale et elle l'est en effet : cet article ne traite que de propriétés géométriques locales, ce qu'on lit en filigrane dans l'énoncé des théorèmes utilisés (par exemple l'utilisation de paramètres canoniques [Cartan 1927a I.2]) ; ce n'est que dans article ultérieur que la perspective de cet article est rétrospectivement qualifiée de purement locale. On voit que le travail sur l'espace du groupe, bien que trouvant son point de départ dans l'utilisation de propriétés topologiques globales par Weyl, peut aussi prendre une forme locale ; il s'accompagne de travaux globaux sur la topologie des groupes dont la monographie de 1930 présente un premier bilan. Si l'on revient à notre article sur la géométrie des groupes, Cartan y exploite l'action du groupe sur lui-même pour établir un dictionnaire avec les propriétés des espaces généralisées mises en place dans la période 1922-1925. On se souvient que l'une des critiques que Cartan adressait aux généralisations de la notions d'espace de Riemann telles que celle proposée par Weyl était qu'elles reposaient de manière essentielle sur la notion de vecteur, alors que, dans la perspective des espaces généralisés, la géométrie de Klein infinitésimalisée n'a pas à agir sur un espace dans lequel la notion de vecteur ait un sens, ainsi en géométrie projective. Ici, Cartan appuie sa description d'une géométrie des groupes de Lie sur une notion de vecteur, mais en la redéfinissant : un vecteur est un couple de points de l'espace du groupe, deux vecteurs (*a,b*) et (*a',b'*) étant équipollents si on a l'égalité des transformations $T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1}$ (équipollence de première espèce) ou $T_a^{-1} T_b = T_{a'}^{-1} T_b$ (équipollence de seconde espèce), associée à l'action du groupe sur lui-même à gauche ou à droite respectivement. En calquant les définitions sur celles de la géométrie affine, Cartan définit les géodésiques et montre que cette notion coïncide avec celle de sous-groupe à un paramètre. L'action du groupe sur lui-même (à gauche ou à droite) permet aussi de définir un transport des « vecteurs » sans courbure qui permet d'obtenir une nouvelle entrée dans le dictionnaire « géométrie des espaces généralisés / groupes de Lie », au niveau infinitésimal cette fois : à la torsion – du côté géométrique – correspond le crochet de Lie – du côté groupes de Lie –, les transformations infinitésimales étant identifiées à des translations infiniment petites. Une troisième connexion est définie (moyenne arithmétique entre les deux premières, ou encore, l'unique connexion affine sans torsion ayant les sous-groupes à un paramètres comme géodésiques) qui présente une courbure mais pas de torsion : la rotation infinitésimale associée au parallélogramme infinitésimal de côtés U et V est alors le crochet avec [U,V] ; autrement dit le groupe d'holonomie est le groupe dérivé du groupe adjoint. Dans le cas semi-simple, cette connexion peut être associée à une structure riemannienne sur l'espace du groupe (la forme quadratique étant non-dégénérée mais non nécessairement définie). On comprend que Cartan puisse résumer ce travail par :

> Beaucoup de théorèmes fondamentaux de la théorie des groupes prennent de cette manière un caractère géométrique inattendu. [Cartan 1927b 858]

Ce travail sur les espaces de groupe est la matrice d'où est issue une grande partie des travaux de la période. Ainsi la connexion sans torsion sur les groupes simples ou semi-simples est le point de départ de l'étude des espaces riemanniens symétriques ; on le voit dans la conférence sur *La théorie des groupes et la géométrie* :

> [Les espaces sans torsion de ces groupes] font partie d'une catégorie plus générale d'espaces riemanniens, caractérisés par la propriété que le transport par parallélisme y conserve la courbure riemannienne. Chose curieuse, cette propriété est équivalente à la suivante : la symétrie par rapport à un point quelconque de l'espace est une transformation *isométrique*, c'est-à-dire laisse invariant le ds^2 de l'espace. [Cartan 1927b 859]

Ce recentrement de l'attention vers les espaces permet l'instauration d'un nouveau jeu théorique : dans une large famille de travaux on voit Cartan croiser les perspectives géométriques (souvent locales) et topologiques globales, imposer des hypothèses de compacité puis les relâcher, faire l'aller-retour entre un groupe de Lie et ses espaces homogènes. S'il fait fond sur sa notion d'espace généralisé, il s'y noue entre groupe et espace une alliance toute autre. On se souvient du modèle exposé en 1923-24 dans l'article sur *Les variétés à connexions affine et la théorie de la relativité généralisée* : déjà le groupe de Lie était le modèle fondamental à partir duquel la notion d'espace généralisé était pensée, mais la saisie des espaces était universellement et implicitement locale, et le groupe de Lie intervenait essentiellement par ses transformations infinitésimales. C'est maintenant d'abord en tant qu'il agit sur son espace sous-jacent qu'il fournit un modèle de structuration spatiale. Il est significatif de voir que, même quand la démarche est locale, les notions premières – ainsi celle de « vecteur » – ne sont pas définies par passage à l'infinitésimal : l'espace des transformations (finies) du groupe comme ensemble de points devient le lieu de croisement des questionnements géométriques et topologiques ainsi que le modèle pour l'étude des espaces associés.

La prise en compte de l'espace du groupe et des aspects globaux des espaces associés ouvre une seconde piste, dans laquelle d'autres propriétés topologiques interviennent que celles du groupe de Poincaré. Cartan aborde la question des nombres de Betti des espaces de groupe clos dans une note aux C.R.A.S. de 1928 [Cartan 1928b] et expose rapidement un premier résultat : dans un tel espace, de dimension r, toute variété qui ne rencontre pas la variété à r-3 dimensions lieu des transformations singulières, est réductible à un point par déformation continue ; les deux premiers nombres de Betti sont donc nuls. Il passe ensuite au lien général entre nombres de Betti et invariants intégraux ; la note de 1928 est un peu allusive, mais on trouve les résultats détaillés en 1929 dans le cas, plus général, des espaces homogènes sous l'action d'un groupe compact : c'est l'article *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces* [Cartan 1929]. Cartan commence par rappeler la définition d'un espace homogène et montre que, si g est le stabilisateur d'un point quelconque et γ l'ensemble des transformations du groupe adjoint correspondant à celles de g, le problème transcendant consistant en la recherche des invariants intégraux (i.e. des formes différentielles invariantes sous l'action du groupe) est entièrement traitable comme un problème algébrique, celui de l'étude des formes extérieures (et non plus différentielles extérieures) invariantes sous l'action de γ. Ces aspects deviennent triviaux si on se place directement sur la variété du groupe.

Pour faire le lien avec la topologie, il faut lier encore les nombres de Betti aux espaces vectoriels de formes différentielles, et étudier le rôle des formes différentielles invariantes parmi les formes différentielles. Cartan appelle « intégrale de différentielle exacte » les formes différentielles que nous disons fermées et rappelle la définition de l'indépendance de telles formes : *h* intégrales de différentielles exactes sont indépendantes si aucune combinaison linéaire à coefficients constants non nuls n'est la dérivée extérieure d'une forme de degré moindre ; on définit de même l'équivalence des formes. Lorsque l'espace est homogène sous l'action d'un groupe compact (il est alors *isogène* dans la terminologie introduite par Cartan), le procédé de moyennage hérité de Hurwitz permet à Cartan d'établir le lien entre formes différentielles fermées et invariants intégraux :

> D'après le premier théorème, *toute intégrale de différentielle exacte est équivalente à un invariant intégral*. D'après le second théorème *tout invariant intégral équivalent à zéro résulte de la dérivation extérieure d'un invariant intégral de degré moindre d'une unité*. » [Cartan 1929 1093]

Si nous reformulions, nous dirions que Cartan établit que – dans le cas compact – les dimensions des espaces de cohomologie des formes différentielles (si ces espaces sont de dimensions finies) sont celles des **R**-espaces vectoriels de formes invariantes, dont on a vu que leur détermination est un problème purement algébrique. Le passage à la topologie nécessite une deuxième étape pour laquelle Cartan s'appuie sur une conjecture :

> Théorème A'. *Etant données h intégrales de différentielles exactes linéairement indépendantes de degré p, on peut trouver h variétés fermées à p dimensions* $V^{(1)}$, $V^{(2)},\ldots,V^{(p)}$*, telles que le tableau carré des valeurs des h intégrales étendues à ces h variétés ait son déterminant différent de zéro.* [Cartan 1929 1097]

Un tel résultat sur l'accouplement naturel – par intégration – des espaces de cohomologie des formes fermées et d'homologie des sous-variétés permettrait de minorer le nombre de Betti en résolvant le problème algébrique relatif aux invariants intégraux, établissant ainsi pour les espaces isogènes (en particulier les groupes de Lie compacts) un lien non trivial entre leur topologie et la structure infinitésimale du groupe. Cette conjecture est le point de départ de la thèse de G. de Rham sur *L'Analysis situs des variétés à n dimensions*, soutenue en 1931.[42]

[42] Dans un petit texte sur *Quelques souvenirs des années 1925-1950*, de Rham rapporte : « A côté du Collège où j'enseignais, se trouvait la petite bibliothèque de l'Ecole d'ingénieurs, où je pouvais jeter un coup d'œil sur les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Un jour, *ce fut la chance de ma vie*, je tombai sur la Note d'Élie Cartan, intitulée « Sur les nombres de Betti des espaces de groupe clos », signalant quelques problèmes d'Analysis situs, dont il montrait la grande importance, mais qui n'étaient pas résolus. » [Rham 1981 658]

Signalons un brève apparition du thème du passage au global dans la correspondance entre Cartan et Einstein sur le parallélisme absolu [Cartan-Einstein 1979]. Si cette apparition est significative pour la question qui nous intéresse ici, elle est marginale dans cet échange : Einstein est surtout demandeur d'outils de classification des systèmes d'équations aux dérivées partielles ; il cherche avant tout des critères pour sélectionner, parmi les candidats sans courbure (à *Fernparallelismus*, donc) celui qui incarne le plus vraisemblablement la théorie unitaire recherchée. Cette correspondance de 1929-1932 concerne donc essentiellement la théorie de Cartan des systèmes en involution et de leur indice de généralité. Dans sa recherche de conditions à imposer au système pour sélectionner le bon candidat, Einstein évoque à un moment la conditions suivante : « *It is now my belief that, for a serious and rigourous field theory, one must insist that* the field be free of singularities everywhere. » [Cartan-Einstein 1979 93][43]. La réponse de Cartan lui donne l'occasion d'évoquer la nature globale de cette question, qui ne semblait pas soupçonnée par Einstein :

> En ce qui concerne les solutions *sans singularité*, la question est extrêmement difficile, me semble-t-il. En réalité, il y a deux questions en apparence indépendantes, mais en réalité intimement liées l'une à l'autre. 1° Quel est, au point de vue de l'Analysis situs, l'espace ou le continuum, dans lequel nous voulons localiser les phénomènes ? 2° Ce continuum étant choisi, quelles sont les solutions sans singularité dans ce continuum ? Il est très possible que l'existence de solutions sans singularité impose des conditions purement topologiques au continuum, exige par exemple que ce continuum soit fermé, comme l'espace sphérique à 4 dimensions. [Cartan-Einstein 1979 102].

Jusque là, les échanges entre Einstein et Cartan sur la classifications des systèmes en involution n'engageaient que le niveau local, ce qui demeurait implicite dans le dialogue. La notion de singularité peut encore sembler locale à Einstein, qui ne voit peut-être pas toute la portée du « *everywhere* » inclus dans sa demande. Quoiqu'il ait pensé de la réponse de Cartan, il choisit de ne pas poursuivre sur ce terrain. Il est par contre significatif que, pour illustrer la difficulté globale, Cartan s'appuie dans la suite de sa lettre sur l'intégration des équations caractéristiques des transformations infinitésimales d'un groupe de Lie local.

3.2 Le cours de 1930 sur la topologie des groupes de Lie

Il nous semble naturel de clore cette analyse de l'émergence de la polarité local – global chez Élie Cartan sur la monographie qu'il fait paraître en 1930 sur *La théorie des groupes finis et*

[43] Nous citons Einstein dans la traduction de Jules Leroy et Jim Ritter. C'est Einstein qui souligne.

continus et l'analysis situs [Cartan 1930]. Ce travail est bien sûr important en tant que catalogue de résultats globaux sur les groupes de Lie – et dans une certaine mesure sur les espaces homogènes et les espaces riemanniens symétriques – mais ce n'est pas cette variété de résultats qui nous importe ici ; par son *genre* même, la monographie invite à une réorganisation d'ensemble des connaissances, à une mise à plat des concepts, une explicitation des enjeux, une refonte du lexique … autant d'aspects qui modifient le faciès de la théorie pour les générations ultérieures. Cette monographie est très redevable aux travaux d'Otto Schreier, à la fois pour son organisation d'ensemble et pour quelques concepts clés, tels celui de groupes localement isomorphes.

3.2.1 L'apport d'Otto Schreier

Le jeune chercheur vient de Vienne où il a soutenu en 1923 une thèse d'algèbre abstraite sur la théorie des groupes, après des études auprès de Wirtinger, Hahn, Reidemeister, Furtwängler ou Vietoris. On trouve son travail sur les groupes continus dans deux exposés publiés dans le cahier du séminaire mathématique de Hambourg, l'un en 1926 sur les *Groupes continus abstraits* [44], l'autre en 1927 sur *La corrélation des groupes continus* im Grossen [45]; ainsi que dans un exposé à la société des mathématiciens allemands, dont le texte, *Sur de nouvelles recherches en théorie des groupes continus*, paraît dans le volume de 1928 du *Jahresbericht der D.M.V.* [46].

Le couple local/global est d'emblée celui qui guide l'étude comme le montre l'introduction du premier exposé :

> Nous donnons dans ce qui suit une définition des groupes continus abstraits, abstraits au sens où nous ne faisons aucune hypothèse sur la nature des éléments du groupe. On déduit ensuite certaines propriétés fondamentales de ces groupes et on étudie en particulier la question de savoir dans quelle mesure un groupe est déterminé par son comportement *im kleinen*. [Schreier 1926 15][47]

---

[44] *Abstrakte kontinuirlichen Gruppen* [Schreier 1926].

[45] *Die Verwandschaft stetiger Gruppen im Groβen* [Schreier 1927].

[46] *Über neure Untersuchungen in der Theorie der kontinuirlichen Gruppen* [Schreier 1928].

[47] *« Im foldenden wird eine Definition für abstrakte kontinuirliche Gruppen gegeben, abstrakt in dem Sinn, daβ über die Natur der Gruppenelemente keinerlei Voraussetzung gemacht wird. Sodann werden einige grundlegende Eigenschaften dieser Gruppen abgeleitet und insbesondere die Frage untersucht, inwieweit eine kontinuirliche Gruppe durch ihr Verhalten im kleinen bestimmt ist.* »

Il semble inutile de souligner les traits « structuralistes » qu'on devine dans ce passage[48] et que confirme la suite de la lecture : le groupes sont « abstraits » en particulier parce qu'ils sont considérés en eux-mêmes et non comme des groupes de transformations (ce qui demeurait le cas chez Weyl lorsqu'il introduisait, fidèle à Lie, le groupe des paramètres associés à un groupe de Lie de transformations). Le traitement est, lui aussi, « abstrait » : on partira d'objets définis par des propriétés caractéristiques (qu'on ne se soucie plus de baptiser axiomes) pour en déduire les principales propriétés ; les exemples d'objets satisfaisant à ces définitions ne sont donnés que dans la dernière partie du texte ! On retrouve à la lecture cette impression familière de pur jeu de l'esprit, libre et un peu gratuit : il ne s'agit pas, comme chez Weyl en 1924 et dans une large mesure en 1913, de se réapproprier tout un monde de complexité en le coulant dans un moule plus épuré ; profilage de l'héritage, profilage par le dialogue avec le passé. Cette gratuité de l'approche de Schreier n'est toutefois qu'apparente, l'étude est motivée par une question adressée à la théorie dont on hérite : « dans quelle mesure un groupe est déterminé par son comportement *im kleinen* » ? Cette question était aussi bien sûr centrale dans les articles de Weyl sur la représentation linéaire des algèbres de Lie, mais elle était rencontrée comme un obstacle dans le cours d'une démonstration, obstacle dont Weyl soulignait, certes, au passage, la nature générale. Schreier peut, quant à lui, partir de la question générale ; elle n'a pas à être autrement motivée : au jeune mathématicien, pour qui l'algèbre abstraite (quoique pas encore dans sa version structurale post- van der Waerden) et la topologie ont *toujours été là*, la question *se présente d'elle-même*. Il ne s'agit plus de s'arracher au système d'évidences qui guidait, par exemple, Lie et Cartan, mais de s'étonner qu'une question si naturelle et centrale ait pu échapper aux anciens. Indice prosaïque, Schreier ne pense pas même à utiliser guillemets, majuscules ou italiques lors de la première apparition de « *im kleinen* », encore moins à en expliciter le sens : à la même époque, Morse est encore conscient d'utiliser un terme en partie métaphorique et extra-mathématique ; Schreier ne fait qu'utiliser une catégorie usuelle dans le raisonnement mathématique.

Laissons Schreier présenter les deux principaux résultats de son premier article, dans l'unique passage dans lequel il indique les liens avec les notions issues de la théorie de Lie. Quelques mises au point de vocabulaire : « continu » signifie entre autres « connexe », groupe-facteur (*Faktorgruppe*) désigne un groupe quotient, et un « isomorphisme univoque » (*einstufig isomorphism*) est ce que nous appelons un isomorphisme :

[48] On sait l'importance particulière des mathématiciens du séminaire de Hambourg (Artin, van der Waerden) et de Göttingen (Hopf, Emmy Noether) dans la formation et l'exportation du modèle structural d'exposition des théories. Par exemple [Corry 1996].

I. Tous les éléments d'un groupe continu peuvent être formés à partir d'éléments d'un voisinage [*Nähe*] arbitraire de l'élément unité (théorème I). Ceci n'est à vrai dire pas directement contenu dans le second théorème fondamental de Lie, lorsqu'il s'agit d'un groupe de Lie ; car pour démontrer le deuxième théorème fondamental on tire des théorèmes d'existence de la théorie des équations différentielles, de sorte qu'on doit se restreindre à un voisinage suffisamment petit de l'identité ; on n'y obtient donc que le résultat partiel : il existe un voisinage de l'identité dont la totalité des éléments peuvent être formés d'éléments arbitrairement proches de l'identité.

II. Un groupe continu $\mathbf{R}$ en détermine un second $\hat{\mathbf{R}}$ tel que tout groupe continu coïncidant *im kleinen* avec $\mathbf{R}$ est univoquement isomorphe à un groupe-facteur de $\hat{\mathbf{R}}$ (Théorème II). Appliqué aux groupes de Lie, cette proposition nous apprend la relations qu'entretiennent deux groupes « de même structure » (*« gleich zusammengesetzt »*) – c'est-à-dire dont les constantes de structure c_{ik}^{l} coïncident. Nous obtenons en même temps un certain aperçu de la structure topologique des groupes continus (proposition 11). [Schreier 1926 15][49]

L'absence de distinction claire entre les transformations infinitésimales d'un groupe de Lie et les transformations finies appartenant à un voisinage de l'identité fait perdre aux considérations du point I une partie de leur pertinence, mais le cœur de l'article n'est pas là. Bien que soucieux de faire le lien avec les applications possibles en théorie des groupes de Lie, c'est une théorie des groupes continus qu'il développe : aucune considération infinitésimale n'y entre en jeu. Schreier définit les notions d'homomorphisme (il parle de groupes « *isomorph* ») et de groupe quotient par un sous-groupe (Schreier parle « diviseur ») normal fermé. L'innovation principale se trouve, à notre sens, dans le paragraphe 3, dans la notion de groupes localement isomorphes (« *im kleinen isomorph Gruppen* ») :

---

[49] « *I. Alle Elemente einer kontinuirlichen Gruppe können aus Elementen zusammengesetzt werden, die in bÉliebiger Nähe des Einheitselements liegen (Theorem I). Dies ist übrigens selbst dann nicht unmittelbar in Lies zweitem Fundamentalsatz enthalten, wenn es sich um eine Liesche Gruppe handelt ; dem zum Beweis des zweiten Fundamentalsatzes werden Existenzsätze aus der Lehre von den Differentialgleichungen herangezogen, so daβ man sich auf eine hinlänglich kleine Umgebung der Identität beschränken muβ ; man erhält also von hier aus bloβ das Teilergebnis : Es gibt eine Umgebung der Identität, deren sämmtliche Elemente sich aus Elemente zusammensetzen lassen, die der Identität bÉliebig nahe liegen. II Eine kontinuirliche Gruppe* $\mathbf{R}$ *bestimmt eindeutig eine zweite* $\hat{\mathbf{R}}$ *, von der Art, daβ jede kontinuirliche Gruppe, die mit* $\mathbf{R}$ *im kleinen übereinstimmt, mit einer Faktorgruppe von* $\hat{\mathbf{R}}$ *einstufig isomorph ist (Theorem II). Auf LIEsche Gruppen angewendet, lehrt dieser Satz, in welcher Beziehung Gruppen stellen, die « gleich zusammengesetzt » sind, d.h. in den Zusammensetzungskonstanten* c_{ik}^{l} *übereinstimmen.- Zugleich erhalten wir auch einen gewissen Einblick in die topologische Struktur der kontinuirlichen Gruppen (Satz 11).* »

Définition 7. Deux groupes continus **R**, **R'** sont dits isomorphes *im kleinen* s'il existe un voisinage **U**(E) de l'identité dans **R**, un voisinage **U'**(E') de l'identité dans **R'** et une application α de **U**(E) sur **U'**(E') telle que : 1. α est biunivoque [*eineindeutig*] et inversiblement continue. 2. Si $U_1U_2 = U_3$ (U_1,U_2,U_3 dans **U**(E)), alors $\alpha(U_1)\,\alpha(U_2) = \alpha(U_3)$. 3. Si $U'_1U'_2 = U'_3$ (U'_1,U'_2,U'_3 dans **U'**(E')), alors $\alpha^{-1}(U'_1)\alpha^{-1}(U'_2) = \alpha^{-1}(U'_3)$. On dit que les voisinages **U**(E) et **U'**(E') sont continûment isomorphes. [Schreier 1926 20] [50]

Cette clarification essentielle permet de lancer la question du revêtement universel, pour laquelle Schreier choisit une construction originale.

Soient maintenant **R** et **R'** deux groupes continus isomorphes *im kleinen*, **U**, **U'** deux voisinages sphériques continûment isomorphes des unités correspondantes. Nous associons à chaque élément U de **U** un symbole $\overline{U}$, en particulier le symbole $\overline{E}$ à l'unité E. Nous associons à chaque relation $U_1U_2 = U_3$ entre trois éléments de **U** la relation $\overline{U_1}\,\overline{U_2} = \overline{U_3}$. Nous nommons $\mathbf{R_U}$ le groupe engendré par les symboles $\overline{U}$ et défini par les relations données. [Schreier 1926 21] [51]

Schreier définit ensuite sur $\mathbf{R_U}$ une notion de limite – une structure de L-groupe donc - , pour laquelle il montre que **R** et $\mathbf{R_U}$ sont localement isomorphes pour une application naturelle de $\mathbf{R_U}$ dans **R** ; l'ensemble des éléments au-dessus de E forme un sous-groupe normal discret, et **R** s'identifie, en tant que L-groupe, au quotient de $\mathbf{R_U}$ par ce sous-groupe. On peut se demander pourquoi Schreier était parti de deux groupes **R** et **R'** plutôt que d'un seul ; il préfère formuler son résultat sous la forme suivante [52] :

Proposition 10. Soient $\mathbf{R_1}$ et $\mathbf{R_2}$ deux groupes continus isomorphes *im kleinen*, il existe un groupe **R** isomorphe *im kleinen* aux deux, tel que $\mathbf{R_1}$ et $\mathbf{R_2}$ sont continûment isomorphes au L-groupes-facteurs de **R** de diviseur normal discret.- Réciproquement, si $\mathbf{R_1}$ et $\mathbf{R_2}$ sont continûment isomorphes au L-groupes-facteurs d'un groupe continu

---

[50] « *Definition 7. Zwei kontinuirliche Gruppen R, R' heiβen isomorph im kleinen, wenn es eine Umgebung* ***U(E)*** *der Einheit in* ***R****, eine Umgebung* ***U'(E')*** *der Einheit in* ***R'*** *und eine Abblidung α von* ***U'****E') auf* ***U'(E')*** *von folgender Beschaffenheit : 1. α ist eineindeutig und umkehrbar stetig. 2. Ist $U_1U_2=U_3$ (U_1,U_2,U_3 in* ***U(E)****), so ist $\alpha(U_1)\alpha(U_2) = \alpha(U_3)$. 3. Ist $U'_1U'_2=U'_3$ (U'_1,U'_2,U'_3 in* ***U'(E')****), so ist $\alpha^{-1}(U'_1)\alpha^{-1}(U'_2) = \alpha^{-1}(U'_3)$.- Die Umgebungen* ***U(E)*** *und* ***U'(E')*** *nennen wir stetig isomorph.* »

[51] « *Seien nunmehr* ***R****,* ***R'*** *im kleinen isomorph, kontinuirliche Gruppen,* ***U****,* ***U'*** *stetige isomorph Kugelumgebungen der betreffenden Einheiten. Wir ordnen jedem Element U aus* ***U*** *ein Symbol $\overline{U}$ zu, insbesondere der Einheit E das Symbol $\overline{E}$. Jeder Beziehung $U_1U_2 = U_3$ zwischen drei Elementen von* ***U*** *ordnen wir die Relation $\overline{U_1}\,\overline{U_2} = \overline{U_3}$ zu. Die durch die Symbole $\overline{U}$ erzeugte und durch die eben angegebenen Relationen definierte Gruppe nennen wir $\mathbf{R_U}$.* »

R pour des diviseurs normaux discrets, alors ils sont aussi isomorphes *im kleinen*. [Schreier 1926 23][53]

C'est dans un second temps que Schreier élargit la question : maintenant que l'on sait, à deux groupes continus localement isomorphes, en associer un troisième dont ils sont tous deux quotients, peut-on associer à *tous* les groupes continus d'une classe d'isomorphisme local un unique tel groupe ? Le passage n'est pas trivial si la classe est infinie : lorsque dans des couples (R_1,R_2), où R_1 est fixé, on laisse R_2 parcourir la classe des groupes localement isomorphes à R_1, à chaque R_2 se voit associé un voisinage de l'unité dans R_1, mais rien ne garantit que l'intersection de cette infinité de voisinages en est encore un. Schreier lève cette difficulté, et peut affirmer l'existence d'un objet qu'il nomme ainsi :

> Définition 8. Le groupe continu $\hat{\mathbf{R}}$ se nomme un groupe-revêtement [*Überlagerungsgruppe*] du groupe continu **R**, ou encore la classe de **R**, lorsque chaque groupe isomorphe *im kleinen* à R est continûment isomorphe au L-groupe-facteur de $\hat{\mathbf{R}}$ par un diviseur normal discret. [Schreier 1926 24][54]

Schreier remercie en note Artin pour avoir suggéré le terme de groupe-revêtement. L'unicité du groupe-revêtement à isomorphisme continu près est établie.

Une des originalités de la démarche de Schreier, du point de vue de la topologie, vient de l'importation de modes de raisonnement typiques de la théorie abstraite des groupes, dont il est spécialiste : groupes définis par générateurs et relations, recherche des extensions d'un groupe donné, suites de composition etc. L'exposé de l'année suivante, *La corrélation des groupes continus* im Groβen, revient sur la construction du revêtement par générateurs et relations en utilisant, cette fois, les classes de chemins.

L'exposé devant l'Union des Mathématiciens Allemands fait en septembre 1926 ne contient bien sûr pas autre chose, mais permet de mieux situer le contexte de ces travaux. Schreier commence, un peu rhétoriquement, à déplorer le peu d'intérêt pour les groupes continus : certes importants dans les développements récents de la géométrie (qu'on pense aux articles de l'*Encyclopädie* sur les invariants différentiels, ou aux manuels de Blaschke), ils y sont un

---

[52] rappelons que « isomorphe » seul signifie pour nous « homomorphe ». Par contre « continûment isomorphe » contient une condition de bijectivité [Schreier 1926 16].

[53] « *Satz 10. Sind R_1, R_2 im kleinen isomorph kontinuirlichen Gruppen, so gibt es eine mit beiden im kleinen isomorph Gruppe R, so daβ R_1 und R_2 mit den Faktor-L-Gruppen diskreter Normalteiler von R stetis isomorph sind. – Sind umgekehrt R_1, R_2 mit den Faktor-L-Gruppen diskreter Normalteiler einer kontinuirlichen Gruppe R stetig isomorph, so sind sie auch isomorph im kleinen*. »

[54] « *Definition 8. Die kontinuirliche Gruppe $\hat{\mathbf{R}}$ heiβt eine Überlagerungsgruppe der kontinuirlichen Gruppe **R** oder auch der Klasse von **R**, wenn jede mit **R** im kleinen isomorphe Gruppe mit der Faktor-L-Gruppe eines diskreten Normalteilers von $\hat{\mathbf{R}}$ stetig isomorph ist.* »

moyen plus que l'objet d'étude même ; par ailleurs, les travaux issus de l'école de Lie semblent à la fois trop loin des critères modernes de rigueur, et si riches qu'ils semblent avoir épuisé les questions qu'ils se posaient (!). L'objectif de l'exposé est, on le devine, de combattre cette impression générale, nous n'y relevons que quelques points en passant. Il commence par une relecture de la présentation *à la* Lie, un groupe de transformation étant donné par des équations de la forme

$$x_i^a = f_i(x_1,...,x_n;a_1,...,a_r) \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

En soulignant que dans ce cadre le produit et l'inverse ne sont définis qu'au voisinage de l'identité, il propose que la structure définie ainsi ne se nomme plus un groupe mais un « germe de groupe » (*Gruppenkeim*) à *r* paramètres [Schreier 1928 114]. Peut-être moins profond mais non moins significatif d'une évolution des systèmes d'évidence, alors que Schreier fait disparaître toute marque graphique indiquant le statut métaphorique des termes *im Kleinen* ou *im Großen*, il ne peut parler de « groupe infinitésimal » sans mettre de guillemets [Schreier 1928 116]. La plus grande part de l'exposé est consacrée au résumé des travaux récents de Weyl, Peter-Weyl, et Cartan en théorie de la représentation, travaux que Schreier ne pouvait connaître au moment de son premier exposé au séminaire de Hambourg, en janvier 1925. Schreier termine en faisant le lien avec les travaux de Hopf sur les points fixes des applications entre variétés fermées (i.e. compactes) et il en déduit la nullité de la caractéristique d'Euler-Poincaré des variétés-de-groupe (*Gruppenmannigfaltigkeit*) fermées ; la question générale de la caractérisation des variétés-de-groupe par des propriétés topologiques est soulevée.

Signalons deux points qui, sans avoir directement trait à l'évolution à court terme des cadres théoriques et rhétoriques chez Élie Cartan, permettent de mieux cerner le contexte de l'émergence de la polarité local – global dans les années 1920.

Le fait que le travail de Schreier soit mené à Hambourg n'est sans doute pas indifférent ; le maître des lieux, Wilhelm Blaschke, est – à notre connaissance – le premier à avoir choisi de structurer une monographie de référence en géométrie différentielle autour d'un balancement systématique entre propriétés « *im Kleinen* » et propriétés « *im Grossen* ». Dans les deux premiers tomes de ses *Leçons sur la géométrie différentielle et les fondements de la théorie de la relativité* [Blaschke 1923 et 1924], le couple local – global est la structuration majeure ; la plupart des chapitres sont organisés par paires (par exemple : courbes planes *im Kleinen*, courbes planes *im Grossen*) de même que certains théorèmes. Le cas de Blaschke illustre d’une autre manière un phénomène que nous soulignions chez Cartan : la non-nécessaire coïncidence temporelle de trois formes de polarisation autour de l’axe local – global. On peut en effet distinguer l’émergence de *théories* globales (comme corps de définitions, de théorèmes, de problèmes ouverts), le *thème* de la polarité local – global (textes introductifs désignant un nouveau champ de problèmes, mises en gardes contre des erreurs typiques), l’évolution des *canons d’écriture* (ainsi le passage d’énoncés implicitement locaux à des énonces qui doivent l’être explicitement sous peine de passer pour des abus de langage ou des incorrections). Chez Cartan, le passage au global a lieu rapidement aux niveaux théorique et thématique, plus lentement dans les formes d’écriture. Le traité de Blaschke innove sur les plans thématiques et les modes d’écriture, alors qu’il est un traité assez peu « moderne » sur le fond. En dépit de l’allusion à la théorie de la relativité contenue dans le titre, les volumes publiés couvrent essentiellement la géométrie différentielle classique des courbes et surfaces (notions d’ailleurs non définies) du plan et de l’espace : point de tenseurs, connexions et autres espaces généralisés ; l’inscription dans le champ de recherche « moderne » relatif aux invariants différentiels relatifs à d’autre groupes que celui des isométries est, sur le fond, la principale innovation. Le majestueux balancement rhétorique entre local et global recouvre des contenus en contraste sévère : richesse de la théorie locale face à des résultats globaux épars, la plupart modelés sur l’exemple du théorème des quatre sommets (on mentionnera aussi l’étude des ovoïdes, des questions de rigidité et le théorème de Gauss-Bonnet pour les surfaces de l’espace). Du traité de Blaschke aux articles de Schreier sur les groupes topologiques, c’est une *forme de question* qui circule bien plus que des outils ou des théorèmes. Au même moment, à Berlin (et sans que nous connaissions de lien direct avec Blaschke), le jeune Heinz Hopf soutient sa thèse *Sur des liens entre la topologie et la métrique des variétés*, dont il présente ainsi l’objet (dans le premier article tiré de ce travail) :

> À partir de propriétés d’une métrique connues *im Kleinen*, à quelles conclusions peut-on aboutir sur la structure topologique [*auf den topologischen Bau*] de la variété porteuse de cette géométrie ? [Hopf 1926 1][55]

La forme de question commune – dans des domaines et avec des outils différents – à Blaschke, Schreier et Hopf est le leitmotiv des recherches de ce dernier jusqu’en 1932, en particulier dans les travaux sur la topologie des variétés riemanniennes complètes qu’il mène avec son élève Rinow [Chorlay 2007 p.548-555].

[55] „ *Was lässt sich aus den im Kleinen bekannten Eigenschaften einer Massbestimmung auf den topologischen Bau der diese Geometrie tragenden Mannigfaltigkeit schliessen ?*“ .

Un deuxième élément de contexte mérite mention, qui touche d'ailleurs plus directement Élie Cartan. On a vu Schreier proposer une notion de « germe de groupe » pour désigner ce qu'on avait toujours appelé groupe – du moins du côté des groupes continus – pour réserver le terme de groupe aux *totalités* vérifiant les axiomes algébriques. Cette évolution terminologique, dont nous pensons qu'elle indique des déplacements de fond dans les systèmes d'évidences corrélatifs à l'émergence explicite de la polarisation local – global, on la retrouve quelques années plus tard dans les textes de Veblen et Whitehead sur les fondements de la géométrie différentielle. Ces derniers présentent en 1931 – puis, plus longuement, dans leur traité de 1932 – la notion de « pseudo-groupe », qu'ils placent au fondement de la géométrie différentielle [Veblen et Whitehead 1931 et 1932]. On peut montrer que l'introduction de ce concept est signe d'une évolution récente du regard sur la géométrie différentielle. Ainsi, le traité de 1932 se donne-t-il pour objectif principal de mettre en place un cadre axiomatique (autour des notions de pseudo-groupe et de variété différentiable) permettant la rencontre des questions traditionnelles de géométrie différentielle (que nos auteurs appellent justement « géométrie infinitésimale ») et d'Analysis situs. On pourrait s'attendre à ce que cet objectif ait été poursuivi depuis longtemps par Veblen, qui dans les années 1920 mène concurremment des travaux de topologie et de géométrie différentielle des espaces généralisés. On peut montrer qu'il n'en est rien, les deux familles de recherches ne communiquaient pas chez Veblen dans les années 1920 ; les exemples qu'il utilise en 1932 pour justifier l'ambition de synthèse sont tirés des travaux de Hopf et de Cartan. Lorsqu'en 1927 Veblen publie une monographie sur les invariants des formes quadratiques [Veblen 1927], il le rédige encore dans le style implicitement local et nomme groupe des familles de transformations qu'il nommera pseudo-groupes en 1932 ; en 1932, il signale que sa terminologie de 1927 était fautive :

> *This corrects an error is Q.F. Chap. II §2, where it is stated that the set of coördinate transformations is a group*. [Veblen et Whitehead 1932 40]

De même que pour Cartan autour de 1925, il s'est passé quelque chose pour Veblen entre 1927 et 1931 [Chorlay 2007 chapitre 13].

3.2.2 Le cours de Cartan de 1930

Cinq ans après la conférence de 1925, la préface de la monographie *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs* [Cartan 1930] est de nouveau un manifeste pour les questions globales ; après avoir évoqué l'usage de la topologie en théorie des groupes de Lie chez Hurwitz, Weyl, Schreier et Poincaré, Cartan reformule sur un plan plus général ce que ces travaux ont en commun :

> Dans tous ces travaux qui, à part ceux relativement récents de H. Weyl et O. Schreier, sont restés isolés, les groupes finis et continus sont étudiés dans leur domaine entier d'existence et non pas seulement, avec S. Lie, au voisinage de la transformation identique : ce sont des études « intégrales » et non « locales ». Le but de ce Fascicule est de passer en revue, en se plaçant au point de vue « intégral », un certain nombre de problèmes fondamentaux que pose la théorie des groupes. [Cartan 1930 1166]

Ceci appelle deux remarques. Premièrement, c'est bien sur le couple local/global que porte le commentaire de Cartan et non plus simplement sur le rôle d'une discipline – l'*Analysis situs* – en théorie des groupes de Lie : l'interaction entre disciplines – qui seule jusque là était commentée par Cartan – est ramenée à une fondamentale dualité de points de vue sur les objets de la théorie ; objets qui ont eux-mêmes changé, on le verra. Deuxièmement, Cartan n'utilise pas le terme « global » ou « *im Grossen* » pour faire couple avec « local » ; dans le même texte on voit Cartan utiliser également « non-local », plus tard l'improbable « en grand »[56] .

L'objet « groupe de Lie » a aussi profondément changé, et l'apport de Schreier est ici bien net. On se souvient du mode d'introduction qui prévalait depuis Lie : un groupe de transformation était donné par une série d'équations de la forme

$$x_i' = f_i(x_1,\ldots,x_n,\ a_1,\ldots,a_r)$$

déterminant une famille de transformations (i.e. de transformations analytiques (localement) inversibles) des variables (x_i), stable par composition, transformations elles-mêmes repérées par les paramètres essentiels (a_i) ; le développement de Taylor par rapport aux paramètres faisait apparaître les transformations infinitésimales du groupes, à partir desquelles les transformations finies pouvaient être obtenues par simple intégration. Les trois théorèmes fondamentaux de Lie identifiaient la structure algébrique propre aux transformations infinitésimales et assuraient la transparence de l'aller-retour entre l'infinitésimal et le fini. On est au plus loin de cette présentation lorsqu'on lit les premières lignes du Fascicule de Cartan : la notion première n'est plus celle de transformations d'un espace mais celle de variété, pour laquelle Cartan reprend les axiomes de la *Mengenlehre* de Hausdorff[57]. Cette définition des

[56] Dans la conférence de 1935 sur *La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie* [Cartan 1936].

[57] « Nous appellerons variété à *n* dimensions un ensemble d'éléments ou points tels qu'on puisse définir un système de sous-ensembles, appelés *voisinages*, satisfaisant aux conditions suivantes :

variétés topologiques[58] ouvre un premier chapitre consacré à la notion de groupe topologique. On y retrouve l'essentiel de la présentation de Schreier ; les revêtements y sont en particulier introduits à partir de la distinction de deux types d'isomorphismes de groupes topologiques :

> Un groupe G est dit *isomorphe* d'un groupe G' s'il est possible de faire correspondre à un élément de G' un élément déterminé de G de telle sorte que si A',B',C' sont trois éléments de G' satisfaisant à A'B' = C', les trois éléments correspondants A,B,C de G satisfassent à AB = C. [Cartan 1930 1175]

On voit Cartan conserver le vocabulaire ancien – « isomorphisme » pour ce que nous nommons « homomorphisme » – pour distinguer ensuite les isomorphismes holoédriques et mériédriques. L'essentiel tient toutefois dans l'introduction de la notion cousine :

> Deux groupes finis et continus de même ordre G et G' sont dit *localement isomorphes* si l'on peut établir une correspondance biunivoque continue entre les éléments d'un voisinage V_0 de G contenant à son intérieur l'élément unité et ceux d'un voisinage V'_0 de G' contenant à son intérieur l'élément unité, cette correspondance satisfaisant à la condition que si A,B et C sont trois éléments de V_0 tels que AB = C, les éléments correspondants de V'_0 satisfassent à A'B' = C'. [Cartan 1930 1175]

Le passage aux revêtements est introduit par le théorème suivant : si G est simplement connexe, tout isomorphisme local entre G et G' se prolonge de manière univoque en un isomorphisme entre les deux. C'est seulement dans un deuxième chapitre que l'on passe des groupes topologiques aux groupes de Lie :

> Nous dirons qu'un groupe abstrait fini et continu est un *groupe de Lie* si l'on peut trouver, dans un voisinage suffisamment petit V_0 de l'élément unité, un système de coordonnées ou paramètres (réels) $a_1,a_2,\ldots,a_r$ tels que les paramètres c_i de l'élément C = AB résultant de la multiplication de l'élément A de paramètres a_i par l'élément B de paramètres b_i s'exprime par des fonctions

---

A. *A chaque voisinage V est associé une correspondance biunivoque déterminée entre les points de V et les points d'une hypersphère Σ de l'espace euclidien à n dimensions. Les points de V qui correspondent à des points intérieurs à Σ seront dits intérieurs à V, les autres constituent la frontière de V.*
B. *Tout point de la variété est intérieur à au moins un voisinage.*
C. *Soit V un voisinage quelconque, Σ l'hypersphère qui lui est associée, M un point intérieur à V, m le point correspondant de Σ et σ une hypersphère de centre m intérieure à Σ. Il existe un voisinage V' intérieur à V tel que les correspondants dans Σ de tous les points de V' appartiennent à σ.*
D. *Soit M un point appartenant à l'intérieur ou à la frontière de V, m son correspondant dans Σ, V' un voisinage contenant M à son intérieur. Il existe une hypersphère σ de centre m telle que les correspondants dans V de tous les points de Σ qui appartiennent à σ soient intérieurs à V'.*
E. Etant donnés deux points distincts M et N, on peut trouver deux voisinages ayant respectivement M et N à leur intérieur et n'ayant aucun point commun. » [Cartan 1930 1167].

Peu après est ajouté par axiome l'existence d'un recouvrement fini ou dénombrable par des voisinages.

[58] Nous nous autorisons ce terme qui n'apparaît pas sous la plume de Cartan.

$$c_i = \varphi_i(a,b)$$

> admettant des dérivées partielles continues des deux premiers ordres. [Cartan 1930 1179]

La structure différentielle sur la variété est installée implicitement à l'occasion de la formulation de l'hypothèse de différentiabilité de la multiplication. On est toutefois au plus loin de la formulation traditionnelle. Dans la période 1925-1930, on avait vu Cartan s'écarter de cette présentation traditionnelle en minorant le rôle de l'espace des variables transformées (x_i) et en mettant au centre de l'étude l'espace du groupe ; toutefois, les études étaient parfois implicitement locales, et les travaux globaux ne s'appuyaient pas sur une mise en place précise des objets. Cartan utilisait encore souvent une notion d'isomorphisme fondée sur l'isomorphisme des algèbres de Lie. Schreier lui fournit en 1930 les formulations permettant une rupture avec le schéma hérité de Lie et le renversement des priorités entre objets est achevé : on introduit d'abord les espaces (variétés), sur lesquels peuvent ensuite exister des structures de groupe, qui peuvent en outre être différentiables (auxquels cas on peut introduire les transformations infinitésimales), ces groupes peuvent enfin agir sur des espaces autres qu'eux-mêmes.

Un troisième et dernier aspect nous semble significatif de cette reconstruction autour du couple local/non-local, c'est l'effet de relecture de l'histoire de la théorie. Il est particulièrement visible dans le cas du troisième théorème fondamental de Lie, qui affirmait que toute algèbre de Lie (complexe) est l'algèbre d'un groupe de Lie ; c'était alors, si notre grille de lecture est la bonne, un théorème de passage de l'infinitésimal au fini. Cartan choisit dès sa préface d'en faire un exemple illustrant l'importance de la distinction entre point de vue « local » et « intégral » :

> Dans la théorie même des groupes de Lie, signalons l'insuffisance des démonstrations ordinaires du troisième théorème fondamental qui ne prouve l'existence, un système de constantes c_{ijk} étant donné, que d'un *morceau de groupe*, incapable peut-être de se prolonger pour former un groupe complet. [Cartan 1930 1166]

Dans le texte même Cartan analyse avec beaucoup de pédagogie l'origine de cette « insuffisance ». Il commence par résumer la démonstration usuelle : les relations entre les constantes de structure c_{ijk} garantissent l'intégrabilité du système de Pfaff déterminant les transformations finies agissant sur des variables u_i. Il y pointe ensuite une double insuffisance :

> Les ω_i sont des formes linéaires en du_1, du_2,…, du_r dont les coefficients sont des fonctions *analytiques entières* des variables u_i, mais le déterminant des coefficients des

> du_i n'est différent de zéro que dans un certain voisinage de l'origine $u_i = 0$. De plus le déterminant serait-il partout différent de zéro, cela ne suffirait pas pour assurer l'existence de transformations finies du groupe valable dans tout l'espace des u_i. [Cartan 1930 1181]

Double insuffisance qui conduit à une reformulation doublement locale du résultat usuel :

> *On a donc démontré en définitive l'existence d'un ensemble de transformations définies pour des valeurs suffisamment petites des paramètres, dans une région suffisamment petites de l'espace euclidien des* u_i, et le produit de deux transformations de l'ensemble, *dans le cas où ce produit est défini dans la région considérée,* appartient encore à l'ensemble. On a obtenu en somme un *morceau de groupe* opérant dans un *morceau d'espace***.** [Cartan 1930 1181]

Cartan explique ensuite que, des trois démonstrations données par Lie de son troisième théorème fondamental, la première est la meilleure, qui s'appuie sur le groupe adjoint. Lorsque le groupe est simple ou semi-simple, l'algèbre de Lie est celle d'un morceau de groupe *linéaire* qui peut alors se prolonger sans problème en un groupe. On notera que, dans sa relecture de l'énoncé et des démonstrations du troisième théorème fondamental de Lie, Cartan dénonce une insuffisance, une *erreur* de raisonnement : pas plus que Hadamard dans son étude de l'œuvre de Poincaré [Hadamard 1912] Cartan n'interprète la prise en compte explicite du couple local/global comme un simple changement de point de vue, une évolution des conventions d'écriture et de lecture des mathématiques. Quoiqu'il en pense, Cartan n'écrit pas que Lie savait bien que ses théorèmes étaient purement locaux et qu'il ne faisait qu'écrire à l'ancienne manière, selon des conventions qu'il est souhaitable de faire évoluer aux vues de la récente moisson de résultats globaux.

La trajectoire d' Élie Cartan sur la période 1922-1930 fournit un cas particulièrement riche pour l'étude de l'émergence de la polarité local – global. Quant à la méthode, on comprend pourquoi cette évolution des cadres conceptuels et rhétoriques est difficilement saisie par des études centrées sur l' histoire d'une *théorie* : les uns peuvent voir un Cartan géomètre, les autres un Cartan spécialiste des groupes et algèbres de Lie ; le passage au global est noté mais difficile à cerner. Une difficulté de ce type était d'ailleurs rencontrée par Thomas Hawkins en différents points de son travail monumental sur l'histoire de la théorie des groupes de Lie (par exemple, dans le cas de Lie [Hawkins 2000 p.79-87]).

Dans le travail de Cartan entre 1922 et 1930, on est dans un premier temps frappé par l'unité et l'originalité que confère certains éléments du cadre théorique : le calcul différentiel extérieur, l'approche de la géométrie par les groupes de transformations. Ces éléments distinguent sensiblement le travail d' Élie Cartan des autres recherches des années 1920 sur les connexions. Des auteurs tels Weyl, Schouten, Veblen et Eisenhart poursuive une quête d'intrinséquéité en généralisant la dérivation covariante, alors que Cartan utilise d'emblée le formalisme intrinsèque du calcul différentiel extérieur. Si les groupes jouent un rôle central pour tous nos auteurs, il joue pour Cartan un rôle particulier, à la fois groupe agissant sur un espace et espace modèle à partir duquel saisir les autres.

La stabilité de certains noyaux conceptuels et techniques pourrait plaider en faveur d'une lecture en terme d'enrichissement progressif du questionnaire : Cartan formulerait la théorie locale des espaces généralisés dans la période 1922-1925 puis, acquérant progressivement la maîtrise des outils de la topologie, aborderait les aspects globaux à partir de 1925. Nous proposons toutefois une lecture articulée autour d'une discontinuité fondamentale. Avant 1925, le questionnement s'articule autour d'une polarité infinitésimal – fini, le mode de rédaction est universellement et implicitement local. Des outils dont on voit après 1925 qu'ils jouent un rôle fondamental dans l'étude globale sont utilisés de manière implicitement locale. La clôture de cet horizon local est attestée par la manière dont certains aspects locaux sont présentés avant 1925 (en théorie des groupes de Lie ou en théorie des invariants intégraux), par l'évolution de la doctrine d'emploi des outils (après 1925), et par la requalification en 1930 de formulations classiques comme des erreurs.

Derrière la stabilité des termes, le sens de « voisinage », « variété » ou « groupe » change complètement après 1925. « Voisinage » pouvait désigner indifféremment des voisinages finis (nos voisinages au sens topologique actuel) et des voisinages infinitésimaux. Le terme de « variété » est, avant 1925, essentiellement un moyen de parler géométriquement de familles de coordonnées susceptibles de changements différentiables ; ce cadre suffit à relier les deux problématiques d'intrinséquéité et de dépassement de l'infinitésimal vers le fini. En 1930 au contraire, la variété est d'abord une totalité donnée ; les changements de carte articulent la question de l'intrinsèque – mais il suffit de considérer les changements de carte au voisinage d'un point générique – à celle de la topologie globale – les changements de cartes recollent aussi les ouverts de cartes. Le cas du terme « groupe » est le plus frappant : le passage d'une polarité infinitésimal – fini à une polarité local – global modifie la notion même de groupe ainsi que le lien entre un groupe de Lie et son algèbre de Lie. Ce qui se trouvait classiquement du côté « fini » de la polarité infinitésimal – fini (le « groupe » au sens de Lie) se retrouve au pôle « local » dans la local – global : l'ancienne notion de groupe se voit requalifiée en « germe de groupe », « pseudo-groupe » ou « morceau de groupe », alors que le nouveau groupe (qui, notons-le aussi, n'est plus avant tout un groupe agissant sur un espace) est variété (au sens nouveau) autant que groupe.

Cette discontinuité joue à plusieurs niveaux et selon des temporalités différenciées. Nous avons été amenés à étudier le niveau du contenu théorique (théorèmes, doctrine d'emploi d'outils techniques, problèmes légitimes), le niveau thématique et le niveau rhétorique (conventions de rédaction, présence / absence de certaines structures syntaxiques). Dans le cas d'Élie Cartan, l'évolution est rapide aux niveaux théorique et thématique, plus lente au niveau rhétorique. La maturation progressive à ce dernier niveau sur la période 1925-1930 franchit une étape grâce au changement de genre que représente le passage d'articles de recherches à une monographie de référence ; des éléments exogènes, fournis ici par le travail de Schreier, jouent alors un rôle central.

BIBLIOGRAPHIE

Abréviations usuelles

Ann. Sci. ENS	Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure
Bull. AMS	Bulletin of the American Mathematical Society
Bull. Sc. Math.	Bulletin des Sciences Mathématiques
Bull. SMF	Bulletin de la Société Mathématique de France
CRAS	Comptes rendus de l'Académie des Sciences (France)
Ens. Math.	L'enseignement Mathématique
Encyclopädie	Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen
Gött. Nachr.	Nachrichten von der König. Ges. Der Wissenschaft zu Göttingen
JDMV	Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung
J. de Math.	Journal de Mathématiques
JMPA	Journal de Mathématiques Pures et Appliquées
MA	Mathematische Annalen
MZ	Mathematische Zeitschrift
Proc. NAS	Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)

Akivis M., Rosenfeld B., 1993. *Élie Cartan (1869-1951), AMS*, Providence, 1993.

Blaschke W., 1923. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. II Affine Differentialgeometrie* (1ste und 2te Auflage), Springer, Berlin, 1923.

Blaschke W., 1924. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie I* (2te Auflage), Springer, Berlin, 1924.

Cartan E. 1913. Les groupes projectifs qui ne laissent invariants aucune multiplicité plane, *Bull. SMF* **41** (1913), p.53-96.

Cartan E. 1914. Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariants aucune multiplicité plane, *JMPA* **10** (1914), p.149-186.

Cartan E. 1915. La théorie des groupes continus et la géométrie (exposé d'après l'article allemand de G. Fano), *Encyclopédie des sciences mathématiques* **III.1**, réimpression Gabay, Paris, 1991. p.1-135 = *Œuvres Complètes* **III**.2 p.1727-1862.

Cartan E., 1922a. *Leçons sur les invariants intégraux* (3ème tirage), Hermann, Paris, 1971.

Cartan E., 1922b. Sur une définition géométrique du tenseur d'énergie d'Einstein, *CRAS* **174** (1922), p.437-439 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.613-615.

Cartan E., 1922c. Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion, *CRAS* **174** (1922), p.593-595 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.616-618.

Cartan E., 1922d. Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité, *CRAS* **174** (1922), p.734-736 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.619-621.

Cartan E., 1922e. Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique, *CRAS* **174** (1922), p.857-860 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.622-624.

Cartan E., 1922f. Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein, *CRAS* **174** (1922), p.1104-1107 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.625-628.

Cartan E., 1923. Sur les variétés à connexions affines et la théorie de la relativité généralisée, *Ann. Sci. ENS* **40** (1923), p.325-412 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.659-746.

Cartan E., 1924a. Les récentes généralisations de la notion d'espace, *Bull. Sc. Math.* **48** (1924), p.294-320 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.863-890.

Cartan E., 1924b. Sur les variétés à connexions affines et la théorie de la relativité généralisée (suite), *Ann. Sci. ENS* **41** (1924), p.1-25 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.799-824.

Cartan E., 1924c. Sur les variétés à connexions projectives, *Bull. SMF* **52** (1924), p.205-241 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.825-862.

Cartan E., 1925a. La géométrie des espaces de Riemann, *Mémorial des Sciences Mathématiques* **IX**, Gauthier-Villars, Paris, 1925.

Cartan E., 1925b. La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielle (conférence faite au Congrès de Toronto en 1924), *Ens. Math.* **24** (1925), p.1-18 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.891-904.

Cartan E., 1925c. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés et l'*Analysis Situs, Assoc. Av. Sc.* **49** (1925), p.47-49 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.919-920.

Cartan E., 1925d. Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples, *Bull. Sc. Math.* **49** (1925), p.130-152 = *Œuvres Complètes* **I**.1 p.531-553.

Cartan E., 1925e. Sur les variétés à connexions affines et la théorie de la relativité généralisée (2ème partie), *Ann. Sci. ENS* **42** (1925), p.17-88 = *Œuvres Complètes* **III**.2 p.921-992.

Cartan E., 1926a. L'application des espaces de Riemann et l'*Analysis Situs, Assoc. Av. Sc.* **50** (1926), p.53 = *Œuvres Complètes* **III**.2 p.993-995

Cartan E, 1926b. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés, *Acta. Math.* **48** (1926), p.1-42 = *Œuvres Complètes* **III**.2 p.997-1038.

Cartan E., Schouten J.A., 1926. On riemannian geometries admitting absolute parallelism, *Proc. Amsterdam* **29** (1926), p.933-946 = *Œuvres Complètes* **III**.2 p.1067-1080.

Cartan E., 1927a. La géométrie des groupes de transformations, *JMPA* **6** (1927), p.1-119 = *Œuvres Complètes* **I**.2, p.673-792.

Cartan E., 1927b. La théorie des groupes et la géométrie, *Ens. Math.* **26** (1927), p.200-225 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.841-866.

Cartan E., 1927c. Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupes fondamental simple, *CRAS* **184** (1927), p.1628-1630 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.667-669.

Cartan E., 1927d. Sur la possibilité de plonger un espace de Riemann dans un espace euclidien, *Ann. Soc. Pol. Math.* **6** (1927), p.1-7 = *Œuvres Complètes* **III**.2 p.1091-1098.

Cartan E., 1927e. Sur la topologie des groupes continus simples réels, *CRAS* **184** (1927), p.1036-1038 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.664-666.

Cartan E., 1927f. Sur les formes riemanniennes des géométries à groupe fondamental simple, *CRAS* **185** (1927), p.96-98 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p. 670-672.

Cartan E., 1927g. Sur les géodésiques des espaces de groupes simples, *CRAS* **184** (1927), p.862-864 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.661-663.

Cartan E., 1928a. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

Cartan E., 1928b. Sur les nombres de Betti des espaces de groupe clos, *CRAS* **187** (1928), p.196-198 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.999-1001.

Cartan E., 1929. Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces, *Ann. Soc. Pol. Math.* **8** (1929), p.181-225 = = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.1081-1126.

Cartan E., 1930. La théorie des groupes finis et continus et l'*Analysis situs*, *Mémorial des Sciences Mathématiques* **XLII**, Gauthier-Villars, Paris, 1930 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.1165-1226.

Cartan E., 1931. Notice sur les travaux scientifiques, *Œuvres Complètes* **I**.1 p.1-98.

Cartan E. 1952-1955. *Œuvres Complètes*, Gauthier-Villars, Paris, 1952-1955.

Cartan E., Einstein A., 1979. *Lettres sur le parallélisme absolu* 1929-1932 (R. Debever ed., J. Leroy, J. Ritter trad.), Académie Royale de Belgique et Princeton University Press, Bruxelles, 1979.

Chorlay R., 2007. *L'émergence du couple local / global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux (1851-1953)*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Chorlay R., à paraître. From Problems to Structures : the Cousin Problems and the Emergence of the Sheaf Concept, *Archive for History of Exact Sciences*. A paraître.

Chorlay R., à paraître. *Mathématiques globales. L'émergence du couple local – global dans les théories géométriques (1851-1953)*, coll. Sciences dans l'Histoire, Librairie Albert Blanchard, Paris. A paraître.

Fano G., 1907. Kontinuirliche geometrische Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip, *Encyclopädie* **III.1.1** (1907-1910), p.289-388.

Goldstein C., 1999. Local et global, *Dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences*, D. Lecourt (dir.), PUF, Paris, 1999. p.571-575.

Gray Jeremy (ed.), 1999. *The Symbolic Universe : Geometry and Physics 1890-1930*, Oxford UP, Oxford, 1999.

Hadamard J., 1912. L'œuvre mathématique de Poincaré, *Acta Mathematica* **38** (1921), p.203-287.

Hawkins T., 2000. *Emergence of the Theory of Lie Groups – An Essay in the History of Mathematics 1869-1926*, Springer, NY, 2000.

Hopf H., 1925. *Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik von Mannigfaltigkeiten* (Dissertation), Friedrich-Wilhelms-Universität, Berlin, 1925

Hopf H., 1926. Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, *MA* **95** (1926), p.313-339.

Hurwitz A., 1897. Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, *Gött. Nachr.* 1897, p.71-90.

Katz V., 1979. The History of Stoke's Theorem, *Mathematics Magazine* **52** (1979), p.146-156.

Katz V., 1981. The History of Differential Forms from Clairaut to Poincaré, *Historia Mathematica* **8** (1981), p.161-188.

Katz V., 1985. Differential Forms – From Cartan to De Rham, *Archive for History of Exact Sciences* **33** (1985), p.321-336.

Klein F. 1893. *Conférences sur les mathématiques* (Congrès de Mathématiques de Chicago, 1893. Trad. Laugel), Hermann, Paris, 1898.

Lie S., 1888. Theorie der Transformationsgruppen I (unter Mitwirkung von Dr. F. Engel), réimpression de la seconde édition Chelsea Pub. Co., NY, 1970.

Poincaré H., 1887. Sur les résidus des intégrales doubles, *Acta Math.* **9** (1887), p.321-380 = *Œuvres* **3**, p.440-489.

Poincaré H., 1899. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (tome III), Gauthier-Villars, Paris, 1899.

Rham G., 1981. *Œuvres Mathématiques*, éditions de l'Enseignement Mathématique, Genève, 1981.

Sharpe R.W., 1997. *Differential Geometry : Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New-York, 1997.

Scholz E., 1980. *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriff von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser, Boston, 1980.

Scholz E., 1999. Weyl and the Theory of Connections, [Gray 1999], p.260-284.

Scholz E. (ed.), 2001a. *Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie and a General Introduction to his Scientific Work*, Birkhäuser, Basel-Boston, 2001.

Scholz E., 2001b. Weyls Infinitesimalgeometrie, 1917-1925, [Scholz 2001a], p.48-104.

Schreier O., 1926. Abstrakte kontinuirlichen Gruppen, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgische Universität* **4**, Leipzig, Teubner, 1926. p.15-32.

Schreier O., 1927. Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im Groβen, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgische Universität* **5**, Leipzig, Teubner, 1927. p.233-244.

Schreier O., 1928. Über neue Untersuchungen in der Theorie der kontinuirlichen Gruppen, *JDMV* **37** (1928), p.113-122.

Veblen O., 1927. Invariants of Quadratic Differential Forms, *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics* **24**, Cambridge UP, London, 1927.

Veblen O, Whitehead J.H.C., 1931. A Set of Axioms for Differential Geometry, *Proc. NAS* **17**(10) (1931), p.551-561.

Veblen O., Whitehead J.H.C., 1932. The Foundations of Differential Geometry, *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics* **29**, Cambridge UP, London, 1932.

Weyl H., 1913. *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Teubner, Leipzig, 1913 = Die Idee der Riemannschen Fläche (hrsg. Von R. Remmert), *Teubner Archiv zur Mathematik* **5**, Teubner, Leipzig, 1997.

Weyl H., 1918. Reine Infinitesimalgeometrie, *MZ* **2** (1918), p.384-411 = *Gesammelte Abhandlungen* **2**, p.1-28.

Weyl H., 1919b. *Raum, Zeit, Materie* (2te, ungeanderte Auflage), Springer, Berlin, 1919.

Weyl H. 1922a. Das Raumproblem, *JDMV* **31** (1922), p.205-221 = *Gesammelte Abhandlungen* **2**, p.329-344.

Weyl H., 1922c. Temps, Espace, Matière (trad. G. Juvet et R. Leroy), Blanchard, Paris, 1922.

Weyl H., 1923. *Mathematische Analyse des Raumproblems*, Springer, Berlin, 1923.

Weyl H., 1924a. Das Gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung, *Gött. Nachr.* 1924, p.218-224 = *Gesammelte Abhandlungen* **2**, p.461-467.

Weyl H., 1924b. Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuirlichen Gruppen, *Sitzungsbericht der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1924, p.338-345 = *Gesammelte Abhandlungen* **2**, p.453-460.

Weyl H. 1925. Theorie der Darstellung kontinuirlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen I, II,III (resp. *MZ* **23** (1925), p.271-309, *MZ* **24** (1926), p.328-376), *MZ* **24** (1926), p.377-395), *Gesammelte Abhandlungen* **2**, p.543-647.

Weyl H., 1929. On the Foundation of Infinitesimal Geometry, *Bull. AMS* **35** (1929), p.716-725 = *Gesammelte Abhandlungen* **3**, p.207-216.