

UNIVERSITE PARIS 7 – DENIS DIDEROT
ECOLE DOCTORALE : SAVOIRS SCIENTIFIQUES

THESE DE DOCTORAT
Spécialité : Histoire des mathématiques

Renaud CHORLAY

L'émergence du couple local / global dans les théories géométriques,
de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux
1851-1953.

Thèse dirigée par Christian HOUZEL

Soutenue le 3 décembre 2007

JURY

M. Christian HOUZEL
M. Pierre CARTIER
M. Erhard SCHOLZ
M. Jean-Jacques SZCZECINIARZ
M. Alain YGER

Remerciements.

Je souhaite remercier M. Christian Houzel, pour l'accueil favorable qu'il me fit lorsque, il y a de cela six ans, je lui soumis ce sujet d'une ampleur inquiétante. Il a accompagné mes lectures puis les étapes de la rédaction, faisant preuve d'une exigence sans laquelle la bienveillance n'est qu'une forme d'indifférence.

Je souhaite remercier M. Pierre Cartier pour le plaisir et l'honneur qu'il me fait en acceptant de participer au jury.

Je souhaite remercier les membres du jury pour leurs remarques et conseils. J'espère qu'ils ont trouvé dans ce travail un intérêt susceptible de les payer de leur peine. Je souhaite remercier particulièrement le Professeur Scholz, dont les travaux m'ont accompagné depuis le début ; M. Alain Yger qui, en acceptant d'être rapporteur, contribue à la vigueur du lien entre historiens des mathématiques et mathématiciens ; M. Jean-Jacques Szczeciniarz, en espérant que le contraste entre la communauté de nos centres d'intérêts et la sensible différence de nos approches continue à enrichir le dialogue amorcé

Je souhaite remercier les membres de l'équipe REHSEIS, auprès desquels j'ai découvert la vie de la recherche ainsi que des thèmes ou approches souvent bien différents des miens. Que Karine Chemla, Marco Panza et David Rabouin, en particulier, acceptent l'expression de ma reconnaissance : le désir de les intéresser m'a constamment stimulé.

Je souhaite remercier les membres du groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Paris 7 pour leur enthousiasme communicatif et leur goût d'une histoire des mathématiques qui sait enrichir l'enseignement : Alain Bernard, Philippe Brin, Martine Bühler, Odile Kouteynikoff, Anne Michel-Pajus. J'ai pu apprécier les mêmes qualités chez les membres de la commission inter-IREM « Histoire et Epistémologie des Mathématiques », au premier rang desquels Evelyne Barbin. Je remercie également l'IREM de Paris 7 pour son soutien moral et institutionnel : Michèle Artigue, René Cori ; pour le travail de reprographie, Nadine Locufier.

Je souhaite enfin remercier ceux dont la thèse a poussé parallèlement à la mienne, quoique toujours plus rapidement : Emmanuel Barot, Frédéric Brechenmacher, Sébastien Maronne, Anne Robadey.

Table des matières

Remerciements	2
Table des matières	3
Introduction	11
1 ^{ère} partie : ce que Riemann et Poincaré nous lèguent	
Chapitre 1 : Riemann	25
I. Les <i>Principes fondamentaux</i> de 1851	25
1. <i>Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen</i>	26
i. Analyse	26
ii. Synthèse	31
2. Surface au-dessus d'un plan complexe	33
i. Description initiale	34
ii. Des résultats d'analyse sur les surfaces	38
iii. Surface de Riemann associée à une fonction : uniformisation, inversion	43
3. Place du couple local / global	47
i. Une analyse globale ?	47
ii. Un point de vue géométrique non-ensembliste	49
II. <i>Théorie des fonctions abéliennes</i> (1857)	53
1. Position du problème	53
2. Une nouvelle formulation du problème	54
3. Surface d'une fonction algébrique : adaptations et innovations	59
i. Adaptations	60
ii. Innovation : la surface dépliée	61
4. Légalité du lieu : des théorèmes globaux	62
5. Corps de fonctions, classe de « surfaces au-dessus » : quel référent pour une théorie globale ?	67
III. Lieux et fonctions : deux autres cas de figure	71
1. <i>Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie</i> (1854)	71
i. Aspects non-métriques	71
ii. Digression : la théorie métrique intrinsèque des surfaces chez Gauss	76
iii. Propriétés métriques et propriétés d' <i>Analysis situs</i>	79
iv. Comparaison avec l'Analyse complexe	82
2. <i>Contribution à la théorie des fonctions représentables par la série de Gauss</i> <i>$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$</i> (1857)	84
Conclusion	91
Chapitre 2 : lectures de Riemann	93
I. Les <i>Leçons sur la théorie riemannienne des intégrales abéliennes</i> de Carl Neumann (1865 et 1884)	93
1. Cas des fonctions uniformes.	94

2.	Fonctions algébriques et surfaces de Riemann	101
3.	Fonctions sur une surface de Riemann	112
4.	Comparaison des deux éditions	119
5.	Conclusion	121
II.	Une nouvelle génération de « démonstrations d'existence ».	123
1.	H.A. Schwarz	123
2.	C. Neumann	127
III.	Félix Klein	135
1.	Le cadre : transfert local, légalité du lieu, surface idéale	135
2.	Les moyens : le qualitatif <i>contre</i> l'ensembliste	142
3.	Les « multiplicités » : au delà de la dimension	147
i.	Au-delà de la dimension	147
ii.	Orientabilité et revêtement	151
iii.	Le <i>Raumproblem</i>	155
4.	Conclusion	158
Chapitre 3 : Poincaré		161
I.	Le dépassement du local, une constante chez Poincaré	161
1.	L'expression du local	161
2.	Le dépassement du travail « au voisinage » : un objectif explicite	167
3.	Le paradigme $C - F + N = 2p-2$	171
4.	Une utilisation <i>méta</i> en 1907	180
5.	Un thème parmi d'autres	182
II.	Uniformisation et revêtements	186
1.	<i>Sur un théorème général de la théorie des fonctions</i> (1883)	186
i.	Une stratégie riemannienne	186
ii.	Représentation conforme des surfaces simplement connexes : entre Riemann et Weierstrass	190
2.	<i>Sur l'uniformisation des fonctions analytiques</i> (1907)	196
i.	L'idée de surface de Riemann selon Poincaré	196
ii.	Un outil de démonstration	203
III.	Représentation des fonctions méromorphes de deux variables	213
1.	Les théorèmes à une variable	213
2.	La représentation des fonctions méromorphes de deux variables : Poincaré	1883 217
3.	La thèse de Pierre Cousin (1895)	222
2 ^{ème} partie : évolution des cadres fondamentaux de l'Analyse		
Introduction		229
Chapitre 4 : Une sonde : évolution de la notion de maximum.		235
I.	Maximum local, maximum global	235

1.	En 2007	235
2.	Le terme « maximum » au 19 ^e siècle	239
i.	Une saisie narrative	239
ii.	Stabilité du sens local	242
iii.	Une place pour le maximum global ?	247
II.	Un théorème de Weierstrass et ses lecteurs	250
1.	Un théorème de Weierstrass	251
i.	Le cours de 1878	251
ii.	Le cours de 1886	261
2.	Réception et usages d'un énoncé	265
i.	Cantor	266
ii.	Heine	269
iii.	Darboux	272
III.	Périodes et enjeux	278
1.	De la numérisation de l'Analyse à l'autonomisation du niveau ponctuel	278
i.	Cauchy et la numérisation de l'Analyse	278
ii.	Continuité et discontinuité selon Cauchy	281
iii.	Fonction arbitraire et niveau ponctuel	288
2.	Un contexte dominant : atteint / pas atteint	291
3.	Éléments de périodisation	296
Chapitre 5 : fin du monde de la grandeur		301
I.	Monde de la grandeur vs monde ensembliste	303
1.	Le point de vue universellement local	303
2.	La grandeur variable comme fonction et domaine	305
i.	Référence au lieu et régime théorique	305
ii.	La fonction dans le monde de la grandeur	308
3.	Une ressource classique : <i>Punkt / Stelle / Lage</i>	316
II.	Figures de l'entre-deux (1)	321
1.	L'intersection : regard conventionnel, absence de convention	321
2.	Domaine, image	327
Chapitre 6 : Le local		339
I.	L'« invention » du voisinage	339
1.	« au voisinage » ou « sur un voisinage » : la question de l'indétermination	339
i.	Une solutions intermédiaire : « le voisinage »	339
ii.	L'apport de Weierstrass	343
2.	Le local et l'infinitésimal	347
i.	Le continu saisi par l'infinitésimal	347
ii.	Des pratiques en partage : mathématiques et physique mathématique	354
iii.	Les ressources du monde de la grandeur	355
3.	Voisinage weierstrassien : variation, dimension	359
II.	Figure de l'entre-deux (2) : le <i>Traité</i> de Lie	365
1.	1880 : un point de vue universellement local	365
2.	1888 : les outils de la « rigueur »	371

3. Lectures de Lie	381
i. Dispositif théorique et horizon théorique	381
ii. Les « considérations critiques » de Study	385

3^{ème} partie : les voies de l'explicitation

Chapitre 7 : Osgood : le *méta* **391**

I. Une pédagogie ensembliste	392
1. « Ensembles » 1900	392
2. Une analyse « moderne »	395
3. Les formes de l'attention au lieu	398
II. <i>Im Kleinen / im Grossen</i> comme couple <i>méta</i>	404
1. Une lecture de théorèmes de Picard	404
2. Une note de l' <i>Encyclopädie</i>	409
3. Des théorèmes de séparation des branches	414
4. Représentation conforme et inversion	417
5. Autres occurrences	423

Chapitre 8 : Hadamard : le thème **431**

I. Inversion locale et inversion globale	431
II. Le rôle de l' <i>Analysis situs</i>	438
1. Les géodésiques des surfaces de courbure négative	438
2. La <i>Leçon inaugurale</i> de 1909	440
III. L'analyse de l'œuvre mathématique de Poincaré	447
1. Un schéma triple	448
2. Une épistémologie des problèmes	451
3. Dépassement du local vs niveau global	459

Chapitre 9 : Weyl (1913) : la structure **465**

I. Les enjeux d'une préface	465
1. Une démarche « riemannienne » dépassée ?	465
i. Une présentation standardisée	466
ii. Une démarche critiquée	469
iii. Une démarche concurrencée	472
2. Légalité primitive du lieu	475
II. Caractériser et se donner une surface de Riemann	479
1. L'accès par le local	479
i. Lecture de Weierstrass	479
ii. Lecture de Hilbert	484
2. Structure topologique	487
3. Structure analytique	492
III. Les objets-sur	499
1. Donnée locale, donnée localisée	499
2. Les revêtements	503

4^{ème} partie : le passage au global

Chapitre 10 : variété du « passage au global » dans les années 1920 509

I.	Morse et le calcul des variations <i>in the large</i>	509
	1. Un questionnement qualitatif en héritage	509
	2. La théorie de Morse en dimension finie	513
	3. L'héritage du calcul des variations <i>in the small</i>	518
	i. Le cours de Bolza	518
	ii. Le voisinage d'une fonction	523
	4. <i>Calculus of variations in the large</i>	526
II.	Autour de Blaschke	530
	1. Des perspectives globales marginales dans une discipline en renouvellement	531
	i. Struik 1933	531
	ii. L' <i>Encyclopädie</i>	533
	iii. Le cours d'Eisenhart	536
	2. Blaschke : une structuration didactique par <i>im Kleinen / im Grossen</i>	541
	i. Le Traité de géométrie différentielle	541
	ii. De « nouveaux courants »	547
	3. Topologie et métrique chez Hopf et Rinow (1925-1932)	550
	i. La thèse de Hopf (1925)	550
	ii. La topologie des espaces riemanniens complets	554

Chapitre 11 : Weyl et Cartan : renouvellement des perspectives locales (1918-1925) 559

I.	Géométrie et relativité chez H. Weyl : un programme d'infinitésimalisation	559
	1. Action à distance, loi intégrale et physique « de contact »	560
	2. Une notion de multiplicité n -dimensionnelle indépendante de celle de 1913 ?	562
	3. Les termes d'une saisie infinitésimale	566
	i. Un programme d'infinitésimalisation	566
	ii. Voisinage infinitésimal et espace tangent	567
	iii. Comparaison avec l' <i>Idée de surface de Riemann</i>	572
	4. Les connexions	573
	5. Géométrie et physique	578
	i. La géométrie purement infinitésimale (1918)	578
	ii. Le <i>Raumproblem</i> (1923)	579
	6. Une place pour les interrogations globales ?	582
II.	Le renouveau de la géométrie différentielle selon Elie Cartan (1922-1925)	588
	1. Une pédagogie de l'« exclusivement local »	589
	2. Des choix techniques différents de ceux de Weyl	592
	3. Un horizon local	598
	4. Espace(s), Géométrie(s)	599
	i. L'espace tangent	600
	ii. L'espace observé, son groupe, l'espace de observateurs	602
	iii. Groupes, « espaces »	606
	5. Réconcilier les points de vue de Klein et de Riemann	607
	i. Représentations tensorielles et tenseurs irréductibles	607

ii.	Le groupe d'holonomie	609
Chapitre 12. Weyl et Cartan : le passage au global (1925-1930)		615
I.	Problèmes globaux en théorie des groupes de Lie	615
1.	Le groupe de Lie comme domaine d'intégration : Hurwitz 1897	615
2.	Weyl : des « grandeurs linéaires simples » à la topologie des groupes de Lie (1924-1925)	620
3.	Le cas général : représentation linéaire des algèbres semi-simples	626
4.	Problèmes <i>im Grossen</i> en théorie des groupes continus : Otto Schreier	631
II.	Le passage au global chez Elie Cartan (1925-1930)	640
1.	Une réaction au travail de Weyl sur le « fondement du calcul tensoriel »	640
2.	Le <i>Gestalt switch</i> de 1925	645
3.	Sur la forme : un apprivoisement progressif	649
4.	Sur le fond : l'exploration de l' « espace du groupe »	652
5.	Une refonte du cadre théorique (1930)	656
5 ^{ème} partie : un couple, des structures		
Chapitre 13 : Les variétés selon Veblen et Whitehead (1932)		661
I.	Les axiomes de 1931	661
II.	Un objectif de synthèse entre géométrie infinitésimale et <i>Analysis situs</i>	664
III.	Localisation, globalisation	666
1.	Du groupe au pseudo-groupe : localiser le Programme d'Erlangen	667
2.	Du pseudo-groupe aux cartes locales	669
3.	Des sous-variétés aux variétés abstraites	673
IV.	Un bilan des années 1920	675
1.	Une prise en compte tardive du couple local/global	676
2.	Les espaces associés : le modèle de l'holonomie	678
V.	Une position historique complexe	682
Chapitre 14 : fibrés.		685
I.	Topologie et Dynamique chez Harold Hotelling	685
II.	Hopf : topologie des fibrés sans le concept de fibré	689
III.	Seifert et Threlfall : les variétés tridimensionnelles fibrées en cercles	693
1.	Depuis la base : les espaces d'éléments linéaires	693
2.	Une origine dans le <i>Raumproblem</i>	696
3.	Depuis l'espace total : les variétés fibrées et leurs morphismes	698
IV.	Les espaces en sphère de Whitney	701
1.	Un recentrement du travail sur les applications entre variétés différentiables	701
2.	Les espaces en sphère	707
V.	Steenrod : prolongements des sections et coefficients locaux	710
1.	L'intrinsèque et le global	710
2.	La question des sections	712
i.	Le champ comme section : une reprise ensembliste	712
ii.	Prolongement de section et coefficients locaux	714

VI.	Ehresmann : Cartan par les structures (1932-1939)	718
	1. Les espaces homogènes	718
	2. Les espaces localement homogènes	721
	3. Les espaces infinitésimalement homogènes	726
VII.	Ehresmann : Cartan par les structures (1942-)	728
	1. Les fibrés	728
	i. Construction de fibrés et association de fibrés	728
	ii. Les fibrés vectoriels	730
	2. Le jeu des structures	733
Chapitre 15 : faisceaux		735
I.	Des problèmes de Cousin aux « idéaux de domaines indéterminés »	736
	1. Avant Oka	736
	2. Les premiers résultats d'Oka	740
	3. L'étude globale des idéaux de fonctions holomorphes	743
II.	Les « tanks »	750
	1. Un faisceau d'idées	751
	i. La topologie par les ouverts	751
	ii. Les partitions de l'unité	753
	iii. « Localisation » et « recollement des morceaux » chez Schwartz	757
	iv. Cohomologie à coefficients dans un faisceau : Leray	758
	2. Cohomologie des faisceaux et problèmes globaux	761
	i. Faisceaux et fibrés	761
	ii. Une forme de problème	765
	iii. L'outil cohomologique	768
Conclusion générale		773
Bibliographie		777

Introduction.

All mathematics is more or less « in the large » or « in the small ». It is highly improbable that any definition of those terms could be given that would be satisfactory to all mathematicians. Nor does it seem necessary or even desirable that hard and fast definitions be given. The German terms im Grossen and im Kleinen have been used for some time with varying meanings. It will perhaps be interesting and useful to the reader to approach the subject historically by way of examples. [Morse 1967 259]

Ainsi Marston Morse introduit-il en 1967 un exposé intitulé *What is analysis in the large ?* dans un colloque consacré à la *Global differential geometry*. Mathématicien célèbre, pionnier de l'Analyse globale dans les années 1920, Morse n'était bien sûr pas tenu de donner, devant un public de mathématiciens, une définition des termes « *in the small* » / « *in the large* », « *im Kleinen* » / « *im Grossen* », ou « local » / « global » ; les termes forts avec lesquels il rejette l'idée d'une définition – sans doute ni possible ni vraiment utile – pourraient toutefois surprendre un lecteur accoutumé à ce que les notions mathématiques soient définies. L'entrée par des exemples tirés de l'histoire de l'Analyse globale semble plus appropriée à Morse et a sans doute trait à une spécificité d'un couple dont le rôle fondamental dans « à peu près toutes les mathématiques » et le contenu difficile à expliciter autrement que par des exemples indiquent une nature épistémologique délicate à préciser. Quoiqu'une étude plus purement épistémologique soit aussi pleinement légitime, c'est la voie de l'étude historique que nous emprunterons dans ce travail, gageant qu'une attention minutieuse à l'histoire de l'utilisation de termes « *used for some time with varying meanings* » – mais pas en usage depuis toujours – ne manquera pas d'éclairer la question.

Suivons l'exemple de Marston Morse en introduisant au moyen de deux exemples quelques notions qui nous seront d'un usage constant. Soit, tout d'abord, la notion de maximum d'une fonction réelle d'une variable réelle, notion sous laquelle on en distingue en fait deux, dès l'enseignement secondaire : une notion de maximum local et une notion de maximum (implicitement : global) ; on peut aussi voir dans ces deux notions précises et parfaitement définissables deux points de vue différents sur la notion générale de maximum. On peut considérer qu'une fonction f présente un maximum pour une valeur particulière x_0 de la variable x , si la valeur prise par la fonction en x_0 est supérieure aux valeurs prises pour des

valeurs de la variable proches de x_0 : la fonction « passe » par un maximum. La spécificité de x_0 se dévoile par un regard qui parcourt une famille de valeurs voisines, famille dont l'étendue n'a pas à être précisée, un voisinage de x_0 ... c'est la notion de maximum aujourd'hui qualifiée de *locale*. On peut d'autre part se demander quelle est la plus grande valeur prise par la fonction f , ce qui nécessite de se fixer *a priori* un domaine de définition ou un domaine d'étude : cette attention portée à l'ensemble des valeurs atteintes, dépendant de la fixation préalable d'un ensemble de valeurs possibles de la variable, est caractéristique d'une perspective *globale*. On peut associer à ces deux notions des théorèmes élémentaires. Par exemple on enseignera qu'une fonction continûment dérivable admet un maximum local en x_0 si et seulement si la fonction dérivée f' s'y annule en passant du positif au négatif ; on enseignera qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné admet un maximum. On pourrait pousser assez loin l'étude des deux notions en montrant qu'elles découpent dans l'univers mathématique des réseaux disjoints l'un de l'autre : l'une ne nécessite pas – au sein toutefois d'un espace à la structure suffisamment riche – la déclaration préalable d'un domaine d'étude, l'autre ne prend sens que dans ce cadre ; l'une s'inscrit dans un univers fonctionnel structuré par l'outil différentiel, l'autre dans un vaste cadre de topologie ensembliste ; le théorème associé au maximum local fournit une méthode pratique de repérage, le théorème associé au maximum global est un théorème abstrait d'existence manifestant la loi commune à laquelle sont soumises les fonctions continues qui « vivent » sur un intervalle fermé borné. Du point de vue historique enfin, le point de vue local sur le maximum est partagé durant tout le 19^e siècle comme une évidence que les mathématiciens ressentent rarement le besoin d'explicitier, le point de vue global se diffuse lentement dans le dernier tiers de ce siècle à partir des cours dans lesquels Weierstrass élabore une nouvelle façon de parler des fonctions, dont le qualificatif de « rigoureux » que la tradition lui a accolé est loin d'épuiser la portée.

Prenons un deuxième exemple, un peu moins élémentaire et un peu plus géométrique, en cherchant ce qui distingue une sphère d'un tore. On peut bien sûr les représenter schématiquement au tableau, ou évoquer un ballon et une chambre à air ; s'il est parfaitement intuitif qu'ils diffèrent, il n'est pas pour autant aisé de dire *en quoi* ils diffèrent. Il est même dans un premier temps plus aisé de dire ce qu'ils ont en commun : considérés intrinsèquement, ainsi que le ferait un insecte très petit rampant sur la surface et insensible à la vue d'ensemble qu'on peut en avoir en la regardant dans l'espace à trois dimensions, la sphère et le tore partagent la propriété d'être des variétés lisses à deux dimensions. On peut explicitier intuitivement ce dernier point de deux façons différentes. On peut dire que de

chaque point on peut s'éloigner dans une infinité de directions et que cette infinité est de même nature que celle rencontrée en s'éloignant d'un point dans un plan ; on formule ainsi une caractérisation *dimensionnelle* et *infinitésimale*, traduisant le fait que dans l'infiniment petit une surface est assimilable en chaque point à son plan tangent en ce point. On peut aussi dire qu'autour de chaque point on peut découper un morceau, petit mais pas *infinitement* petit, ayant la même forme qu'un disque dans un plan ; le point de vue est ici local en ce qu'il renvoie à la notion de voisinage d'un point, mais pas local tout à fait de la même façon que lorsqu'on parle de maximum local d'une fonction. Pour ce qui est du maximum local, la singularité d'un point particulier traduit un comportement sur un voisinage de ce point, alors que dans la caractérisation des variétés bidimensionnelles on souhaite au contraire ne distinguer aucun point : tout point admet un voisinage assimilable à un disque. On arrive ainsi à la notion de recouvrement ouvert qui, tout bien considéré, peut être énoncée sans recours à la notion de point de rattachement. Il est certes mathématiquement équivalent de dire que tout point admet un voisinage assimilable à un disque ou qu'on peut recouvrir l'espace par des parties assimilables à des disques ouverts, mais le point de vue n'est sensiblement pas le même. Cette variété de points de vue sur l'équivalence *locale* de la sphère et du tore renvoie automatiquement à la question de la distinction de ces deux surfaces dans la catégorie des questions globales, question à laquelle l'étude des champs continus de vecteurs tangents fournit, par exemple, une réponse. On sait construire sur le tore un tel champ dont aucun vecteur n'est le vecteur nul ; on sait démontrer qu'une telle construction est impossible sur la sphère : tout champ continu de vecteurs tangents y dégénère en au moins un point, on ne peut s'y donner de champ continu de directions tangentes. Ici encore les aspects globaux se manifestent dans un théorème d'existence abstrait – existence de points singuliers en l'occurrence – lorsqu'on considère sur un domaine fixé par avance des fonctions d'un type donné, non plus les fonctions numériques continues comme dans la question du maximum mais les champs continus de vecteurs tangents. Les intervalles fermés bornés tout comme les différentes surfaces imposent aux fonctions qui « vivent » sur eux des propriétés communes ; au delà de la multiplicité des fonctions possibles se manifeste une *légalité primitive du lieu* qui était insaisissable au niveau local. Si l'on revient à l'histoire, on sait que ce point de vue global sur les singularités des courbes intégrales d'équations différentielles ordinaires prend sa source dans des travaux de Henri Poincaré datant de la première moitié des années 1880.

Si l'analyse d'exemples bien choisis apporte son lot de distinctions utiles et contribue à enrichir l'intuition que l'on a du problème, elle ne peut suffire à le délimiter, et cette question

de la délimitation est particulièrement sensible dans le cas d'un couple « *in the small* » / « *in the large* » dont on nous dit qu'il concerne plus ou moins toutes les mathématiques avec, qui plus est, des significations variables. Abordons dans ce deuxième temps, non l'interrogation épistémologique directe « qu'est-ce que le couple local/global ? », mais la problématisation de l'étude historique : « *de quoi fait-on l'histoire quand on décide d'étudier l'émergence du couple local/global ?* » On peut concevoir au moins trois angles d'attaque.

On pourrait tout d'abord envisager d'étudier l'histoire de grands théorèmes, de structures, d'outils qui semblent depuis la deuxième moitié du 20^e siècle constituer des éléments fondamentaux pour qui veut rentrer dans les mathématiques globales. On sélectionnerait un petit nombre de textes représentatifs d'une mathématique qui s'expose, organise ses acquis et ses objectifs autour du couple local/global : par exemple la conférence que Henri Cartan donne en 1950 sur les *Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes* [Cartan 1950b], caractéristique de l'émergence de la structure de faisceau et d'un questionnement systématiquement formulé en terme de passage du local au global ; par exemple le cours sur les groupes de Lie que Claude Chevalley fait paraître en 1946 [Chevalley 1946] dans lequel il propose une synthèse entre la perspective globale inspirée des travaux de Hermann Weyl et d'Elie Cartan, et le travail intrinsèque sur les variétés abstraites tel que développé par Hassler Whitney. Si ce mode de sélection peut sembler pertinent, il risque toutefois de déboucher sur une longue série de monographies – sur l'histoire de la notion de variété abstraite et de la structure de faisceau, des partitions de l'unité et faisceaux fins, du théorème d'inversion locale, de la notion de revêtement, de la question de l'orientabilité des variétés et de l'intégration géométrique etc. – toutes intéressantes en elles-mêmes mais dont la juxtaposition présenterait deux défauts principaux. Le premier défaut, général, de résulter d'une *sélection rétrospective* propre, certes, à répondre à la légitime curiosité du mathématicien pour sa propre discipline ; démarche patrimoniale plus qu'interrogation historique sur le couple local/global. Le second défaut est un défaut de problématisation. La lecture du texte de Henri Cartan ou celui de Chevalley montre combien l'organisation d'une partie de l'univers mathématique, à exposer ou à conquérir, autour du couple local/global ne consiste pas en la juxtaposition d'un grand nombre d'éléments dont la grande quantité et les points communs « manifestes » susciteraient « naturellement » une grille de lecture en terme de local et de global. Les éléments ne suscitent pas spontanément le cadre ni n'en relèvent par nature. Les deux textes mentionnés n'enregistrent pas passivement, ils organisent activement – par la sélection des éléments, leur ordre, le type de démonstration choisi, les grands problèmes désignés – un univers mathématique dont l'étude historique

montre qu'il n'a pas toujours été organisé ainsi. La mise en contexte de travaux montre combien *d'autres grilles de lecture* que la grille local/global ont pu être utilisées, non moins légitimement et par des mathématiciens non moins soucieux de questions d'architecture des mathématiques. Ainsi le travail de Poincaré sur les courbes définies par une équation différentielle peut-il servir à illustrer l'opposition entre étude analytique et étude qualitative ; ainsi le théorème de Weierstrass sur les fonctions continues sur un intervalle fermé borné fut-il intégré par les contemporains au débat sur la distinction entre borne supérieure et maximum – enjeu important dans la réorganisation de l'Analyse réelle dans le dernier tiers du 19^e siècle – et non à un débat sur la distinction entre propriétés locales et globales des fonctions continues. De même lorsque nous présentons l'exemple des champs de vecteurs sur la sphère et le tore en commençant par souligner l'équivalence locale pour mieux faire sentir une certaine irréductibilité du niveau global, nous choisissons de ne pas considérer la structure métrique induite par le plongement dans l'espace euclidien usuel, choix qui aurait semblé peu légitime au 19^e siècle dans une communauté de géomètres différentiels largement héritière du point de vue de Gauss sur la métrique intrinsèque. Notre présentation était, elle, héritière de plusieurs mouvements historiques nous fournissant à la fois – à titre rhétorique – la structure « équivalence locale mais pas équivalence globale » et la caractérisation d'objets géométriques par des modèles locaux, en l'occurrence des disques plans. Faire ressortir en quoi un donné mathématique, en lui-même multivoque, relève et illustre le couple local/global passe par une série d'oublis volontaires – ici des différences métriques locales – et de choix de cadres pertinents parmi une série d'autres choix pertinents dont la palette évolue au cours de l'histoire. L'évolution de cette palette et la constitution du cadre local/global sont deux des fils directeurs de notre étude ; la constitution d'un vaste dossier documentaire relatif à l'histoire de problèmes globaux – du moins décrits aujourd'hui comme tels – est ici un moyen.

Un autre angle d'attaque pour une histoire de l'émergence du couple local/global consisterait à étudier, au ras des textes, la présence ou l'absence de ces termes : depuis quand les utilise-t-on ? Dans quel contexte les a-t-on utilisés pour la première fois ? Quelles autres grilles de lecture remplacent-ils, avec lesquelles sont-ils en concurrence ? Leur sens est-il le même chez tous les auteurs, évolue-t-il sensiblement au cours du temps ? Bien sûr ces questions sont les nôtres, mais elles appellent une remarque d'ensemble sur le sens de l'utilisation de ce type de termes. Que fait-on lorsqu'on écrit dans un manuel ou un article que tel ou tel théorème est un théorème local ? En un sens, ne pas faire cette remarque n'altérerait en rien le contenu mathématique strict de l'exposé. En choisissant d'écrire qu'un théorème est local on habille

un texte mathématique plus nu, on attire l'attention sur l'un des aspects du théorème, on le range dans une *famille* des théorèmes locaux qu'on contribue par là même à former, on indique implicitement le caractère problématique de son analogue global etc. L'usage de termes comme « local » ou « global » relève, dans le texte mathématique, d'un niveau de discours que nous qualifierons de *niveau méta*. On voit que le sens dans lequel nous employons ce terme est celui des didacticiens et ne renvoie en rien à cette théorie mathématique qu'est la métamathématique ; il n'est pas non plus cette « métaphysique des mathématiques » dont parlent Crowe [Crowe 1975] ou Dunmore [Dunmore 1992] dans les études sur la notion de révolution en mathématiques : cette « histoire des idées » mathématiques, avec son cortège de grandes questions sur l'infini, le continu, l'espace, la preuve etc. n'est pas, ici, la nôtre. Le discours de niveau *méta* – au sens que nous donnons à ce terme – est à la fois facultatif et essentiel, en ce qu'il fournit au lecteur un petit mode d'emploi des notions mathématiques présentées, lui montre comment s'orienter dans la pensée mathématique. De ce niveau relèvent par exemple d'autres formulations typiques : dire qu'un énoncé est un « énoncé d'existence », un « énoncé d'unicité » ; que l'un est « plus général » qu'un autre ; qu'il est « l'analogue algébrique d'un énoncé analytique bien connu » ; qu'il est « qualitatif » ; qu'il constitue « la réciproque délicate » d'un énoncé trivial ; qu'une preuve est « plus rigoureuse » ou « plus algébrique » qu'une autre ... la liste est longue mais sans doute pas si longue, et de tous ces éléments de niveau *méta* l'histoire reste peut-être largement à écrire. En dépit de la variété des énoncés relevant de ce niveau de discours, ils partagent au moins deux points communs qui constituent des difficultés spécifiques pour l'historien. Premièrement ces notions intervenant dans le texte mathématique ne font pas, du moins pas nécessairement, l'objet d'une *définition* mathématique : notions omniprésentes mais molles, leur sens se transmet par l'usage, se construit au sein de traditions, se sédimente dans des lignées d'exemples ; la citation liminaire de Morse illustre parfaitement cet aspect. Deuxièmement ce niveau *méta* est par nature facultatif et un mathématicien contemporain peut parfaitement ne pas signaler explicitement le caractère local ou global de tel énoncé sans qu'on puisse légitimement en déduire qu'il n'est pas conscient de cet aspect ! Comprendre l'histoire de l'émergence du couple local/global, c'est certes étudier les occurrences explicites de ces termes mais aussi nécessairement s'interroger sur le sens de leur absence dans d'autres textes, ce qui risque de conduire à une casuistique des degrés d'implicite ou à l'invocation d'improbables « cadres implicites de la pensée ». Sans prétendre déjouer par avance tous les pièges, faisons une remarque relevant d'un positivisme méthodologique minimal. Tout d'abord l'absence dans un texte particulier de termes comme « local » ou « global » n'a pas le

même sens historique selon que ces termes ont, ou non, déjà été utilisés par cet auteur lui-même, ou dans des textes auxquels l'auteur renvoie, ou dans la tradition dans laquelle il inscrit son travail. On verra par exemple que les termes allemands « *im Kleinen* » et « *im Grossen* » commencent d'être utilisés dans les dernières années du 19^e siècle en théorie des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes : leur absence n'a donc pas la même signification chez Riemann cinquante ans plus tôt et chez Klein une vingtaine d'années plus tard. Il reste ensuite, et c'est le problème le plus intéressant, le cas d'auteurs tels Riemann ou Poincaré dont un lecteur du 20^e siècle ne peut s'empêcher de lire les textes sans utiliser systématiquement le couple local/global alors que ces termes, ou leurs équivalents, ne se présentent pas sous la plume de ces auteurs non plus que sous celle de leurs contemporains. On verra qu'il n'y a là aucun paradoxe : cette grille de lecture en terme de local/global qui fait partie de l'outillage mental du lecteur depuis la seconde moitié du 20^e siècle, a été forgée dans les premières années de ce siècle pour rendre compte de la spécificité de l'œuvre de Riemann et de Poincaré. S'il est loin d'être illégitime d'avoir recours à cette grille pour présenter l'œuvre de ces auteurs, ce serait une erreur de méthode que d'y avoir recours pour étudier l'histoire de l'émergence du couple local/global lui-même. Au sens strict, on pourrait dire que des auteurs tels Riemann ou Poincaré ont leur place dans notre étude moins comme pionniers d'une mathématique globale que parce que ce sont leurs héritiers directs et leurs commentateurs les plus éclairés qui ont pour la première fois produit un discours mathématique comprenant une strate *méta* construite autour du couple local/global.

Ceci nous amène au troisième angle d'attaque, après celui de la co-évolution du cadre et des familles de problèmes et celui de l'observation du niveau *méta*. Le caractère *facultatif* du discours *méta* renvoie au 20^e siècle à une *obligation de référence au lieu* au sein du texte mathématique le plus nu, et cet aspect est spécifique au couple local/global par rapport à d'autres éléments *méta*. Si par exemple on énonce aujourd'hui le théorème d'inversion locale, on peut tout à fait ne pas le qualifier de local mais on ne peut pas, dans l'énoncé même, ne pas désigner comme lieu de validité d'une certaine propriété un certain voisinage d'un point ; lorsqu'on souhaite manipuler une primitive d'une forme différentielle dont on vient simplement de vérifier qu'elle est fermée, on ne peut sans enfreindre des conventions d'écriture et de rigueur manquer de mentionner qu'on travaille sur un voisinage d'un point donné, ou sur un domaine dont on a établi la simple connexité ; on s'exprime mal si l'on parle du maximum d'une fonction numérique sans avoir précisé le domaine de définition ou d'étude. Dans tout l'univers fonctionnel, au sens large, est associé à chaque objet ou énoncé un lieu propre, domaine d'existence, de validité ou domaine d'étude. Ce constat traduit à la

fois des conventions d'écriture – déroger à la référence au lieu c'est mal rédiger –, des critères de rigueur – y déroger c'est produire un énoncé flou donc invalide –, et une structuration ensembliste de l'univers mathématique. Dans l'économie du texte mathématique le discours *méta* en terme de local/global – lui-même facultatif – s'articule exactement sur cette obligation de référence au sein d'un texte mathématique si nu qu'il soit, de sorte qu'on peut difficilement étudier l'émergence de l'un sans être confronté au problème de l'émergence de l'autre : c'est le troisième angle d'attaque que nous voulions présenter. Ce pan de l'histoire de l'émergence de *l'écriture ensembliste des mathématiques* nous ne le choisissons pas comme notre sujet : nous ne pouvons tout simplement pas l'éviter. Il s'invite dans l'étude historique de grands problèmes sous la forme d'une difficulté de lecture ; dans de nombreux textes du 19^e siècle cette référence au lieu manque au lecteur du 21^e siècle et crée à la lecture un effet de flou : on se demande toujours un peu « où ça se passe ». Ainsi dans la brève présentation des travaux d'Elie Cartan que Chevalley et Chern rédigent en 1952 à l'occasion de son décès, ils font part d'une petite perplexité à propos de sa théorie des groupes de Lie de dimension infinie :

The hitch is of course that nothing is said about the domains in which the transformations are to be defined and invertible, and that this domain may apparently vary from one transformation to another. [Chern, Chevalley 1952 233]

Ainsi dans ses travaux sur l'histoire de la théorie des groupes de Lie, Hawkins s'interroge-t-il sur le caractère local ou global du théorème énoncé par Lie reliant la structure du groupe de Lie à celle de son algèbre :

Lie showed that \mathbf{G} and its parameter group have the same structure (i.e. have isomorphic Lie algebras) and concluded that this meant they are isomorphic. Given that the isomorphisms occurring in the theory of finite groups are global, one might have expected him to point out the local nature of this isomorphism, but he did not.

(...) There is little doubt that Lie realized that his theorems were established only locally. As we saw in connection with the exponential map theorem, he even occasionally stated explicitly the local nature of his results. [Hawkins 2000 85]

On voit comment pour Hawkins la question est d'autant plus délicate que la référence au lieu, en l'occurrence au caractère local de certains résultats, n'est pas *toujours* absente chez Lie ; elle manque toutefois dans l'un des énoncés fondamentaux de la théorie. La prise en compte de ce problème du passage d'une référence au lieu facultative à une référence obligatoire induira deux inflexions à notre enquête sur l'histoire de l'usage *méta* du couple local/global. En premier lieu, elle orientera le regard, au niveau du texte mathématique, vers les modes de

référence au lieu ; elle conduira à essayer d'estimer le degré d'attention au lieu chez un auteur et les stratégies démonstratives qui soutiennent, ou non, cette attention. En second lieu, elle nous amènera à élargir le corpus relatif au dernier tiers du 19^e siècle, car il n'est pas évident *a priori* que ce sont les mêmes auteurs qui sont engagés dans le défrichage d'une Analyse globale, disons Riemann et Poincaré, et dans l'émergence d'une écriture ensembliste des mathématiques.

Après avoir déployé quelques éléments du réseau des complexités de la problématique, nous pouvons présenter les choix ayant guidé l'organisation de ce travail. Nous nous sommes laissés guider par les textes marquant une étape historique nette dans l'usage explicite des termes *im Kleinen/im Grossen* ou local/global, soit dans l'interaction entre un niveau *méta* et un texte plus nu, soit à un niveau plus *thématique* lorsque le texte comporte un moment autonome de réflexion sur l'architecture des mathématiques ; on verra que cette différence entre niveau *méta* et niveau *thématique* est souvent de degré plus que de nature. Nous avons sélectionné deux telles familles de textes. Nous arrêterons notre enquête historique au début des années 1950, en prenant comme bornes le cours de Chevalley de 1946 sur les groupes de Lie et les premiers travaux sur la structure de faisceaux, en particulier la conférence de Henri Cartan de 1950 à laquelle nous faisons référence plus haut. La deuxième famille de textes désigne les premières années du 20^e siècle comme le premier moment d'émergence explicite du couple local/global, chez des auteurs tels William Fogg Osgood, Jacques Hadamard ou Hermann Weyl. Si le plan de ce travail est, grossièrement, chronologique, nous voudrions le présenter en montrant comment il découle d'une problématique construite autour de ces deux familles de textes, de ces deux périodes d'explicitation.

Le travail s'articule autour de la troisième partie, dans laquelle nous présentons des textes de la période 1898-1913 dans lesquels le couple local/global intervient pour la première fois explicitement, massivement, et avec des significations qui sont toujours celles que nous lui donnons. Nous devons donner dès à présent quelques éléments issus de la lecture de ces textes, car ce sont eux qui fournissent la grille de lecture et guident l'enquête sur la période 1850-1900. Les trois principaux textes sont le manuel (*Lehrbuch*) d'Analyse de W.F. Osgood (1906 [Osgood 1912]), l'analyse de l'œuvre mathématique de Poincaré que Hadamard rédige en 1912 [Hadamard 1912] et le cours de Weyl sur l'*Idée de surface de Riemann* [Weyl 1913]. Nous nous appuyons sur cette famille de textes à la fois pour délimiter le premier *corpus* de textes, dans la première partie, et formuler les *questions* que nous lui adressons. Un trait commun à ces trois textes est qu'ils ne sont pas directement des articles de recherche, ce sont

des cours ou des textes d'analyse épistémologique ; des textes dans lesquels on ne cherche pas à établir une percée sur le front d'un problème précis mais où l'on reprend, réorganise, reformule une grande masse de connaissances et de résultats acquis depuis 1850. Un travail de mathématiques, bien sûr, mais aussi explicitement un travail *sur* les mathématiques ; un travail qui ne porte toutefois pas sur *toutes* les mathématiques. Ces textes portent sur et se reconnaissent héritiers des travaux en théorie des fonctions d'une (ou plusieurs variables) complexes de Riemann puis de Poincaré : un champ disciplinaire (certes vaste) de référence, des figures tutélaires. Ils délimitent ainsi un corpus dont ils proposent une lecture inédite construite, selon des modalités différentes chez chacun de nos trois auteurs, autour du couple local/global ; ils nous désignent ainsi le corpus sur lequel portera notre travail dans les trois premiers chapitres. Les textes de la troisième partie nous permettent aussi de formuler des questions plus précises à adresser aux auteurs dont ils héritent. Nous avons déjà introduit les notions de niveau *méta* et de niveau *thématique*, on verra que le premier est typique du travail d'Osgood avec *im Kleinen/im Grossen* alors que c'est principalement au second niveau que Hadamard utilise le thème du dépassement du local. Nous avons introduit aussi dans les exemples la notion de *légalité primitive du lieu*, que nous devons préciser encore un peu. Dans le dernier tiers du 19^e siècle, on voit émerger dans l'écriture de l'Analyse la structure syntaxique fondamentale « la fonction est [*propriété*] sur [*domaine*] » ; la référence au lieu devient pertinente puis obligatoire, jusqu'à ce que l'obligation devienne insensible tant elle fait corps avec des canons d'écriture : parler des fonctions c'est constamment dire « où elles vivent », « où ça se passe ». Mais dans ce cadre on peut considérer une fonction et l'étudier dans sa relation à différents lieux (au voisinage de chaque point, dans un domaine simplement connexe, dans son domaine maximal de méromorphie etc.). Faire sentir ce que nous nommons la légalité primitive du lieu c'est, dans ce cadre, changer de point de vue en fixant le domaine et en faisant varier la fonction (au sens large) ; ce mode de désignation du global, Weyl s'en fait le champion dans la préface à son *Idée de surface de Riemann*, nous en étudierons les autres occurrences. Nous le distinguons d'un autre mode de saisie du couple local/global qu'on trouve, lui, explicité chez Osgood. Ce dernier définit ce qu'il entend par *im Kleinen / im Grossen* en faisant référence à la *forme des énoncés* : une propriété est *im Kleinen* lorsqu'elle fait référence à un voisinage indéterminé d'un point, *im Grossen* lorsqu'elle fait référence à la totalité d'un domaine *donné par avance* ; la différence entre existence d'un maximum local et d'un maximum global est, par exemple, bien saisie par cette fixation du sens des termes. Nous dirons qu'Osgood nous fournit une *conception syntaxique* du global qui diffère par nature du point de vue de *légalité du lieu*, tout en partageant un ancrage dans une Analyse pour laquelle

la référence au lieu est systématique. Une dernière distinction nous est suggérée, elle, par Hadamard, qui propose une articulation non pas en deux niveaux local/global mais une articulation en trois niveaux que nous nommerons, en nous écartant un peu du vocabulaire de Hadamard, infinitésimal/local/global. La distinction entre l'infinitésimal et le local pointée par Hadamard, entre l'infiniment petit et le suffisamment petit, est essentielle à l'émergence de la notion moderne de voisinage, donc à une structuration autour de local/global plutôt que, par exemple, en termes d'infinitement-petit / fini. Le terme de « niveau » n'est bien sûr pas à entendre de la même manière lorsque nous parlons de niveau infinitésimal ou local d'une part, de niveau *méta* ou thématique d'autre part : on voit qu'il s'agit dans un cas de niveaux découpés dans l'objet mathématique, dans l'autre de niveaux dans le discours mathématique. Nous sommes donc conduits à consacrer la première partie à des travaux d'Analyse globale de Riemann et Poincaré – entre autres –, travaux dont la lecture doit être guidée par les éléments suivants : niveau *méta* et niveau *thématique*, point de vue de *légalité primitive du lieu* et *saisie syntaxique* du couple local/global, distinction entre l'infinitésimal et le local. Notre travail prend ici la forme d'une série de comptes-rendus assez descriptifs. Cette forme descriptive résulte fondamentalement de ce que ces textes, en particulier pour Riemann, que nous utilisons comme un point de départ chronologique, sont ici saisis moins dans le mouvement qui mène à leur rédaction que comme des textes *lus*, compris ou non, critiqués, reformulés, interprétés etc. jusqu'à ce que plusieurs auteurs, dans les premières années du 20^e siècle, utilisent à *leur* propos une grille de lecture en termes de local/global qui n'est pas directement celle qu'on y trouve. Par conséquent, trois objectifs seront poursuivis de concert dans cette lecture. Le premier objectif est de constituer un dossier documentaire relatif aux lignées de problèmes et aux méthodes de démonstration qui constitueront la matière et le réservoir d'exemples dans lequel des auteurs du 20^e siècle puiseront pour forger les catégories *méta* telles « problème global » ou « méthode de passage du local au global ». Le second objectif consiste à retrouver les éléments *méta* et thématiques présents, s'il y en a, dans ces travaux eux-mêmes, qui dessinent les cadres d'une intelligibilité qui ne passe pas par l'usage du couple local/global. Autant ces deux premiers objectifs visent une certaine lecture en compréhension, autant c'est presque une lecture en incompréhension que nous poursuivons comme dernier objectif. Si ces travaux, par leur saveur globale, géométrique et qualitative, mettent en évidence la *pertinence* du lieu, ils se présentent au lecteur du 20^e siècle – l'exemple de Chern et Chevalley en atteste – comme des textes dans lesquels la *référence* au lieu n'est ni suffisamment systématique ni suffisamment précise ; le lieu n'est pas toujours désigné, il l'est de manière non transparente pour un lecteur formé aux ensembles et aux

structures, un flou persistant brouille la lecture. Nous chercherons à constituer un dossier documentaire relatif aux modes de référence non ensemblistes au lieu, sans dans un premier temps chercher à en rendre raison : relever et se laisser étonner.

Dépasser l'étonnement, cette tâche sera celle de la deuxième partie, dans laquelle nous changeons à la fois d'approche et de corpus. Nos auteurs des premières années du 20^e siècle, Osgood, Hadamard, Weyl, ne sont pas héritiers de la seule approche géométrique en théorie des fonctions – au sens qu'avaient alors ces termes. Au moment où ils reformulent, analysent ou dépassent les acquis de cette tradition, ils le font globalement dans un langage mathématique qui n'est pas celui de Riemann ni même de Poincaré. Les cadres fondamentaux de l'Analyse ont entre temps sensiblement évolué et l'on ne « parle » plus des fonctions en 1900 comme en 1851 ni même largement en 1880, quoiqu'on ait à en dire. Le mouvement de refondation de l'Analyse issus des cours de Weierstrass invite à regarder du côté de l'Analyse réelle et non plus complexe, du côté des fonctions arbitraires et non plus sagement analytiques, du côté de la topologie ensembliste de \mathbf{R}^n et non plus de l'*Analysis situs* des variétés. Non seulement cet autre mouvement fait émerger de manière autonome la *pertinence* de la référence au lieu, mais surtout il instaure des *modes* de référence et une *obligation* de référence dont nous sommes toujours les héritiers, au point qu'en dehors d'eux nous lisons flou. Nous utiliserons dans cette partie le corpus classiquement constitué, depuis la fin du 19^e siècle d'ailleurs, pour faire l'histoire des fondements de l'Analyse ou de la montée de la rigueur en Analyse ; on voit toutefois que ce ne sont pas ces questions classiques de fondement ou de rigueur que nous lui adressons. Nous procéderons dans cette partie en trois temps. Dans un premier temps nous parcourrons ce corpus en ayant à l'esprit les questions de maximum local ou global, en suivant la piste des définitions et des résultats élémentaires les concernant. Ce thème du maximum n'est qu'un moyen, une *sonde*, permettant de suggérer une périodisation, de repérer des modes d'écriture, d'identifier des points de tension et des systèmes d'évidences qui ne sont pas les nôtres. A ce travail assez empirique succèdera, dans un deuxième temps, un travail d'épistémologie historique dans lequel nous chercherons à cerner de manière plus abstraite les éléments pertinents pour comprendre le passage d'une Analyse qui s'écrit et se pense dans le *monde de la grandeur* – nous suivons ici les pistes esquissées par M. Epple dans ses travaux sur *die Ende der Grössenlehre* [Epple 2003] – à une Analyse ensembliste. Le rapport aux textes y sera différent de ce qu'il est dans le reste de cette thèse : en regroupant les deux corpus étudiés dans les chapitres 1-3 d'une part, dans le chapitre 4 d'autre part, nous nous laisserons suggérer les éléments de deux *types-idéaux* – monde de la grandeur et monde des ensembles – dont aucun texte ne saurait, seul, être le

représentant. Nous espérons montrer comment ces types abstraits permettent à la fois une saisie *positive* de l'écriture pré-ensembliste – une saisie qui ne se contente pas de lister tout ce qui lui manque pour être à la hauteur de la rigueur ensembliste – et une compréhension de la richesse du *jeu* permis dans le dernier tiers du 19^e siècle par la concurrence des deux types. Nous finirons en utilisant cette grille d'analyse pour comprendre l'émergence du « local ».

Après ce travail sur les conditions historiques d'émergence explicite du couple local/global dans les premières années du 20^e siècle, les deux dernières parties aborderont, respectivement, les années 1920 et la période 1930-1950. Encore moins que pour le second 19^e siècle, l'objectif ne peut être de présenter un panorama des mathématiques globales sur ces périodes. L'étude, parfois détaillée, se concentre sur les travaux qui représentent un palier historique. La question adressée aux deux périodes – les années 1920, la période 1930-1950 – n'est pas la même. Si le couple local/global qui émerge dans les années 1898-1914 concerne, *en droit*, toutes les mathématiques, il émerge toutefois dans un contexte particulier. C'est son irruption dans d'autres théories que celles à propos desquelles il a été, la première fois, explicité, qui nous intéresse dans un premier temps : la quatrième partie est consacrée au *passage au global* dans les années 1920. Nous étudierons les modalités du passage au global en calcul des variations, en géométrie différentielle et en théorie des groupes de Lie. On le devine, l'essentiel de cette partie sera consacrée à une étude croisée des travaux de Hermann Weyl et Elie Cartan. La situation se présente donc différemment à partir de 1930 ; non seulement le couple local/global a pu intégrer, aux niveaux *méta* et *thématique*, la famille des outils servant à penser et exposer les mathématiques, mais les théories explicitement globales se présentent de toutes parts aux jeunes chercheurs. La reprise active de cet héritage prend alors la forme d'un travail sur les *structures* permettant la formulation et l'assaut des problèmes globaux. C'est donc la question des structures associées au couple local/global qui guide l'étude, dans la cinquième partie, de la période 1930-1950 : variétés, fibrés, faisceaux.

Deux précisions enfin. Nous nous sommes restreints – si l'on ose dire – aux théories « géométriques », et n'abordons pas la théorie des nombres – en particulier son principe du « local-global ». Notre grande ignorance de ces aspects n'en est pas la seule cause. L'exposé a été construit, on l'a compris, autour de deux familles de textes – l'une des années 1898-1914, l'autre de 1940-1953 – marquant chacune une étape fondamentale dans l'émergence du couple local/global ; ces textes ne font pas le lien avec la théorie des nombres, quoique ces liens méritent une étude. Deuxième précision, nous avons travaillé sur de nombreux textes en langue allemande ; nous espérons que les traductions inédites que nous proposons s'avéreront

utiles au lecteur francophone. Nous ne nous flattons toutefois pas d'une maîtrise de cette langue méritant toute confiance ; nous avons donc choisi de donner systématiquement le texte original en note infrapaginale. Nous n'avons pas jugé utile, en revanche, de traduire les textes en langue anglaise.