Cinquième partie : un couple, des structures.

Chapitre 13 : Les variétés selon Veblen et Whitehead (1932).

En 1931 dans une communication à l'Académie des Sciences Américaines[1], puis l'année suivante dans un petit ouvrage sur les *Fondements de la géométrie différentielle* [2], O. Veblen (1880-1960) et J.H.C. Whitehead (1904-1960) proposent un système d'axiomes fondant la géométrie différentielle. Au delà de l'importance technique de ce qui deviendra la définition usuelle des variétés différentiables, ce *Tract* de 1932 motive les axiomes en proposant un cheminement complexe construit comme un dialogue entre les niveaux infinitésimaux, locaux et globaux ; il présente ainsi des explicitations inédites dont le caractère tardif peut surprendre de la part d'un mathématicien comme Veblen qui, contrairement à Elie Cartan, était depuis longtemps familier de l'*Analysis situs*. Nous montrerons que l'horizon mathématique de ce travail est le débat des années 1920 sur la notion d'espace généralisé et qu'il constitue plus un bilan – certes original et stabilisant des définitions utiles aux développements futurs – que l'annonce de nouvelles directions de recherches. En termes de périodisation, il est ainsi à placer aux côtés de la monographie de Cartan sur la topologie des groupes de Lie, la riche moisson de résultats nouveaux en moins.

I. Les axiomes de 1931.

L'article de 1931 n'est pas construit autour des thèmes du local et du global ; ce sont les questions d'axiomatique – caractérisation des groupes d'axiomes, preuves de consistance et d'indépendance – qui guident l'exposé. Par commodité d'exposition nous rendons compte d'emblée de ces aspects, à la fois pour présenter les axiomes et permettre la comparaison avec le *Tract* de 1932. L'objectif annoncé par Veblen et Whitehead est le suivant :

> *The axioms set forth in this note are intended to describe the class of manifolds of n dimensions to which the theories nowadays grouped together under the heading of differential geometry are applicable.* [V&W 1931 551]

[1] O. Veblen et J.H.C. Whitehead *A Set of Axioms for Differential Geometry*, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 17(10), p.551-561. Pour ne pas alourdir la présentation, ce texte sera désigné par [V&W 1931].

[2] O. Veblen et J.H.C. Whitehead *The Foundations of Differential Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics n°29, Cambridge U.P., 1932. Désigné par [V&W 1932].

Le moyen est la caractérisation axiomatique de la notion de « coordonnées admissibles » (*allowable cöordinates*). Quelques points de vocabulaire sont fixés avant l'énoncé des axiomes. « Variété » désigne au départ un ensemble d'éléments appelés points ; puis :

> *A cöordinate system is a (1-1) correspondence, $P \to x$, between a set of points ,[P], of the manifold, and a set, [x], of ordered sets of n real numbers $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$.* [V&W 1931 551]

L'ensemble noté [P] est le domaine du système, l'ensemble [x] son domaine arithmétique[3]. L'espace des n-uplets réels est appelé l'espace arithmétique à n dimensions, des systèmes d'inéquations de la forme $|x^i - a^i| < \delta$ définissent dans cet espace des « boîtes » (*boxes*), ces boîtes servent à caractériser les ouverts ou « régions » (*regions*). Les fonctions numériques sur une région [x] sont réparties en classes : classe 0 pour continu, classe n (entier naturel non nul) si ses dérivées partielles existent et sont continues jusqu'à l'ordre n, classe ω pour analytique. Il est rappelé que le théorème des fonctions implicites garantit que l'image d'une région par un système de n fonctions numériques de classe $u>0$ et de déterminant jacobien nulle part nul est aussi une région. Si la transformation $x \to y$ est univoquement inversible, elle sera dite « régulière » (*regular*). Après ces rappels sans surprise, Veblen et Whitehead font remarquer que les transformations régulières de l'espace arithmétique forment ce qu'ils appellent un « pseudo-groupe » (*pseudo-group*), ainsi défini en toute généralité :

> *A pseudo-group is any set of transformations which satisfy the conditions* :
>
> (1). If the resultant of any two exists, it is in the set.
>
> (2). The inverse of each transformation in the set is also in the set.
>
> *The pseudo-group of regular transformations between regions will be called the* pseudo-group of class *u*. [V&W 1931 552]

Nous verrons que, si en 1931 nos auteurs s'en tiennent à la définition, cette introduction marquera en 1932 un moment d'explicitation des articulations entre local et global, et l'occasion d'un retour sur les raisonnements usuels de la géométrie différentielle.

Les axiomes sont présentés en trois groupes et portent sur la notion préalablement définie de « transformation de coordonnées » (*transformation of coordinates*), transformation de domaines de l'espace arithmétique de la forme $x \to y$ obtenue à partir de deux systèmes de coordonnés $P \to x$ et $P \to y$ de même domaine. La notion définie implicitement par les premiers axiomes est celle de coordonnées admissibles parmi les systèmes de coordonnées $P \to x$:

A_1. *The transformations between two allowable coördinate systems which have the same domain is regular if the arithmetic domain of one of them is a region.*

A_2. *Any coördinate system obtained by a regular transformation of coördinates from an allowable coördinate system is allowable.*

Definition : The image in an allowable coördinate system of a box will be called an n-cell of class u.

A_3. *The correspondence in which each point of an n-cell corresponds to its image in an allowable coördinate system is an allowable coördinate system*. [V&W 1931 553]

Les axiomes B_1 et B_2 reposent sur la notion d'union de deux systèmes de coordonnées et prescrivent que les coordonnées admissibles sont exactement les unions de systèmes admissibles dont le domaine est une *n*-cellule. Les axiomes C sont repris de Hausdorff :

C_1. *If two n-cells have a point in common they have in common an n-cell containing this point.*

C_2. *If P and Q are any two distinct points there is an n-cell C_P, containing P, and an n-cell C_Q, containing Q, such that C_P and C_Q have no point in common.*

C_3. *There are at least two points.* [V&W 1931 553]

Nos auteurs font remarquer que la variété est ainsi un espace topologique, que les domaines des systèmes de coordonnées admissibles sont des régions et qu'ils sont homéomorphes à leur image dans l'espace arithmétique. Le fait que tout point de la variété appartient au domaine d'au moins un système de coordonnées admissibles n'apparaît pas explicitement[4].

Trois types de questions sont ensuite examinées par les auteurs. D'abord viennent les considérations relatives au système des axiomes : la consistance est établie en exhibant un objet vérifiant le système – l'espace arithmétique avec le pseudo-groupe des transformations régulières entre ouverts ; l'indépendance de chaque axiome envers les autres est établie en exhibant des objets vérifiant tous les axiomes sauf l'un d'entre eux. La géométrie reprend ensuite ses droits lorsque Veblen et Whitehead montrent qu'on peut remplacer les « transformations régulières » (de classe 0, un entier, ω) par des applications appartenant à d'autres pseudo-groupes : le pseudo-groupe des transformations régulières de classe $u>0$ de déterminant positif permet de définir les variétés orientés de classe *u* ; si l'on impose de plus au déterminant jacobien de valoir 1 on obtient un espace muni d'une unité de volume invariante ; le pseudo-groupe des transformations affines entre régions de l'espace

[3] On notera la syntaxe un peu archaïque : comme chez Weierstrass (mais c'était alors une innovation !), une partie d'un ensemble est désignée par [P] ou [x], P ou x désignant un élément indéterminé de cette partie.

[4] Bien qu'on combinant les axiomes C2 et C3 on obtienne que chaque point est contenu dans une *n*-cellule.

arithmétique définit les espaces affines localement plats (*locally flat affine spaces*) ; en dimension paire, on peut définir la notion de variété analytique complexe, notion pour laquelle nos auteurs renvoient au cours de Weyl sur *L'idée de surface de Riemann*. Dans un troisième temps, revenant au pseudo-groupe des transformations régulières de classe u>0 (fini), Veblen et Whitehead font remarquer que la plupart des théorèmes d'Analyse utilisés en géométrie différentielle ont été établis sous hypothèse d'analyticité et envisagent quelques questions relatives à l'affaiblissement de ces hypothèses.

On voit que le thème souligné dans cette note n'est en rien l'articulation du local et du global mais bien plus la multiplicité des structures géométriques du type variété, multiplicité reposant sur la notion de pseudo-groupe. Toutefois, par la position d'axiomes portant sur la totalité des cartes, une place s'ouvre pour les questions globales ; en explicitant le caractère local de la notion de pseudo-groupe, nos auteurs font apparaître les éléments permettant d'instaurer un dialogue explicite entre les niveaux. Présent en puissance en 1931, ce dialogue devient non seulement explicite mais central dans l'exposé de 1932.

II. Un objectif de synthèse entre géométrie infinitésimale et *Analysis situs*.

Dans les *Fondements de la géométrie différentielle* [V&W 1932], Veblen et Whitehead ont plus de place pour motiver leur travail, et ils le placent sous un signe qui n'est ni celui d'une rigueur enfin atteinte, ni celui d'un compromis pacifique dans le champ des théories topologique des années 20 où s'affrontent les partisans de fondements ensemblistes ou combinatoires[5]. Le thème de la multiplicité des structures, lui, demeure présent, sous le patronage de Klein et de son Programme d'Erlangen. Mais c'est un autre thème qui est introduit en préface :

> *The complete theory which should be constructed out of these axioms would be a combination of infinitesimal geometry and Analysis situs*. [V&W 1932 v]

[5] C'est van der Waerden qui qualifie de « champ de bataille » (*Kampfplatz*) le chantier des fondements de la topologie et les travaux sur la « bonne » notion de variété (topologique) : s'y affrontent l'approche « purement combinatoire » (*rein kombinatorisch*) et la « méthode mixte » *à la* Poincaré-Brouwer [Waerden 1930]. Van der Waerden reprend ainsi des catégories utilisées par Hellmuth Kneser quelques années plus tôt [Kneser 1926]. Aux Conférences Internationales de Topologies, tenues à Genève en octobre 1935 (sous la présidence d'Elie Cartan), C. Kuratowski peut écrire : « Il y a une dizaine d'année la Topologie était divisée en deux parties : la Topologie « ensembliste » et la Topologie « combinatoire ». (…) A l'heure actuelle les deux topologies, ensembliste et combinatoire, se confondent de plus en plus. Une délimitation rigoureuse entre elles ne paraît plus applicable et d'autres critères commencent à intervenir dans la classifications des méthodes topologiques (par ex. homologie, homotopie, groupe des transformations en circonférences, etc.). » [Kuratowski 1936 229]. Sur ces débats cf. [Scholz 1999a].

L'introduction du chapitre final, consacré à l'illustration des axiomes dans des questions géométriques riches, reprend cet objectif et l'explicite par des exemples :

> *In specializing from the general theory of the axioms A, B and C to some particular class of geometries, one may start by adding assumptions about the topology of the space, or one may specify some sort of local structure. The one type of assumption may, to a certain extent, be made independently of the other. But many forms of local structure imply some restriction on the topological character the space. For example, if n is even, a continuous vector-field without singular points cannot exist at all over an n-sphere.* [V&W 1932 86]

Nos auteurs renvoient pour cet exemple aux travaux de Brouwer en 1910, un peu plus loin aux travaux de Hopf sur la forme des espaces riemanniens à courbure constante [V&W 1932 90]. C'est ensuite Elie Cartan qui est appelé à témoigner de l'importance de ces questions modernes :

> *One may also introduce some form of structure which implies both local and topological restrictions. A good example is to be found in the theory of continuous groups. An n-dimensional group is a regular manifold with a continuous function, F(P,Q), defined over all ordered pairs of points. The values of the function are points in the manifold, and it satisfies the conditions for a group given in Chap. II §2. For a brief account of this theory, and for references, see E. Cartan's Memorial*, La théorie des groupes finis et continus et l'*analysis situs*, Paris, 1930, No XLII. [V&W 1932 86]

Le troisième et dernier exemple est bien plus élémentaire et présente une variante d'un exemple que nous avons déjà souvent rencontré à propos des surfaces de Riemann au-dessus du plan, puis de la distinction entre inversion locale et inversion globale :

> (…) *Let a set of scalars $f^1(P),\ldots, f^n(P)$, of class u>0, having no singular point, be defined at each point of a regular manifold. These scalars determine a coordinate system* [6], *$P \to y$, given by $y^i = f^i(P)$, in which a given point ,P, has a single image, y. Several points may correspond to the same arithmetic point, but each P is contained in an n-cell which is carried by $P \to y$ into an arithmetic n-cell. Therefore the manifold is carried into an arithmetic region.*
>
> *If we think of each point P as lying on the corresponding arithmetic point, the regular manifold may be one which overlaps itself in the manner indicated in fig. 7. Each*

[6] Dans le *Tract* de 1932 les « systèmes de coordonnées » ne sont pas *a priori* supposés injectifs, alors qu'ils l'étaient en 1931.

point A of the diagram represents one point of the arithmetic space, but two points of the regular manifold. Such a manifold is said to lie smoothly on the arithmetic space.

There can be no folding of the regular manifold on the arithmetic space. For a fold woud imply an edge, i.e. a locus of singular points for the n scalars. Thus the regular manifolds in the two-dimensional case could not be a sphere or an anchor-ring or any other closed surface. [V&W 1932 87]

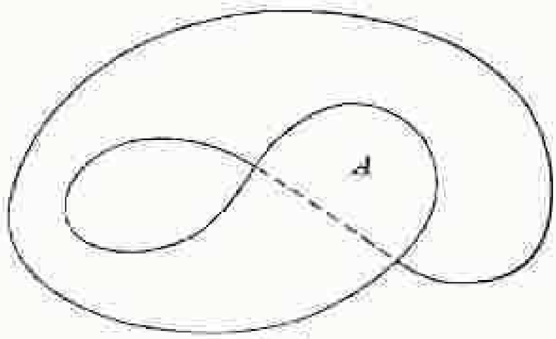


Fig. 7.

Aux souvenirs de Riemann et à l'illustration du théorème d'inversion locale s'ajoute une troisième lecture du même exemple élémentaire : il illustre l'impossibilité de plonger de manière lisse une variété compacte n-dimensionnelle dans $\mathbf{R}^n$.

III. Localisation, globalisation.

En 1932, Veblen et Whitehead se donnent environ quatre-vingts pages pour arriver aux axiomes énoncés en 1931 et qui sont depuis donnés dans les premières pages des cours d'introduction à la géométrie différentielle ; le cheminement est si progressif qu'il déroute parfois un peu le lecteur du 21ème siècle[7], mais il est très révélateur pour l'historien. La démarche fondationnelle, si elle prend finalement une forme axiomatique, est ici le contraire d'une *tabula rasa* : les évidences classiques sont patiemment explicitées, les notions élémentaires reformulées avec précision, les différents champs de recherches renommés et articulés. C'est ce retour critique sur une décennie de géométrie différentielle à la productivité foisonnante que nos auteurs présentent dans un double mouvement, une phase de localisation suivie d'une phase de dépassement du local.

1. Du groupe au pseudo-groupe : localiser le Programme d'Erlangen.

Les deux premiers chapitres sont consacrés, respectivement, à ce que nous nommerions l'étude élémentaire de $\mathbf{R}^n$ comme espace vectoriel puis comme espace affine – c'est l'étude de l' « espace arithmétique à n dimensions » – puis à l'introduction du lien entre groupes de transformations de l'espace arithmétique et géométries – la référence explicite étant bien sûr Klein. Parallèlement à la notion de groupe, ces chapitres permettent d'introduire axiomatiquement la notion de « système de coordonnés préférés » (*preferred coördinate systems*) décrivant un type de lien entre un « espace géométrique » (*geometric space*) et l'espace arithmétique[8] :

> *Let G be a set of transformations of arithmetic points into arithmetic points, and let us write the following axioms, in which the undefined elements are* points *and* preferred coordinate systems.
>
> G_1. *Each preferred coordinate system is a (1-1) transformation of the space into the arithmetic space of n dimensions.*
>
> G_2. *Any transformation of coordinates from one preferred coordinate system to another belongs to G.*
>
> G_3. *Any coordinate system obtained from a preferred coordinate system by a transformation belonging to G is preferred*. [V&W 1932 24]

Veblen et Whitehead en déduisent que G est un groupe de transformations (1-1) de l'espace arithmétique. Les exemples donnés sont l'espace affine (pour lequel les changement de coordonnées numériques repérant les points géométriques sont les transformations affines), l'espace euclidien (groupe orthogonal), la géométrie affine centrée (groupe linéaire), la géométrie de l'espace affine orienté. En utilisant le vocabulaire riemannien, il s'agit d'une relecture du passage des *déterminations de lieu* (*Ortsbestimmungen*) aux *déterminations de grandeurs* (*Grössenbestimmungen*) ; comme chez Riemann, l'attention se porte sur la multiplicité des passages possibles, mais cette multiplicité est ici formulée au moyen de la notion de groupe et le point de vue n'est pas implicitement local ; il est même explicitement global, quitte à ne traiter pour l'instant que de $\mathbf{R}^n$.

---

[7] Ou, sans aller aussi loin, le lecteur ayant appris ce que sont les variétés différentiables dans le cours de Chevalley sur la théorie des groupes de Lie. C. Chevalley *Theory of Lie groups* [Chevalley 1946].

[8] Rappelons le vocabulaire introduit en 1931 : une correspondance (non nécessairement univoque ni définie sur tout l'espace géométrique) $P \rightarrow x$ est un « système de coordonnées » ; la transformation dans l'espace arithmétique $x \rightarrow y$ obtenue à partir de deux systèmes de coordonnés de même domaine [P] est une « transformation de coordonnées ». C'est sur ces changements de coordonnées que portent les axiomes G.

Les chapitres III et IV introduisent, après le *groupe des coordonnées préférées*, le *pseudo-groupe des coordonnées admissibles*, et la démarche est explicitement décrite comme une *localisation*[9] des notions introduites dans les deux premiers chapitres. Les outils, tout d'abord, changent ; on passe de l'algèbre (linéaire) à l'Analyse :

> *In the last chapter we have dealt with certain limited classes of coordinate systems, all of them such that the transformations of coordinates are linear. In general it is desirable to use a much larger class of coordinate systems, so that the transformation of coordinates shall be as general as they can without destroying the significance of the analytic expressions which are to be used. The theory of the transformations which we shall use depends upon the implicit function theorem in much the same way that the algebra depends upon Cramer's rule for solving linear equations.* [V&W 1932 34]

Nos auteurs ne prennent pas la peine d'expliquer ici ce que cette extension a de désirable – quelques pages plus loin ils évoquent l'intérêt d'utiliser, par exemple, les coordonnées polaires en géométrie euclidienne. Sur un plan plus technique, ce dépassement de l'inversion linéaire fait apparaître les notions de région (ouvert) et de n-boîte. Une transformation de classe u>0 opérant sur une région de l'espace arithmétique est dite régulière si elle est (1-1) (implicitement : sur son image, qu'on a démontré être ouverte) et de déterminant jacobien partout non nul.

> *Instead of dealing, as in Chap. I, with transformations which carry the whole arithmetic space into itself, we now have to do with transformations operating on portions of space.* [V&W 1932 37]

La composition n'étant plus définie inconditionnellement, l'introduction de la notion de pseudo-groupe trouve ici sa place. Par ailleurs, un espace vérifiant les axiomes G du chapitre II pour le *groupe* des applications régulières (de classe u) de tout l'espace arithmétique dans lui-même est appelé « variété simple de classe u » (*simple manifold of class u* [V&W 1932 38]). Pseudo-groupe et variété simple permettent de définir la notion de coordonnées admissibles :

> *Any allowable coordinate system is a (1-1) correspondence $P \to x$, between a set of points, [P], and a set of arithmetic points, [x], in the arithmetic space of n dimensions. The set [P] will be called the* domain*, and [x] the* arithmetic domain*, of the coordinate system $P \to x$.*

[9] sans toutefois que le terme de « localisation » ou un analogue ne soit employé.

Allowable coordinate systems of class u in a simple manifold of class u' (u'≥u) are those, and only those, which satisfy the following conditions :

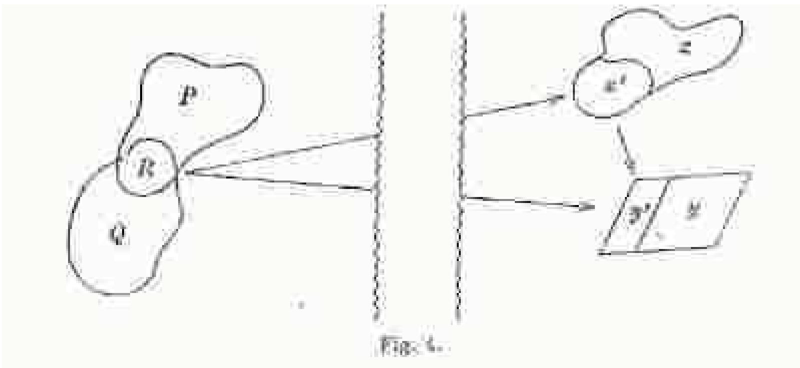
1. *If [P] is the image in a prefered coordinate system K, of an arithmetic region [x], the correspondence P → x, determined by K, is an allowable coordinate system.*
2. *If [x] is an arithmetic region, P → x an allowable coordinate system, and x → y a regular transformation of class u, then the resultant transformation P → y, is an allowable coordinate system*. [V&W 1932 39]

Si l'on quitte le vocabulaire de Veblen et Whitehead, on peut dire que l'espace sous-jacent n'est pas modifié – une *variété simple* admet une carte globale permettant sa représentation par l'espace arithmétique $\mathbf{R}^n$; mais aux côtés des cartes globales – caractérisées par des changements de cartes globaux appartenant à un groupe G – sont introduites les cartes locales – caractérisées par des changements de cartes appartenant au pseudo-groupe des difféomorphismes locaux de classe *u*. Il est bien question de cartes partielles mais pas encore d'atlas sur $\mathbf{R}^n$, encore moins de se donner un nouvel espace en coordonnant des cartes partielles. C'est un choix didactique de Veblen et Whitehead : ils ne travaillent pas simultanément l'aspect groupe et l'aspect recouvrement ; la première partie travaille sur les groupes et met en place – par le passage aux pseudo-groupes – une localisation des géométries *à la* Klein. On verra que ce n'est que bien plus tard dans l'exposé, et après un passage par l'étude des sous-variétés, que l'on passe d'un travail sur la nature des transformations à un travail sur l'articulation des sous-domaines. Ce choix d'un découpage strict des questions confère à la partie centrale de l'ouvrage un caractère mixte et parfois inconfortable. Pour l'heure, le travail sur la notion de coordonnées permet de mettre en place les définitions servant à clarifier la notion de point de vue local et de coordonnées curvilignes sur un espace $\mathbf{R}^n$ étudié sous l'action d'un groupe classique.

2. Du pseudo-groupe aux cartes locales.

Le nouveau jeu sur le domaine permis par les coordonnées admissibles appelle une redéfinition de la notion de changement de système de coordonnées, explicitée à propos de la géométrie affine (où les coordonnées préférées sont dites cartésiennes):

The domain of a cartesian coordinate system for an affine space, A_n, is the whole space, but the domain of an allowable coordinate system may be only a part of that space. Therefore we cannot, in general, talk about the transformation from allowable *to cartesian coordinates, but must introduce the notion of a transformation* between *two coordinate systems.* [V&W 1932 41]



La figure est accompagnée du commentaire qu'on imagine. On voit comment Veblen et Whitehead font émerger des raisonnements appelés à jouer un rôle dans la définition de la notion générale de variété en se contentant de dérouler les conséquences logiques du passage aux pseudo-groupes. Ils utilisent ici le schéma présenté quelques années plus tôt par Kneser, dans un contexte un peu différent. Hellmuth Kneser (1898-1973) fait paraître en 1926 un rapport sur la topologie des variétés[10] qui est encore pris dans le « champ de bataille » où s'opposent méthodes combinatoires et ensemblistes : son objectif est de donner une définition ensembliste des variétés (topologiques) pour étudier ensuite les passerelles possibles et les obstacles qui demeurent entre cette perspective et sa concurrente ; le rôle de la *Hauptvermutung* y est central. Après être parti des axiomes de Hausdorff (auxquels il ajoute l'existence d'une base dénombrable d'ouverts homoémorphes à une boule ouverte), il présente une manière courante de se donner une variété. Il part de l'analyse de la situation sur une variété compacte : si l'on se donne un recouvrement ouvert fini $U_1,\ldots,U_n$, chacun homéomorphe à une boule ouverte $V_1,\ldots,V_n$ (respectivement), alors à chaque intersection $D_{ik} = U_i \cap U_k$ correspondent deux ouverts, l'un V_{ik} dans V_i, l'autre V_{ki} dans V_k ; un homéomorphisme est ainsi donné entre V_{ki} et V_{ik}. Cette analyse fournit les outils d'une synthèse, une variété pouvant être donnée par des systèmes de boules entre lesquelles on se donne un système d'homéomorphismes partiels. Les souvenirs de la théorie de l'uniformisation des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes sont encore très présents :

> Cette présentation n'est autre que celle par « recouvrement en tuiles » [*dachziegelartige Überdeckung*], bien connue en théorie des fonctions. Si utile qu'elle

[10] H. Kneser *Die Topologie der Mannigfaltigkeiten*, J. DMV 34, 1926, p.1-13 = [Kneser 1926].

soit, elle a, lorsque l'objectif est topologique, l'inconvénient d'accepter que les applications entre V_{ik} et V_{ki} soient dans une large mesure arbitraires. Cet inconvénient ne se présente pas dans une autre présentation, qu'on peut désigner par le mot-clé de d'« association bord à bord » [*Ränderzuordnung*]. Nous avons jusque là *recouvert* une M^n par des sous-ensembles homéomorphes à la boule ouverte, elle peut aussi être *décomposée* [*zerlegt*] en de tels sous-ensembles. [Kneser 1926 4][11]

Ce passage du recouvrement à la décomposition amorce, chez Kneser, la transition vers le point de vue combinatoire. On voit que, si Veblen et Whitehead sont les héritiers de ces travaux de clarification, leur objectif est pour l'instant différent. Tout d'abord, leur ouvrage n'évoque jamais les décompositions simpliciales : les recouvrements ouverts – quoique le terme de recouvrement n'apparaisse pas et que nos auteurs soient parfois un peu discrets sur cet aspect – y règnent sans partage ; ils interviennent dans un monde d'invariants différentiels et de pseudo-groupes de difféomorphismes, pas dans l'univers des fonctions automorphes. Ensuite, à ce moment de leur exposé, le travail ne porte apparemment que sur la nature des systèmes de coordonnées et non sur la nature topologique de l'espace ainsi décrit. On le voit dans l'exemple immédiatement choisi par les auteurs : ils demandent comment caractériser les transformations préférées de la géométrie affine après qu'on a introduit les transformations admissibles. Ils montrent que les transformations affines d'un système de coordonnées cartésiennes vers un autre sont caractérisées dans des coordonnées admissibles par un système d'équations différentielles ordinaires du second ordre dans lequel apparaissent les coefficients Γ^i_{jk} d'une connexion affine. La structure ainsi obtenue est dite structure d'espace affine plat (*flat affine space*). C'est par ce travail sur les systèmes de coordonnées qu'est abordée, un peu indirectement, la question topologique des espaces sous-jacents. Ainsi, après avoir caractérisé de manière invariante par difféomorphisme local la structure d'espace affine, nos auteurs renversent la question en demandant ce que l'on obtient si l'on intègre ce système (en supposant les bonnes hypothèses d'intégrabilité) : la solution (locale) définit des « systèmes de coordonnées localement cartésiens » (*locally cartesian coordinate systems* [V&W 1932 44]) et les conditions d'intégrabilité caractérisent les connexions localement plates.

[11] *„Diese Darstellungsweise ist nichts anders als die aus der Funktionentheorie bekannte „dachziegelartige Überdeckung". So brauchbar sie dort ist, für topologische Zwecke hat sie den Mangel, daß sie in die Abbildungen zwischen V_{ik} und V_{ki}, also in weitem Maße willkürliche Funktionen eingehen. Frei von diesem Mangel ist eine andere Darstellungsweise, die durch das Schlagwort „Ränderzuordnung" bezeichnet werden kann. Haben wir bisher eine M^n mit Teilmengen* überdeck*t, die der offenen Vollkugel homöomorph sind, so soll sie jetzt in ähnliche Teilmengen* zerlegt *werden*."

A locally flat affine connection is flat if, and only if, the region over which it is defined is an n-cell C, and if C is represented by the arithmetic space in at least one locally cartesian coordinate system $P \rightarrow y$. In this case C will be a flat affine space having $P \rightarrow y$ as a cartesian coordinate system. [V&W 1932 44]

L'espace affine plat est donc toujours l'espace affine $\mathbf{R}^n$, éventuellement vu dans une carte globale non affine. Le caractère local de la solution permet toutefois d'entrevoir une généralisation :

In general the region of definition need not be an n-cell. (…) *such a space will be called a locally flat affine space*, *and its geometry locally flat affine geometry*. [V&W 1932 45]

Nos auteurs illustrent le cas localement affine (mais pas affine) en considérant la géométrie obtenue sur la couronne $1< x^2+ y^2 <2$ en transportant par homéomorphisme celle du cylindre d'équation $x^2+ y^2 = 1$ dans l'espace affine à trois dimensions. On voit que cet exemple sort du cadre étudié jusque là, mais ce n'est qu'une pierre d'attente ; il faut encore attendre plusieurs chapitres avant que le cadre final puisse englober ce cas. Pour l'heure, après un cheminement un peu tortueux, Veblen et Whitehead concluent ce chapitre consacré aux coordonnées admissibles et aux pseudo-groupes :

The geometric objects [par exemple des coordonnées cartésiennes] *and the group which they determine are classified by means of the pseudo-group of regular point transformations, two objects belonging to the same class if, and only if, they are equivalent. It is this pseudo-group, rather than the group G_u* [12]*, which is relevant, because a geometric object is not necessarily defined over the whole of a simple manifold (cf. the second example of a locally flat affine space in §13). This classification of geometric objects is in the spirit of the Erlanger Programm, equivalence under the pseudo-group being an inevitable generalization of equivalence in the narrow sense.* [V&W 1932 49]

Ce passage, très clair, montre bien la démarche de Veblen et Whitehead : dans le contexte d'une recherche de coordination entre les points de vue de Riemann et Klein, après les travaux de Cartan, Schouten, Eisenhart et Veblen sur la question, nos deux auteurs proposent de fonder le rapprochement sur la notion de pseudo-groupe de transformations. Toutefois, par sa place dans l'exposé, nos auteurs sont encore dépendants de la notion de variété simple et ils n'ont pas encore introduit la notion de recouvrement, d'où une lecture parfois difficile. C'est

[12] G_u désigne le groupe des difféomorphismes de classe u de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même.

qu'ils sont encore dans la première phase de l'exposé, celle de localisation ; d'une localisation qui passe pour l'instant par la considération de régions dans l'espace arithmétique et non encore de variétés au sens général. Notons que la coordination des points de vue de Riemann et de Klein que propose Veblen et Whitehead a lieu au niveau local et non, comme chez Cartan par exemple, au niveau infinitésimal ; nous y reviendrons.

3. Des sous-variétés aux variétés abstraites.

Le processus de localisation arrive à son terme au chapitre suivant, consacré aux sous-variétés de $\mathbf{R}^n$, ou, comme le disent nos auteurs, aux « lieux dans une variété simple » [V&W 1932 50] ; seuls deux points nous intéressent dans un exposé par ailleurs bien classique. Jusqu'ici seules les applications entre régions d'espaces arithmétiques de même dimension avaient été considérées ; l'introduction des sous-variétés invite à introduire la notion de cellule *k*-dimensionnelle dans l'espace arithmétique à *n* dimensions (où $k < n$). C'est à ce moment de l'exposé que les auteurs font apparaître la nécessité de considérer des espaces qui ne peuvent être décrits par une seule carte ; une sous-variété lisse est ainsi en général formée de plusieurs cellules collées les unes aux autres, et l'analyse de cette situation permet de faire émerger comme des propriétés naturelles une partie des énoncés qui seront pris comme axiomes pour les variétés abstraites. Par exemple :

> (…) *we can say something about how these k-cells are pieced together to make the whole locus, namely that* if two of these *k*-cells have a point P in common, there is a *k*-cell containing P and contained in each of the given *k*-cells. [V&W 1932 57]

Ces aspects relèvent de ce que nos auteurs qualifient d'étude « globale » des *k*-espaces (*k-spaces in the large* [V&W 1932 56]. Les choix didactiques de Veblen et Whitehead ne leur permettent donc d'aborder explicitement la question du local et du global que lorsqu'ils introduisent les sous-variétés de l'espace usuel. On passe alors d'un travail sur la notion de coordonnées à un travail sur la nature des espaces. Le paragraphe sur les *k*-espaces *in the large* est suivi d'un paragraphe intitulé « Propriétés locales. Géométrie infinitésimale. » (*Local properties. Infinitesimal geometry*) :

> *A property will be said to be* local *at a point P if there is an n-cell C_P, containing P, such that the property is common to all regions containing P and contained in C_P. The system of local properties at P will be called the* local structure *at P, and the theory of the local structure the* infinitesimal geometry *at P. Thus the infinitesimal geometry at*

P will contain theorems about the relation between P and points near P, but will involve no statement about a specified point other than P. [V&W 1932 57]

On retrouve dans la fin de cette citation une forme de caractérisation syntaxique de propriétés locales en un point, qui rappelle celle d'Osgood. L'enjeu est ici de préciser l'articulation entre géométrie infinitésimale et géométrie différentielle. Veblen et Whitehead précisent en effet en note que les deux termes sont souvent utilisés indifféremment mais qu'ils souhaitent donner à « géométrie différentielle » un sens plus large : la géométrie infinitésimale sera l'étude des propriétés locales des variétés différentiables, la géométrie différentielle englobera aussi les aspects *in the large* ; comme annoncé dans le préface, elle sera une synthèse de géométrie infinitésimale et d'*Analysis situs*. Ces éclaircissements de vocabulaire permettent un retour réflexif sur ce qui avait été exposé jusqu'ici, dans cet ouvrage et dans un précédent, le cours de Veblen sur *Les invariants des formes différentielles quadratiques* [Veblen 1927] (noté Q.F.) :

In infinitesimal geometry the equivalence problem of Chap. III §§16 and 17, is replaced by the problem of local equivalence. A geometrical object ξ *will be called* locally equivalent *at P to a geometrical object* $\overline{\xi}$ *at* $\overline{P}$ *if, and only if,* ξ *and* $\overline{\xi}$ *are equivalent in n-cells containing P and* $\overline{P}$ *respectively. All locally flat affine connections, for example, are locally equivalent, but not equivalent.*

It is the problem of characterizing locally equivalent geometric objects which is considered in Q.F. Chap. V. [V&W 1932 58]

Nous reviendrons un peu plus loin sur cette lecture rétrospective d'un traité écrit par Veblen à peine cinq ans plus tôt.

La distinction des niveaux et la classification des sciences géométriques esquissées dans le chapitre consacré aux sous-variétés étaient le point de retournement dans un exposé d'abord consacré à la localisation – et non l'infinitésimalisation – du programme d'Erlangen. Le chapitre VI, consacré aux axiomes de 1931, peut ainsi s'ouvrir sur la nécessaire prise en compte d'autres espaces que les variétés simples et leurs sous-variétés :

We have now completed our account of simple manifolds of class u, having been mainly concerned with their local structure. The greater part of present-day differential geometry is the infinitesimal geometry of simple manifolds, and the previous chapters contain the elementary properties which are presupposed in most books on the subject (…)[V&W 1932 75]

Dans les chapitres précédents de cette thèse, nous avions à de nombreuses reprises fait cette lecture du cadre implicite des travaux de géométrie différentielle (entre autres) ; ce cadre n'était d'ailleurs pas toujours implicite – ainsi dans l'article de Berwald sur les invariants différentiels – mais ce sont Veblen et Whitehead qui, dans les quatre-vingts pages qui précèdent cette citation, ont patiemment construit un cadre et mis en place un vocabulaire – pseudo-groupes, propriétés locales – permettant de le dire avec précision. Poursuivons ce passage introductif :

> (…) *But there are many spaces whose geometry can be studied by means of allowable coordinate systems, which do not satisfy the axioms of Chap. II, because there is no (1-1) correspondence between the space and the arithmetic space.* (…) *In general, there is no allowable coordinate system in which the whole space is represented.* [V&W 1932 75]

Le mouvement de localisation prend ici fin et les axiomes émergent d'un mouvement contraire :

> *The axioms fall into three groups, A, B and C. The axioms A describe the local structure completely, and the axioms C impose certain general restriction on the topology of the spaces. The axiome B determine the class of allowable coordinate systems. Thus the structure is built up from the small to the large, in contrast to Chap. IV, §§3 and 7, where the local structure of a k-space is deduced from its representation as a whole*. [V&W 1932 75]

On voit que nous avons tiré une clé de lecture de l'organisation de tout l'ouvrage à partir d'une remarque, certes très explicite, mais ne concernant que les descriptions des sous-variétés de $\mathbf{R}^n$ par un système d'équations puis par des paramétrisations locales.

IV. Un bilan des années 1920.

En 1932, Veblen est un mathématicien expérimenté dans trois domaines des mathématiques : les axiomatiques des géométries (euclidiennes, projectives) furent ses premières amours, puis la topologie ; la géométrie différentielle enfin, dans les années 1920, aux côtés d'Eisenhart à Princeton. Nous voudrions montrer, d'une part que le *Tract* sur les fondements de la géométrie différentielle représente un effort de synthèse d'aspects jusque là relativement *indépendants* dans l'œuvre de Veblen ; d'autre part, que son travail sur l'espace tangent ou les espaces attachés à une variété constitue un retour qui se veut critique et fondationnel sur les conceptions ayant émergé dans les années 1920, mais pas un premier pas vers la notion d'espace fibré.

1. Une prise en compte tardive du couple local/global.

Dans les années 1920, Veblen prend activement part aux travaux des géomètres différentiels de Princeton, en particulier au développement de la géométrie des chemins (*Geometry of paths*), qu'Eisenhart et lui-même présentent ainsi dans un article de 1922 :

> *One of the simplest ways of generalizing Euclidean Geometry is to start by assuming (1) that the space to be considered is an n-dimensional manifold in the sense of Analysis Situs, and (2) that in this space there exist a system of curves called* paths*, which, like the straight lines, serve as a means of finding one's way about.*
>
> *These paths are defined as the solutions of a system of differential equations,*
>
> $$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0, \qquad (1.1)$$
>
> *In which the* Γ^i_{jk} *are analytic functions of* $(x^1,x^2,...,x^n)$ (…). [Eisenhart, Veblen 1922 19]

La référence aux variétés « au sens de l'Analysis situs » ne semble ici renvoyer qu'à la *n*-dimensionalité et à l'absence de coordonnées naturelles, pas aux aspects globaux. L'article n'aborde que des aspects différentiels et demeure dans l'implicite le plus total lorsque des théorèmes locaux sont utilisés (par exemple pour affirmer qu'un « vecteur » vérifiant certaines conditions d'intégrabilité est le gradient d'un scalaire [Eisenhart, Veblen 1922 23]). Si c'est Eisenhart qui rédige les manuels de géométrie différentielle « moderne », Veblen a aussi une contribution didactique importante dans les années avec 1920 son manuel sur les *Invariants des formes différentielles quadratiques* [Veblen 1927] – un ouvrage d'ailleurs plus consacré à la notion générale de connexion et aux « chemins » associés qu'aux formes différentielles quadratiques[13]. C'est peu dire que la perspective n'est pas alors celle d'un dialogue avec l'*Analysis situs* :

> *The theory of differential invariants, like the theory of algebraic invariants, is essentially formal. It has many geometrical and physical applications which have*

[13] Le titre reflète plus une contrainte éditoriale : l'ouvrage commandé à Veblen par les éditeurs des *Cambridge Tracts* devait présenter les développements récents en théorie en théorie des formes différentielles quadratiques et remplacer un ouvrage, vieux d'une vingtaine d'années, sur le même thème.

played a large role in the development of the theory. Yet, after all, it is the actual formulas which are the essential subject matter of the theory. [Veblen 1927 1]

Cette attention centrée sur les invariants différentiels pourrait toutefois ne pas s'écrire dans un style universellement et implicitement local, c'est pourtant très largement le cas. On trouve dans l'ouvrage un unique usage de « local » au sens actuel, dans le dernier chapitre, consacré à la géométrie des chemins dans les espaces plats (i.e. où l'on peut trouver un système de coordonnées annulant identiquement les composantes Γ^i_{jk} de la connexion affine). Plus généralement, eu égard aux chemins d'une connexion affine :

> (…) *they have the local* property that any two points may be joined by one and only one curve of the system*. [Veblen 1927 83]

« *local* » renvoyant à la note infrapaginale :

> ** The adjective « local » implies that any point may be enclosed in an n-cell within which the property holds good.* [Veblen 1927 83]

Le terme « local » est repris un peu plus loin dans la démonstration de cette proposition, la *n*-cellule étant alors la région de convergence de séries : on voit que, bien classiquement, l'explicitation du local est associée à la notion de domaine de convergence. Cette apparition – dans un contexte classique mais avec le sens moderne – du local est toutefois l'exception plutôt que la règle dans ce traité sur les invariants des formes différentielles quadratiques. Le même terme est aussi employé au sens infinitésimal, par exemple lorsque la notion de vecteur contravariant est introduite par la remarque:

> *Any transformation of coordinates is* locally linear. [Veblen 1927 16]

Plus généralement, une grande partie de cet ouvrage est consacrée au « problème de l'équivalence » sans aucune mention du caractère local de l'équivalence en question : la distinction soigneuse de deux problèmes - le problème d'équivalence[14] et le problème d'équivalence locale – que l'on trouve en 1932 est complètement absente en 1927. De manière cohérente, ce qui sera appelé « géométrie localement euclidienne » en 1932 est simplement la géométrie euclidienne en 1927 :

> *We shall consider any quadratic differential form which reduce in a particular coordinate system y to*
>
> $$(2.1) \qquad ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + \ldots + (dy^n)^2$$
>
> *and refer to the theory of this differential form as* Euclidean geometry of *n* dimensions *with respect to a fixed unit of distance.* [Veblen 1927 51]

[14] Veblen et Whitehead parlent de « *macroscopic equivalence* » en [V&W 1932 83].

Un dernier point est fondamental, on le rencontre dans le définition générale de la notion d'invariant différentiel. Après avoir rappelé le théorème d'inversion , explicité le fait que l'inverse n'est univoque que dans un voisinage de chaque point et expliqué qu'on peut, pour obtenir plus d'invariants, réduire la famille des transformations utilisées en ajoutant d'autres conditions que la différentiabilité et la non annulation du déterminant jacobien, Veblen conclut :

> *Hence the restricted transformations form a group*. [Veblen 1927 15]

La perspective est explicitement celle du programme d'Erlangen, mais la localisation n'est en rien explicitée. C'est donc entre 1927 et 1932 que Veblen introduit la notion de pseudo-groupe de transformations, et leur définition en 1932 s'accompagne de la note infrapaginale :

> *This corrects an error is Q.F. Chap. II §2, where it is stated that the set of coördinate transformations is a group.* [V&W 1932 40]

On voit comment, par l'émergence d'une distinction absolue entre l'infinitésimal et le local, par l'introduction de la syntaxe « espace localement … », et surtout par l'introduction de la notion de pseudo-groupe de transformations, Veblen connaît entre 1927 et 1932 une évolution semblable à celle connue par Cartan autour de 1925. C'est d'autant plus étonnant que, contrairement à Cartan, Veblen était un professionnel de la topologie ; mais dans ses textes des années 1920 deux types d'écriture peuvent se croiser sans interférer, selon le sujet traité. On mesure ainsi mieux l'apport spécifique du travail sur les fondements de la géométrie différentielle, d'un travail dont le système des axiomes ne représente qu'une partie. Le lent déroulement conceptuel du *Tract* de 1932 correspond à la mise en place d'une nouvelle façon d'écrire et de penser les questions de géométrie différentielle, en rupture avec des automatismes de réflexion et de rédaction ; c'est seulement après avoir patiemment construit ce nouveau cadre qu'on peut énoncer les axiomes. L'expérience de topologue de Veblen apporte alors une note spécifique : familier des débats sur la notion de variété *topologique*, il propose une localisation du programme d'Erlangen – un travail par les cartes, donc – bien distinct du travail d'infinitésimalisation mené par Weyl et Cartan.

2. Les espaces associés : le modèle de l'holonomie.

Le cadre proposé dans le *Tract* de 1932 cherche à intégrer aussi les réflexions des années 20 sur les espaces généralisés et évoque l'« attachement » d'espaces en chaque point d'une première variété. Ces travaux des années 1920, Veblen y a pris part directement. Parallèlement aux travaux de géométrie des chemins, il publie des articles sur les analogues projectifs et conformes des (champs de) tenseurs usuels[15] ; sans entrer dans les détails, on peut dire que le style en est le même que dans ses autres travaux de géométrie infinitésimale d'avant 1931. Sur le fond, il est plus proche de la notion d'espace généralisé développée par Schouten [Schouten 1926] et reposant sur une description linéaire des espaces de Klein attachés à chaque point (par exemple en regardant l'espace projectif *n*-dimensionnel comme l'espace des droites vectorielles d'un espace vectoriel de dimension n+1) sur le modèle initialement proposé par Hessenberg [Hessenberg 1916]. C'est de cet univers de questions que relève le chapitre V du *Tract*, consacré à l'espace tangent, ainsi qu'une partie du chapitre VII. Le chapitre V est placé, si l'on suit notre conception du mouvement général de l'exposé, à la fin de la période de localisation et avant l'énoncé des axiomes *in the large* ; il est possible que nos auteurs veuillent faire sentir que le passage aux espaces infinitésimalement attachés à chaque point d'une variété différentiable prolonge, en franchissant toutefois un niveau, le mouvement de localisation : rien n'est toutefois explicite dans le texte. Le seul objectif avoué de ce chapitre est de construire de manière intrinsèque, en chaque point d'une *simple manifold*, l'analogue de l'espace tangent à une sous-variété lisse de $\mathbf{R}^n$. La présentation est sans surprise et ne diffère guère de ce qu'on trouve depuis une dizaine d'années lorsque les bons auteurs, tels Weyl, abordent la question.

> *A regular function of n variables $F(x^1,\dots,x^n)$, determines a function of 2n variables*
>
> $$dF = \frac{\partial F}{\partial x^i} dx_i \ ,$$
>
> *which is of class u-1 in x and linear homogeneous in dx. The variable $dx^1,\dots,dx^n$ are called the* differentials *of the variables $x^1,\dots,x^n$, respectively, and dF is called the* differential *of F(x).* (…) *The function dF is not necessarily a « small quantity » though it tends to zero with dx.* [V&W 1932 59]

L'aspect « approximation locale » est certes évoqué, mais il importe plus à Veblen et Whitehead de montrer que, eu égard aux effets d'un changement de système de coordonnées sur l'expression de dF, l'ensemble des $(dx^1,\dots,dx^n)$ – vu comme des *n*-uplets formels – est muni de la géométrie d'un espace affine centré : ce sera l'espace « tangent »[16] attaché au point. Nous ne pensons pas l'on puisse voir dans ces lignes bien classiques la première définition du *fibré tangent*. Premièrement, il n'est question que de l'espace tangent attaché à un point (ou à deux points reliés par une courbe) de la variété, pas de l'espace tangent à la variété ; deuxièmement, ce chapitre intervient avant l'exposé des axiomes permettant la

[15] Par exemple dans *Projective Tensors and Connections*, Proc. N.A.S.vol.14 (1928) p.154-166, ou *Conformal Tensors and Connections*, Proc. N.A.S. vol.14 (1928), p.735-745 = [Veblen 1928b], [Veblen 1928a].

définition des variétés *in the large*, et, après que ces définitions ont été données, aucun retour n'est fait pour signaler que regarder dF comme fonction de classe *n*-1 en deux séries de variables définit globalement une nouvelle variété naturellement associée à toute variété de classe *u*>0. Le chapitre V est entièrement consacré aux questions infinitésimales, et c'est le dépassement de l'espace tangent par introduction des différentielles secondes et troisièmes qui fait l'objet du chapitre : introduction intrinsèque aux connections et invariants différentiels, ni plus ni moins. Nos auteurs l'annoncent d'ailleurs dès le début du chapitre : donner d'une manière intrinsèque (donc qui s'étendra naturellement des *simple manifolds* aux variétés générales) les premiers éléments permettant de lire le traité de 1927 sur les invariants différentiels. Enfin, tous les travaux cités dans le dernier paragraphe du chapitre (Weyl, Schouten, Levi-Civita, König, T.Y. Thomas) sont consacrés au traitement des espaces généralisés par les invariants différentiels.

Le sixième chapitre est consacré aux axiomes présentés dès 1931, dont on comprend maintenant mieux en quoi il propose une articulation entre deux aspects jusque là travaillés indépendamment : le travail sur la localisation de la notion de la géométrie *à la* Klein permis par la notion de pseudo-groupe (mis en place jusqu'ici dans $\mathbf{R}^n$), et le travail de description d'un espace insaisissable au moyen d'une unique carte (mis en place de manière extrinsèque à propos des sous-variétés de $\mathbf{R}^n$). Le septième et dernier chapitre est consacré à des exemples de situations géométries riches et non strictement locales : des problèmes de *géométrie différentielle* et non plus de *géométrie infinitésimale*, pour reprendre les termes de nos auteurs. L'idée d'association d'un espace de Klein à chaque point d'une variété et l'idée de transport (*displacement*, *Übertragung*) est reprise à un plus haut niveau d'abstraction qu'au chapitre V :

> *A large class of geometries are concerned with the theory of displacements of associated spaces to which reference has been made at the end of Chap. V. These displacements are generalizations of the affine displacements described in Chap.V. The general process may be described in abstract terms as follows :*
>
> *With each point P of an underlying regular manifold there is an associated space S(P), and all these spaces are isomorphic. A family of displacements is a set of transformations S(P) → S(Q) such that :*
>
> (1) *Any displacement S(P) → S(Q) is an isomorphic transformation of S(P) into S(Q).*
>
> (2) *If P and Q are two points of the underlying manifold there exists at least one displacement S(P) → S(Q).*

---

[16] Pour nous, cotangent.

(3) *The resultant of a displacement S(P) → S(Q) followed by a displacement S(Q) → S(R) is a displacement S(P) → S(R).*

(4) *The inverse of a displacement S(P) → S(Q) is a displacement S(Q) → S(P).* [V&W 1932 91]

Veblen et Whitehead expliquent ensuite que les déplacements sont en général associés à des courbes de la variété sous-jacente, et ils reprennent de Cartan la notion de groupe d'holonomie en un point. Comme chez Cartan, la trivialité locale est saisie sous l'angle de l'holonomie locale [V&W 1932 93]. Pour abstraite qu'elle soit, cette présentation reprend les éléments déjà standards dans la théorie des espaces généralisés et montrent une influence de Cartan que l'on n'avait pas vue jusque là chez des auteurs plus familiers de Weyl et Schouten. Il ne s'agit en rien ni de la conceptualisation d'une variété fibrée au-dessus d'une autre (regroupant tous les espaces attachés aux points de la seconde), ni d'une saisie de la trivialité locale sous forme d'une structure produit (localement sur la base).

Nos auteurs innovent toutefois en faisant entrer la notion de revêtement dans leur cadre abstrait d' « association » d'espace en chaque point d'un autre. Ils commencent par l'exemple du revêtement d'orientation :

> *The tangent space of differentials T(P), at any point P, determines two oriented tangent spaces $T_1(P)$, and $T_2(P)$. There is thus an associated space S(P), which contains just two points, namely $T_1(P)$ and $T_2(P)$.* [V&W 1932 94]

Veblen et Whitehead font ensuite alterner les arguments de trivialité locale (dans la *n*-cellule contenant le point P) et l'unicité du prolongement le long d'un chemin de la variété initiale (supposée connexe) pour affirmer que l'association de déplacements le long des courbes est localement holonome, et est holonome si et seulement si la variété est orientable. Ils font ensuite remarquer que, plus généralement, si un transport est localement holonome dans un espace contractile, il est holonome. Dans le cas contraire, ils proposent une construction un peu plus générale que celle du revêtement d'orientation, mais s'en inspirant directement. Ils partent du cas d'une association où les espaces S(P) associés à chaque point n'ont pas d'autre structure que leur cardinal, et où le transport est localement holonome. Prenant pour modèle le lien usuel entre revêtement et fonction multivoque, ils décrivent les ensembles S(P) comme des images pour des fonctions :

> *The associated spaces, S(P), need have no structure beyond their cardinal number. They may then be regarded as the sets of values of some function $\xi(P)$.* [V&W 1932 95]

Il ne s'agit en rien d'une section locale (univoque) mais d'une fonction multivoque définie sur toute la variété. Sous hypothèse de locale holonomie du transport Δ, la notion de branche est bien définie.

> *Let a new manifold* $\overline{M_n}$ *, be defined ad follows. A point [P,ξ(P)], in* $\overline{M_n}$ *is to be a point, P, in* M_n*, associated with a point, ξ(P), in S(P). The coordinate system [P,ξ'(P)] → x is to be an allowable coordinate system for* $\overline{M_n}$*, where P → x is any allowable coordinate system for* M_n *over whose domain Δ is holonomic, and ξ'(P) is one of the single valued-branches described above. With this family of allowable coordinate systems* $\overline{M_n}$ *obviously satisfies the axioms for a regular manifold.* [V&W 1932 96]

Le *Tract* de 1932 s'achève sur cette présentation de la notion générale de revêtement. L'objectif que les auteurs se fixent est atteint, au sens où les constructions *usuelles* – ici usuelles en topologie et en théorie des fonctions, pas en géométrie différentielle – trouvent une place dans le cadre axiomatique mis en place au chapitre VI. L'exemple des revêtements prouve que ce cadre peut en effet accueillir des constructions non locales bien connues ; il n'est pas ici le premier pas vers une définition de variétés fibrées, lorsqu'on se donne une variété de base et une association localement holonome de déplacements dans des espaces associés à structure géométrique riche.

V. Une position historique complexe.

Tentons de saisir la position historique complexe de ce traité. Il deviendra très vite une référence sur laquelle des auteurs comme Whitney ou Ehresmann s'appuient pour développer des conceptions qui, nous pensons l'avoir montré par cette lecture détaillée, ne sont pas celles de Veblen et Whitehead. Ce que nos auteurs proposent, c'est la construction d'un cadre permettant de prendre une position de surplomb et de synthèse par rapport aux courants multiples qui se croisent, parfois dans l'indifférence réciproque, parfois dans l'incompréhension, dans les années 1920. Le système d'axiomes n'est que l'aboutissement d'une démarche dont chacune des étapes instruit le lecteur ; il faut inventer un *unique* langage pour parler des variétés dans *tous* leurs aspects – infinitésimaux, locaux ou *in the large*[17] – et l'on mesure le travail accompli en comparant avec la manière dont Veblen abordait, quelques années plus tôt, les questions d'invariants différentiels. Le *Tract* propose un cheminement

[17] Classiquement vus comme relevant de l'*Analysis situs*.

original, dont on peut ainsi résumer les étapes : (1) caractérisation des géométries par les groupes de transformations linéaires (d'un espace abstrait mis en bijection avec $\mathbf{R}^n$) ; (2) localisation par l'introduction des pseudo-groupes et des difféomorphismes locaux ; (3) sans quitter dans un premier temps ce cadre, le travail sur les changements de coordonnées admissibles et sur les sous-variétés de $\mathbf{R}^n$ fait émerger les questions de changement de coordonnées dans des intersections de domaines de cartes ; (4) les axiomes peuvent, enfin, reprendre ces éléments en n'imposant plus de référence globale à $\mathbf{R}^n$. L'un des traits originaux de cette présentation est, nous y avons fait plusieurs fois allusion, que la notion de géométrie *à la* Klein y est *localisée* plutôt qu'*infinitésimalisée* : géométrie dans les cartes plutôt que dans chacun des espaces tangents (ou autres) attachés en chaque point. Bien que les cas non localement homogènes tombent parfaitement dans le cadre décrit, c'est le cas localement homogène qui guide l'exposé. Ainsi, c'est le cas des espaces localement affines[18] qui est l'exemple central dans le moment (2). Parallèlement à la rédaction du *Tract* avec Veblen, c'est sur la notion générale d'espace homogène que travaille Whitehead. Son article sur *Les espaces localement homogènes en géométrie différentielle* [Whitehead 1932] le montre héritier non seulement de l'école américaine de la géométrie des chemins, mais aussi du travail de Hopf sur le *Raumproblem* et des réflexions de Cartan sur les espaces localement euclidiens. Cette *perspective* sur la géométrie différentielle confère à ce *Tract* son caractère bien particulier. Certes la plupart des ingrédients ne semblent pas originaux (parfois même un peu archaïques) : axiomes de variété topologique d'après Kneser, travail symbolique sur les éléments différentiels attachés à chaque point, lien entre les espaces « attachés » formulé dans le langage de l'holonomie, lien entre groupe et géométrie relevant du pur Programme d'Erlangen sans que l'ouverture vers les groupes de Lie soit esquissée, approche des revêtements par les fonctions multivoques etc. Certes, au delà de la notion de pseudo-groupe, l'ouvrage apporte peu d'outils nouveaux pour travailler sur les variétés : ce sont les lecteurs du *Tract*, tels Whitney, Bochner, Steenrod ou Ehresmann, qui mettent en place les théorèmes d'existence d'applications entre variétés, les partitions de l'unité, les voisinages tubulaires, les fibrés associés à une variété différentiable, les liens avec les groupes de Lie etc. La notion de revêtement reste un cas isolé : dans le cas général, les espaces attachés aux différents points d'une variété ne sont pas appelés à former une nouvelle variété fibrée (par exemple) au-dessus de la première. Mais la perspective donnée par la question des espaces localement homogène peut, en partie, expliquer un trait fondamental : le *Tract* est construit autour du couple local/global et non autour du couple infinitésimal/fini.

[18] Que, rappelons-le, Veblen appelait encore simplement « affine » quelques années plus tôt.

Chapitre 14. Fibrés.

Au début des années 1930, Seifert et Threlfall d'une part, Whitney d'autre part introduisent explicitement une nouvelle structure en topologie. Si, comme dans les travaux des années 20 présentés plus haut, le couple local/global y joue un rôle central et explicite, ce n'est plus la notion de revêtement ni le thème de l'indiscernabilité locale de deux espaces qui guident la réflexion. Ici, les fonctions relient des variétés de dimensions différentes, soit projection d'un espace total vers un espace de base, soit champ (de vecteurs, de directions, d'éléments de plans) progressivement vu comme une section locale à étendre. Après le revêtement universel, un autre type d'association naturel d'une variété à une autre se met en place, le cas le plus important étant celui de la multiplicité des vecteurs tangents, collectivisée en la variété tangente ; à cette occasion se mettent en place les techniques de description d'un objet « au-dessus » d'un autre, avec leurs recouvrements trivialisants et leurs données dans les intersections, autant de formulations qui se retrouveront dans le langage des faisceaux. Participant du local (sur la base et dans l'espace total) et du global (sur la fibre), la figure mixte du « trivial localement sur la base » devient centrale. La distinction entre espace produit et espace fibré enrichit la liste des couples associés à local / global.

Nous ne présentons pas ici la richesse des travaux des années 1930 sur la topologie des fibrés ni les interactions entre celles-ci et les développements plus généraux de la topologie algébrique – par exemple la mise au jour des groupes d'homotopie π_n (n>1). La description de nouvelles structures générales passe par un travail d'articulation explicite et parfois inédit entre local et global ; c'est de ce travail qu'il nous faut rendre compte. Nous commencerons par montrer comment les premières synthèses de Seifert, Threlfall et Whitney s'appuient sur des travaux des années 1920, ceux de Hotelling et de Hopf, sensiblement distincts des travaux sur la géométrie des espaces généralisés ou de la topologie des groupes de Lie que nous rencontrions jusqu'ici.

I. Topologie et Dynamique chez Harold Hotelling.

Harold Hotelling (1895-1973) soutient en 1924 à Princeton une thèse dirigée par Veblen sur les *variétés tridimensionnelles d'états de mouvement* (*Three-dimensional Manifolds of States of Motion*). Ce sont essentiellement les deux articles[1] tirés de sa thèse qui nous concernent,

[1] [Hotelling 1925] et [Hotelling 1926].

Hotelling poursuivant sa carrière comme statisticien et économiste. Le point de départ de Hotelling se trouve dans l'article de Birkhoff de 1917 sur les systèmes dynamiques à deux degrés de liberté, ce même article dans lequel Morse avait trouvé l'idée du *minimax*. Hotelling commence par rappeler l'interprétation géométrique des deux cas dynamiques, réversible (bien connu) et irréversible (interprétation due à Birkhoff) :

> *Professor Birkhoff has shown that every dynamical problem with two degrees of freedom can be represented by the motion of a particle under a particular field of force on a characteristic surface which is either fixed (reversible case) or rotating at uniform velocity and carrying its field of force with it (irreversible case). In either type of problem, the magnitude of the velocity is a function only of the position of the particle on the surface, so that the state of motion at any instant is given by three parameters, two giving the position and one the direction of motion. We shall for the most part consider the last named parameter as varying from 0 to 2π, regarding opposite directions as distinct ; this is essential in the irreversible case though not in the reversible case*. [Hotelling 1925 329].

Donnons pour comparaison le passage original de Birkhoff, qui jouera aussi un rôle dans les travaux de Seifert et Threlfall :

> **The manifold of states of motion**. *The equations of motion (1') may be replaced by the differential system*
>
> $$\frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} - \frac{dx'}{-\lambda y' + \gamma_x} = \frac{dy'}{\lambda x' + \gamma_y} = dt. \qquad (27)$$
>
> *We now consider the variables x'= dx/dt , y' = dy/dt as well as x, y to be dependent variables. The relations (4') may be written*
>
> $$\tfrac{1}{2}\,(x'^2 + y'^2) - \gamma = 0. \qquad (28)$$
>
> *In conformity with methods long employed in dynamics we will interpret x, y, x', y' as the rectangular coördinates of a point in four dimensional space. For obvious reasons a set of values x, y, x', y' will be called a* state of motion*. Thus we have a three-dimensional manifold (28) representing possible states of motion and lying within this four-dimensional space.*
>
> *Evidently the equations (27) represent a steady fluid motion of this four-dimensional space which carries the manifold (28) into itself. The totality of orbits in the dynamical problem of type (1'), (4') may therefore be thought as stream lines of a three-dimensional fluid in steady motion. It has been noted (§6) that the fluid motion, when*

represented in xyϕ-space is incompressible. In the original xyx'y'-space the volume integral ∭dxdydϕ is invariant when taken over any part of the fluid.

(…) *The connectivity of the manifold of states of motion is completely determined by the genus of the characteristic surface and the number of ovals of zero velocity. We shall not elaborate this relation.* [Birkhoff 1927 268] [2]

C'est bien sûr ce dernier aspect qu'étudie Hotelling, laissant de côté les aspects dynamiques, l'étude du flot, les invariants intégraux etc. on le verra toutefois à la fin de l'article aborder, sous l'angle topologique, la question des « ovales de vélocité nulle ». Il formule un problème purement topologique et le traite à ce niveau ; ses références sont Veblen et Alexander et son outil principal est le groupe fondamental, décrit par générateurs et relations. Le problème topologique se présente toutefois sous une forme bien particulière :

The three parameters may be regarded as determining a point in a three-dimensional manifold. The manifold thus obtained are considered in this paper from the point of view of analysis situs.

It should be noted that these manifolds are not in general, as might be expected, the « product manifolds » whose points are in 1-1 continuous correspondence with pairs of points, one of each pair lying on the characteristic surface and one on a circle. (…) *Only for a surface of the connectivity of the anchor ring are the two-manifolds homeomorphic. The underlying reason is the impossibility of a non-singular coördinate system or continuous distribution of vectors on any other surface.* [Hotelling 1925 329]

Cette notion de produit de variétés n'est pas une innovation de Hotelling, elle n'est toutefois pas encore une notion commune en topologie. Hotelling ne s'appuie, à son sujet, que sur deux références [Hotelling 1926 489] : un article fondamental de E. Steinitz [Steinitz 1908] un article beaucoup plus récent de H. Künneth [Künneth 1923] ; la notion n'apparaît pas dans le cours de topologie de Veblen. Les premières lignes de l'article de Künneth suffiront à saisir l'état de la question :

Dans *Contributions à l'Analysis situs*, publiée dans les Comptes-rendus de la Société Mathématique Berlinoise, Steinitz parle de la multiplication de deux variétés. Par produit d'une variété p-dimensionnelle A et d'une variété q-dimensionnelle B, il entend une variété (p+q)-dimensionnelle C, dont les points sont associés bi-univoquement à toutes les combinaisons possibles de points de A à des points de B.

[2] La formule (27) devrait sans doute contenir un « = » au lieu du « – ».

> On peut aussi dire : chaque point *c* de C est le produit d'un point *a* de A avec un point *b* de B (*c* = *a.b*). De quelque manière qu'on définisse la notion de voisinage dans une variété, doivent appartenir au voisinage d'un point *c* = *a.b* de C tous les points et seulement les points dont l'un des facteurs appartient au voisinage de *a* dans A et l'autre facteur au voisinage de *b* dans B. En ce sens, on peut par exemple voir le volume d'un cylindre comme le produit d'un disque par un segment, ou la surface du tore comme le produit de deux cercles.
>
> La question qui se présente alors est : est-il possible de dériver des propriétés de la variété produit des propriétés de ses facteurs. [Künneth 1923 65] [3]

Steinitz avait partiellement atteint cet objectif en 1908, en utilisant par exemple la caractéristique d'Euler-Poincaré ; dans cet article de 1923, Künneth établit par des méthodes combinatoires la formule qui porte toujours son nom relative aux nombres de Betti d'une variété produit.

Dans l'article de 1925, Hotelling commence par exposer assez en détail la construction de la variété des états de mouvements associée à la sphère, au tore, au plan projectif, avant de généraliser rapidement la description par générateurs et relations du groupe fondamental de l'espace obtenu à partir de toute surface (compacte, orientable ou non). La structure de produit « localement sur la base » est le ressort essentiel mais elle n'est présente qu'en acte, aucun terme spécifique ne vient la désigner. Ainsi pour la variété associée à la sphère, Hotelling commence par découper la sphère en deux régions transformées conformément en des disques plans ; la partie de la variété tridimensionnelle « correspondant à chaque région » ([Hotelling 1925 330]) est homéomorphe à un tore, la variété est décrite lorsque l'on connaît la règle d'identification des tores associés aux hémisphères. Une remarque un peu plus générale se glisse à la fin de l'article de 1926 :

> *It is noteworthy that a manifold of the states of motion in an n-dimensional manifold, while not in general a product manifold itself, may divided into regions of which each*

---

[3] *„In „Beiträgen zur Analysis situs", veröffentlicht in den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft, spricht Steinitz von der Multiplikation zweier Mannigfaltigkeiten. Unter dem Produkt einer p-dimensionalen Mannigfaltigkeit A mit einer q-dimensionalen Mannigfaltigkeit B wird dabei eine (p+q)-dimensionalen Mannigfaltigkeit C verstanden, deren Punkte eineindeutig allen möglichen Kombinationen von Punkten von A mit Punkten von B zugeordnet sind. Man sagt auch : jeder Punkt c von C ist das Produkt eines Punktes a von A mit einem Punkt b von B (c = a.b). Ist nun irgendwie der Begriff der Umgebung eines Punktes innerhalb einer Mannigfaltigkeit definiert, so sollen ferner zur Umgebung eines Punktes c = a.b in C alle Punkte und nur die Punkte gehören, deren einer Faktor der Umgebung von a in A und deren anderer Faktor der Umgebung von b in B angehört. In diesem Sinne kann man z.B. den Inhalt eines Zylinders auffassen als das Produkt einer Kreisfläche mit einer Strecke, oder die Torusfläche als Produkt zweier Kreislinien.*
Es liegt nun die Frage nahe, ob es möglich ist, Eigenschaften einer Produktmannigfaltigkeit aus den Eigenschaften ihrer Faktoren abzuleiten."

> *is the product of an n-cell by an (n-1)-dimensional sphere (if opposite directions are considered distinct) or projective space (if opposite directions are treated as identical*). [Hotelling 1926 490]

Un dernier élément de description apparaît, sans toutefois jouer un rôle essentiel dans le travail topologique de Hotelling. L'étude topologique de la variété des états de mouvements peut être considérée comme le premier moment de l'étude d'un système dynamique à deux degrés de libertés. Si en chaque point de la variété de base passe une infinité de trajectoires du système dynamique – une dans chaque direction (en un point non singulier) –, la situation est plus simple dans la variété tridimensionnelle associée :

> *Each orbit is represented by a curve in the manifold. These curves are called « stream lines » by Birkhoff (loc.cit.) because of a hydrodynamical analogy. The stream lines constitute a non-singular congruence, one through each point of the manifold. To a periodic orbit corresponds a closed stream line.* [Hotelling 1925 329]

Cet aspect est peu travaillé par Hotelling, qui étudie toutefois le cas où, sur la surface primitive, se présente une courbe le long de laquelle la vitesse s'annule ; au-dessus de cette courbe les orbites se pincent en une courbe, alors qu'au-dessus de toute autre courbe elles remplissent bien une surface [Hotelling 1925 341]. Ces complications, liées au fait que la variété des états de mouvement n'est qu'un cadre pour décrire un système dynamique, ne seront pas reprises par Seifert et Threlfall ; la description de ce que nous appelons l'espace total au moyen d'une « congruence » de courbes jouera par contre, alors, un rôle premier.

Notons que Veblen, directeur de thèse de Hotelling, ne reprend pas ces éléments dans son ouvrage sur les fondements de la géométrie différentielle. L'impossibilité de champs de vecteurs tangents non-singuliers sur la plupart des surfaces permettait à Hotelling d'établir que la variété des états de mouvements n'est pas en général une variété produit ; cette même impossibilité, rapportée par Veblen et Whitehead au début de leur chapitre 7, n'illustre rien de plus précis que l'existence de contraintes topologiques globales.

II. Hopf : topologie des fibrés sans le concept de fibré.

Plusieurs travaux de Hopf de la période 1925-1931 sont utilisés par les auteurs réfléchissant aux fondements de la géométrie différentielle ou proposant d'introduire de nouvelles structures générales en topologie : on l'a vu pour le travail sur les champs de vecteurs, on devine le rôle que pourra jouer la « fibration de Hopf ». Un parcours rapide de ces travaux permet de montrer que ce n'est qu'indirectement que Hopf joue un rôle dans l'émergence de la notion d'espace fibré.

On peut tout d'abord considérer une série de trois articles qui forment une unité, tant par leur contenu que par leur méthode : *Sur la curvatura integra des hypersurfaces fermées*[4] en 1926, *Sur les classes d'applications entre variétés n-dimensionnelles*[5] et *Champs de vecteurs dans les variétés n-dimensionnelles*[6] en 1927. Après Poincaré, Hadamard et Brouwer, Hopf donne une définition de l'indice d'une singularité isolée d'un champ de vecteur ou, plus généralement, de l'indice de coïncidence entre deux applications : soient H_1 et H_2 deux applications d'un domaine (i.e. d'un ouvert) de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, on peut associer à chaque point P du domaine le vecteur reliant $H_1(P)$ à $H_2(P)$; si les deux applications ne coïncident pas en P, on en déduit une application à valeur dans la sphère S^{n-1}, sphère des directions de $\mathbf{R}^n$; si les deux applications coïncident en P mais non au voisinage de P, le degré de la restriction de l'application précédente à une sphère suffisamment petite entourant P définit l'indice de coïncidence en P de H_1 et H_2. On voit qu'il n'est en rien question de vecteurs tangents, qu'il n'est pas question d'attacher à chaque point une sphère de directions propre. Le caractère local de cette notion d'indice de coïncidence n'invite certes pas à de telles subtilités, mais le passage au global montre qu'il n'est pas question de cela. Dans le premier article, Hopf démontre la formule fondamentale dont il tirera des conséquences dans toute la série d'articles : soit une variété (topologique) compacte orientable de dimension n, et f_1, f_2 deux applications continues de cette variété dans la sphère S^n ne coïncidant qu'en un nombre fini de points ; alors, la somme des indices de coïncidence est égale à $(-1)^n g_1 + g_2$, où g_1 et g_2 sont les degrés (brouweriens) de f_1 et f_2. La démonstration se fait par approximation simpliciale. Dans le premier article, Hopf en déduit des propriétés des hypersurfaces : il nomme « modèle » d'une variété topologique M n-dimensionnelle une hypersurface (avec d'éventuelles auto-intersections) de $\mathbf{R}^n$ qui soit l'image de M par une application univoque, continue et *im Kleinen* inversiblement univoque sur son image. A un modèle d'une variété orientée on peut associer un champ de vecteurs normaux, le degré de l'application ainsi définie vers la sphère S^n étant appelé par Hopf la *curvatura integra* C du modèle. De la formule fondamentale il tire pour les variétés fermées compactes la relation $s = C(1+(-1)^n)$, où s est la somme des indices des singularités d'un quelconque champ de vecteurs tangents au modèle (notion définie de manière extrinsèque); s étant un invariant topologique, C l'est aussi en dimension paire. Les

[4] *Ueber die curvatura integra geschlossener Hyperflächen*, [Hopf 1926b]
[5] *Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten*, [Hopf 1927a]
[6] *Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, [Hopf 1927b]

mêmes outils sont utilisés dans l'article sur les classes d'applications entre variétés n-dimensionnelles ; la question du prolongement continu à la boule B^n d'une distribution continue de vecteurs (non nécessairement tangents) sur son bord S^{n-1} y est centrale. L'article sur les *champs de vecteurs dans les variétés n-dimensionnelles* se détache des questions de plongement et utilise un cadre plus intrinsèque pour l'étude des champs de vecteurs (tangents cette fois) : l'objectif est de généraliser la proposition obtenue par Poincaré pour les surfaces (compactes orientables) sans bord selon laquelle la somme des indices des points singuliers pour un champ continu de vecteurs tangents est un invariant topologique (la caractéristique d'Euler-Poincaré), et d'établir des théorèmes d'existence de tels champs[7]. La recherche d'intrinsèquéité passe par la mise en place d'un dispositif assez lourd inspiré des méthodes mixtes de Brouwer, mêlant descriptions combinatoires et ensemblistes (au moyen de représentations affines des simplexes et étoiles simpliciales). Les champs vecteurs tangents sont alors décrits comme des suites de transformations de la variété dans elle-même convergeant vers l'identité, aussi appelées transformations « arbitrairement petites »[8].

Pas plus que dans la précédente série d'articles on ne trouve explicitement l'idée de fibré dans l'article de 1931 *Sur les applications de la sphère tridimensionnelle sur la sphère*[9]. Hopf y rappelle que l'étude des classes d'homotopie des applications entre variétés (compactes, orientables) de même dimension est l'un des sujets les mieux connus de la topologie, depuis les travaux de Brouwer prolongés par Hopf lui-même : c'est la théorie du degré. Une telle étude est par contre nouvelle dans le cas des applications de S^3 vers S^2. En s'inspirant de la définition du degré, il introduit un nouvel invariant : soit f une application continue de S^3 dans S^2, x et y deux points distincts de S^2 ; à x et y sont associés deux cycles de S^3, leurs « ensemble d'origine » (*Originalmenge*), le nombre $\gamma(f)$ est le degré d'entrelacement de ces cycles. La plus grande part de l'article est consacrée à établir le bien fondé de cette définition dont nous n'avons donné que l'idée générale ; l'invariance homotopique est aussi établie. Il reste a

[7] Par exemple : sur une variété compacte n-dimensionnelle (n>1), si l'on se donne r points $P_1,\ldots,P_r$ et r entiers relatifs $a_1,..,a_r$ dont la somme est $(-1)^n$ fois la caractéristique d'Euler, alors il existe un champ de vecteurs tangent ayant comme points singuliers exactement les P_i, d'indices respectifs a_i.

[8] Le lien entre « petites transformations » d'une variété topologique en elle-même et champs de vecteurs d'une variété différentiable continue d'être une passerelle courante chez Hopf. Ainsi dans une conférence de 1935 publiée dans l'Enseignement Mathématique, il conclut un passage consacré aux transformations et petites transformations : « Dans une variété (dérivable) la notion de « petite transformation sans point fixe » coïncide au fond avec la notion de « champ de direction » ; nous pouvons donc énoncer pour les champs de directions le théorème formulé plus haut pour les petites transformations. On obtient alors une généralisation des théorèmes bien connus de Poincaré et de M. Brouwer sur des surfaces et des sphères à n dimensions. » [Hopf 1936 344]

[9] *Ueber die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, [Hopf 1931b].

établir la non trivialité de cet invariant : Hopf exhibe alors une application de S^3 dans S^2 pour laquelle γ vaut 1 : ce sera la future « fibration de Hopf ».[10]

On peut considérer un dernier exemple de question topologique appelée a être reprise dans le langage des fibrés mais non traitée au départ dans ce langage, en parcourant la thèse de Stiefel, dirigée par Hopf, sur *Champs de directions et parallélisme à distance dans les variétés n-dimensionnelles*[11] (1935). Stielfel y généralise les résultats de Hopf sur les champs de vecteurs : la forme des énoncés et la gamme des outils sont les mêmes. Il commence par définir les variétés (dites depuis de Stiefel) généralisant les sphères : $V_{n,m}$ est l'ensemble des systèmes ordonnés de m vecteurs de norme 1 et deux à deux orthogonaux dans $\mathbf{R}^n$. Après avoir donné différentes descriptions de ces espaces – comme variétés différentiables, comme complexes simpliciaux, comme engendrés les uns à partir des autres par des procédés récursifs –, il détermine leur homologie. En particulier, le groupe de Betti en dimension n-m est cyclique, ce qui permet d'associer un invariant numérique à toute application continue de S^{n-m} (orientée) dans $V_{n,m}$; cet invariant d'homotopie n'est défini que *mod 2* si n est impair. La notion de champ de m-directions est ensuite étudiée pour une boule B^{r+1}, bordée par S^r : un champ de directions sur S^r (dans l'espace euclidien ambiant $\mathbf{R}^n$) définit une application continue à valeurs dans $V_{n,m}$, l'invariant numérique associé permettant de caractériser ceux de ces champs pouvant être continûment prolongés à B^{r}. La définition des m-champs sur les variétés différentiables est rapide et c'est par des méthodes combinatoires que la question de l'existence de tels m-champs (sous-entendus : non singuliers) est étudiée. Le cas de la boule et de la sphère qui la borde fournit le pas de base d'une étude récursive. Stiefel établit en particulier que pour toute variété différentiable (compacte) M de dimension n, les singularités de tout champ m-dimensionnel définissent un complexe au plus (m-1)-dimensionnel qui, en introduisant de bonnes multiplicités, détermine un cycle dont la classe d'homologie ne dépend pas du champ : il la baptise m-ième classe caractéristique (*die m-te charaktristische Klasse* [Stiefel 1935 306]. Cette proposition généralise la proposition classique sur la classe d'homologie du 0-cycle des points singuliers d'un champ de vecteurs tangents. Si l'on note F^{m-1} cette classe, les annulations $F^0 = F^1 = \ldots = F^{m-1}$ donnent une condition nécessaire (mais non suffisante) à l'existence d'un m-champ non singulier, ce que Stiefel appelle la parallélisabilité de degré m, ou, dans le cas où $m = n$, l'existence d'un parallélisme à distance.

[10] On verra Hopf utiliser à ce propos le terme d' « espace fibré » proposé par Seifert et Threlfall, par exemple dans un article de 1935 intitulé *On Mapping Spheres onto Spheres of Lower Dimensions* [Hopf 1935], en particulier p.439-440. Le traducteur anglais choisit « *fibration* ».

[11] *Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Commentarii Mathematici Helvetici, [Stiefel 1935]

Ainsi voit-on nos auteurs utiliser avec virtuosité les outils fournis par Poincaré et Brouwer pour développer des familles très cohérentes de théorèmes et de techniques qui deviendront des théorèmes et des techniques fondamentales en topologie des fibrés. Ils le font toutefois sans chercher à définir une nouvelle structure abstraite générale, sans regrouper les fibres pour construire ce que Whitney appellera l'espace total du fibré ni formuler le problème en termes de prolongement de sections locales.

III. Seifert et Threlfall : les variétés tridimensionnelles fibrées en cercles.

1. Depuis la base : les espaces d'éléments linéaires.

Il pourrait sembler que le point de départ des travaux de Seifert et Threlfall sur ce qu'ils baptiseront les « espace fibrés » (*Gefaserte Räume*) soit le même que celui de Hotelling. Nos auteurs font paraître dans le J. DMV en 1932 un article sur les espaces formés d'éléments linéaires (*Räume aus Linienelemente* [Threlfall 1932]), dans lequel ils proposent un mode général de formation de variétés tridimensionnelles dont la détermination des invariants topologiques montre qu'elles ne relèvent pas, pour la plupart, de types déjà connus. Si la plupart des passages que nous allons citer sont indiscernables de ceux de Hotelling, il ne semblent pas qu'il y ait eu de lien direct. A la fin de leur article, Seifert et Threlfall signalent en note que Hopf leur a, dans la discussion suivant l'exposé (8 Juin 1931), signalé l'existence de travaux très proches dus à un certain Hotelling. Citons largement la mise en place, très pédagogique, de la notion d'espace d'éléments linéaires :

> Nous voulons maintenant définir *l'espace des éléments linéaires non-orientés* d'une surface fermée. Considérons donc une surface fermée, donnée par sa triangulation. Par définition, le voisinage de chaque point P peut être appliqué sur l'intérieur d'un cercle euclidien. Nous rapportons les points de ce disque et les points correspondants de la surface à un système de coordonnées, de manière inversiblement univoque et continue. Parmi tous les systèmes de coordonnées, nous en distinguons une fois pour toute un, *u,v* et tous ceux qui s'en déduisent par des changements de coordonnées différentiables. (…) A chaque point Q au voisinage de P correspond une variété vectorielle bidimensionnelle. Les composantes d'un vecteur en ce point sont les différentielles de Cauchy *du*, *dv*. On sait bien que ces différentielles se transforment linéairement par les transformations différentiables. Un *élément linéaire non-orienté* en un point Q est une classe de vecteurs ne se distinguant que d'un facteur numérique

positif ou négatif. Dans un système de coordonnées fixé *u, v*, chaque élément linéaire non-orienté en P ou en un point Q de son voisinage est déterminé par l'angle α qu'il fait dans le plan euclidien image avec une droite-étalon *g*. Ainsi, α est un paramètre cyclique, variant de 0 à π. Chaque élément linéaire non-orienté passant par un point au voisinage de P est donc déterminé par trois nombres *u, v,* α, ses *coordonnées d'élément*. Celles-ci ne sont toutefois pas définies sur la totalité de la surface mais sont limitées au voisinage de P, on peut aussi bien les appeler les coordonnées locales (*Ortskoordinaten*) en P. [Threlfall 1932 93][12]

La structure de variété topologique sur l'espace des éléments de lignes est ensuite définie en deux temps. L'existence d'une structure riemannienne sur la surface de base (*Grundfläche*) sert à établir l'existence d'un atlas différentiable – Threlfall ne parle pas d'atlas mais évoque le changement de coordonnées dans l'intersection de deux des voisinages de coordonnées locales. La notion de voisinage dans l'espace ainsi défini est rapidement explicitée. Le lien entre la surface et l'espace des éléments est ensuite reformulé :

> Les éléments linéaires associés aux points d'un disque de voisinage de la surface de base remplissent un tube (*Röhre*) ou fil de courant (*Stromfaden*) sortant du disque et dont chaque section transverse correspond à une valeur fixée de α ; l'angle α n'est toutefois pas défini sur toute la surface mais seulement dans un voisinage. [Threlfall 1932 95][13]

On retrouve l'image du tube, correspondant au cylindre considéré par Hotelling (dont on recollait ensuite les faces supérieures et inférieures). C'est la deuxième fois que Threlfall

[12] „*Wir wollen jetzt den* Raum der nichtorientierten Linienelemente *einer geschlossene Fläche definieren. Gegeben sei also eine geschlossene Fläche, etwa durch ihre Triangulation. Die Umgebung jedes Punktes P läßt sich definitionsgemäß auf das Innere eines euklidischen Kreises abbilden. Die Punkte dieses Kreises und damit die entsprechenden Punkte der Fläche beziehen wir auf ein Koordinatensystem umkehrbareindeutig und stetig. Unter den möglichen Koordinatensystemen zeichnen wir eines u,v und alle, die durch differenzierbare Koordinatentransformation aus ihm hervorgehen, ein für allemal aus.* (…) *Zu jedem Punkt Q in der Umgebung von P gehört eine zweidimensionale Vektormannigfaltigkeit. Komponenten eines Vektors in dem betreffenden Punkte sind die Cauchyschen Differentiale du, dv. Diese differentiale transformieren sich bei differenzierbaren Transformationen in bekannter Weise linear. Ein* nichtorientiertes Linienelement *im Punkte Q ist dann eine Klasse von Vektoren, die sich nur durch einen positiven oder negativen Zahlfaktor unterscheiden. Bei festem koordinatensystem u,v läßt jedes nichtorientierte Linienelement des Punktes P oder eines Punktes Q seiner Umgebung sich durch den Winkel* α *bestimmen, denn es in der euklidischen Bildebene mit einer festen Eichgeraden g bildet.* α *ist dabei ein zyklischer Parameter, der von 0 bis* π *läuft. Jedes nichtorientierte Linienelement durch einen Punkt der Umgebung von P ist also durch drei Zahlen u,v,*α*, seine* Elementkoordinaten*, bestimmt. Diese sind aber nicht auf der ganzen Fläche definiert, sondern auf die Umgebung von P beschränkt unf mögen deshalb aux* Ortskoordinaten *in P heißen.“* . Par souci documentaire, signalons l'usage p.109 de l'expression „lokales Koordinatensystem“.

[13] „*Die Linienelemente, die zu den Punkten eines Umgebungskreises der Grundfläche gehören, erfüllen im Raum der Linienelemente eine Röhre oder einen Stromfaden, der von dem Umgebungskreis von P ausströmt, und*

évoque le caractère purement local de la mesure d'angle, sans pour l'instant en donner la raison. Il poursuit en faisant informellement le lien avec la notion d'espace fibré, présentée au même moment dans un article dans *Acta Mathematica* [Seifert 1933]:

> En d'autres termes, on peut décrire ainsi la situation : les espaces d'éléments linéaires sont *fibrés* (*gefasert*), i.e. leurs points se répartissent en une famille bidimensionnelle de courbes (des cercles topologiques, les « fibres »), et le voisinage de chaque point est applicable sur le voisinage dans un faisceau de droites parallèles de l'espace euclidien. Ici est de plus vérifiée la condition « *im Großen* » selon laquelle les fibres voisines d'une fibre donnée forment un « tore plein fibré » ou encore un tube de courant. [Threlfall 1932 95][14]

Ici le point de vue a un peu changé. Jusqu'alors l'espace des éléments linéaires était construit et décrit à partir de la surface de base, il est ici regardé en lui-même. Dans ce nouveau point de vue, il possède bien sûr la propriété locale en faisant une variété (« le voisinage de chaque point … »), mais déjà le modèle local est muni d'une structure un peu plus précise : il est lui-même fibré par des parallèles de l'espace euclidien. Comme en géométrie différentielle, mais autrement qu'en spécifiant un sous-pseudo-groupe du pseudo-groupe des difféomorphismes locaux, une structure plus riche que la simple structure de variété topologique est mise en place par choix des cartes, sans que la notion ait ici sa pleine maturité. L'espace des éléments linéaires est en fait fibré car les cartes sont induites par celles du fibré tangent, elles-mêmes induites par les cartes originales de la variétés : cet aspect est évoqué un peu allusivement dans l'article [Threlfall 1932 93]. Outre cette allure locale, l'espace des éléments linéaires possède une propriété mixte entre local et global, que nos auteurs qualifient ici de *im Großen*[15] : la structure locale en tore plein est l'analogue, vue depuis l'espace total, de la saisie par les tubes issus d'un disque suffisamment petit sur la surface de base. Après cette description générale de l'objet, Threlfall étudie le cas de l'espace associé au tore puis à la bouteille de Klein (le « tore double » ou unilatère). Le cas du tore sert à introduire la notion, non encore usuelle en topologie, de produit d'espaces topologiques ; les références sont ici encore Steinitz et Künneth. La plus grande partie de l'article est ensuite consacrée à la

---

dessen einselne Querschnitte festen Werte von α entsprechen; der Winkel α ist dabei aber nicht auf den ganzen Fläche, sondern immer nur in einer Umgebung definiert.“

[14] „*Mit anderen Worten läßt sich der Sachverhalt so beschreiben : Die Räume aus Linienelemente sind* gefasert*, d.h. ihre Punkte verteilen sich auf eine zweidimensionale Schar geschlossener Kurven (topologischer Kreise, „Fasern“), und die Umgebung jedes Punktes läßt sich auf die Umgebung in einem Parallelgeradenbündel des euklidischen Raumes abbilden, wobei „im Großen“ noch die Bedingung erfüllt ist, daß die Nachbarfasern einer bestimmten Faser einen „gefaserten Vollring“ oder eine Stromfadenröhre ausmachen*.“

[15] le « *im Großen* » est d'ailleurs entre guillemets, ce qui dénote l'emploi un peu inhabituel.

recherche d'une description par générateurs et relations du groupe fondamental des espaces d'éléments linéaires, en partant de la présentation de la surface de base comme polygone muni de règles de recollement des arêtes. L'article se termine sur une comparaison systématique, pour chaque surface possible, de deux variétés tridimensionnelles pouvant lui être associées : l'espace d'éléments linéaires et le produit avec un cercle. Cette comparaison permet bien d'établir que le premier procédé conduit à des espaces nouveaux (sauf dans le cas du tore), et justifie rétrospectivement l'insistance sur le caractère purement local de la mesure des angles. Une conséquence non triviale en est donnée : faisant le lien entre existence d'un champ continu de directions et structure de simple produit topologique, on déduit qu'il n'existe sur aucune surface orientable – hors le tore – de champ continu de directions. Si le résultat avait déjà été obtenu par Hopf, la mise en place d'un concept déjà mûr de fibré en cercles est inédite.

2. Une origine dans le *Raumproblem*.

Cet article sur les variétés d'éléments linéaires d'une surface est très proche de celui de Hotelling, tant par l'objet que par les méthodes, mais ils s'inscrivent dans des contextes de recherche distincts. On a vu l'origine du travail de Hotelling dans l'article de Birkhoff, ce même article qui inspire les premiers travaux de Morse. C'est par un chemin bien différent que Seifert et Threlfall arrivent à la notion de fibré, dont les espaces d'éléments linéaires ne sont qu'un exemple particulièrement frappant. L'article sur les espaces d'éléments linéaires et l'article plus général sur la *Topologie des espaces fibrés tridimensionnels* (*Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume* [Seifert 1933]) font suite à des travaux sur la construction de variétés tridimensionnelles. Dans deux articles précédents, consacrés à l'étude des domaines de discontinuités des groupes finis de déplacements de la sphère tridimensionnelle [16], nos auteurs cherchaient à traiter le cas tridimensionnel en s'inspirant de la description des variétés bidimensionnelles comme domaine de discontinuité (*Diskontinuitätsbereich*) pour un groupe de déplacements rigides de la sphère, du plan ou de l'espace hyperbolique. Il prennent explicitement modèle sur l'article de Hopf sur le problème de Clifford-Klein[Hopf 1926a]. Devant l'ampleur de la tâche en dimension 3, ils commencent par se limiter au cas de la sphère tridimensionnelle. Après avoir étudié, dans la première partie de l'article (1931), les sous-groupes finis du groupe des rotations, ils

[16] [Seifert, Threlfall 1931] et [Seifert, Threlfall 1933].

expliquent dans l'introduction au second article (1933) les difficultés qui se présentent dans le cas de déplacements plus généraux :

> Les domaines de discontinuités normaux des autres groupes de déplacements sont des polyèdres sphériques partiellement enchevêtrés qu'il serait bien fastidieux de décrire un à un. Nous n'aurions pas mené une étude topologique complète si nous n'avions pas disposé comme outil des résultats sur les espaces fibrés permettant de traiter d'un seul coup tous les domaines de discontinuités. Cela est rendu possible grâce à la proposition fondamentale du chapitre II (§7), qui dit que les domaines de discontinuités des groupes – finis, sans points fixes – de déplacements de la sphère coïncident avec les espaces fibrés à groupe fondamental fini. [Seifert, Threlfall 1933 544][17]

On va voir que les traits principaux de l'article de 1933 sur la topologie des fibrés découlent de ce contexte initial d'étude des quotients de la sphères sous l'action de groupes, quoique nos auteurs montrent en plusieurs points leur pleine conscience de pouvoir définir des structures plus générales – en termes dimensionnels ou en utilisant des fibres non sphériques. Dans leur quête d'un sous-problème accessible du problème de classification des variétés topologiques compactes tridimensionnelles, on pourrait se demander pourquoi Seifert et Threlfall se réjouissent tant d'avoir ramené leur problème de domaines de discontinuité à un problème de classification d'espaces fibrés. Il s'en expliquent dès l'introduction de l'article sur les espaces fibrés, introduisant ici une idée qui n'affleurait qu'à peine dans l'article sur les variétés d'éléments linéaires : dans les cas des variétés fibrées, on dispose de deux notions de transformation topologique, celle d'homéomorphisme (puisqu'elles sont des espaces topologiques) et celle d'homéomorphismes respectant les fibres (*fasertreue Abbildung*, spécifique aux espaces fibrés) ; c'est la classification topologique vis-à-vis de ces dernières qui équivaut à celle des domaines de discontinuités, et elle, contrairement à l'étude topologique générale, est faisable. L'objectif de l'article de 1933 sur la topologie des fibrés est d'établir un système complet d'invariants topologiques vis-à-vis des transformations *de fibré*. Présentons les points qui n'apparaissaient pas dans les articles précédents.

---

[17] *„Die normalen Diskontinuitätsbereiche der übrigen Bewegungsgruppen sind zum Teil verwickelte sphärische Polyeder, und es wäre eine langweile Mühe, sie einzeln zu beschreiben. Ihre vollständige topologische Untersuchung wäre daher unterbleiben, wenn nicht die Ergebnisse über gefaserte Räume das Mittel an die Hand gäben, die Diskontinuitätsbereiche mit einem Schlage zu erledigen. Dies geschiet mit Hilfe des Hauptsatzes des*

3. Depuis l'espace total : les variétés fibrées et leurs morphismes.

On comprend d'après le contexte que la description des fibrés va partir de l' « espace total » (pour anticiper sur le vocabulaire introduit par Whitney) et non de l'espace de base. Après un rappel sur les axiomes de variété topologique (tridimensionnelle), repris de Kneser, Seifert et Threlfall précisent leur objet :

> Une variété est dite fibrée lorsque ses points se répartissent en un ensemble de courbes, les *fibres*, de sorte que par chaque point passe une et une seule courbe et qu'un voisinage de chaque point puisse être appliqué topologiquement au voisinage d'un point de l'espace euclidien de sorte que les fibres se confondent avec les segments droits d'un faisceau de parallèles. Cette condition ne se rapporte qu'au voisinage de chaque point. Mais si nous la posions sans exception en tout point de la variété, nous aurions un concept de variété fibrée encore trop général.
>
> Dans le présent travail nous ne considérons que les variétés fibrées qui, outre les quatre axiomes de variété, satisfont aux trois suivants, qui fixent les propriétés *im Großen* de la fibration. Pour abréger, nous parlerons dans ce cas d'*espaces fibrés*.
>
> 5) Les fibres, entre lesquelles se partagent les points de la variété, sont des courbes *fermées*.
>
> 6) Par chaque point ne passe *exactement* qu'*une* fibre.
>
> 7) Pour chaque fibre H il existe un *voisinage en fibre* (*Faserumgebung*), c'est-à-dire une partie de l'ensemble des fibres, contenant H, applicable en respectant les fibres sur un « tore plein fibré » de sorte que H arrive en la « fibre centrale ».
>
> Par *tore plein fibré* nous entendons un cylindre droit à base circulaire de l'espace euclidien, fibrée par les droites parallèles à l'axe, et dont les faces supérieures et inférieures sont amenées en coïncidence par un vissage d'angle rationnel $2\pi\nu/\mu$. μ et ν sont des entiers premiers entre eux. (…)
>
> On dit qu'une application *respecte les fibres* si 1) elle est topologique 2) elle transforme une fibre en une fibre. [Seifert 1933 150][18]

II. Kapitels (§7), der besagt, daß die Diskontinuitätsbereiche endlicher fixpunktloser Bewegungsgruppen mit den gefaserten Räumen endlicher Fundamentalgruppe Übereinstimmen."

[18] „*Eine Mannigfaltigkeit wird man als gefasert bezeichnen, wenn ihre Punkte sich auf eine Menge von Kurven,*Fasern, *so verteilen, dass durch jeden Punkt genau eine Faser geht und eine Umgebung jeden Punktes sich auf die Umgebung eines Punktes einse euklidischen Raumes so topologisch abbilden lässt, dass die Fasern in die Geraden-Stücke eines Parallelgeradenbündels übergehen. Diese Forderung bezieht sich nur auf die Umgebung eines Punktes. Aber auch wenn wir sie an alle Punkte der Mannigfaltigkeit ohne Ausnahme stellten, so wäre doch dieser Begriff der gefaserten Mannigfaltigkeit uns noch zu allgemein. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir nur solche gefaserte Mannigfaltigkeiten, die ausser den vier Mannigfaltigkeitsaxiomen noch den*

On voit que Seifert et Threlfall envisagent une structure non localement triviale sur la base au sens où certaines fibres exceptionnelles sont au centre de tores tordus, ne sont donc pas homotopiquement équivalentes à leurs voisines. Le cas non-tordu (μ=1) est celui du « tore plein ordinaire », qui seul se présentait dans le cas des espaces d'éléments linéaires.

Un autre élément apparaît dans cet article. Dans le précédent, une surface (abstraite, munie d'une structure différentielle) était donnée ; on part ici d'une variété tridimensionnelle pour laquelle aucune surface de base n'est *a priori* disponible. Or on imagine bien que la classification complète des variétés bidimensionnelles (compactes) est un outil essentiel que l'on va chercher à utiliser dans la classification des variétés tridimensionnelles fibrées. Seifert introduit pour cela une notion abstraite d'espace quotient :

> Le concept le plus important pour l'étude des espaces fibré est celui de la surface de section [*Zerlegungsfläche*]. Chaque espace fibré F a une surface de section *f*. Ce n'est toutefois ni un ensemble de points de l'espace F, elle ne se laisse pas non plus en général mettre dans l'espace ; elle peut être ainsi définie comme variété abstraite : à chaque fibre de F correspond bi-univoquement un point de la surface de section *f*. Chaque point de F a ainsi un point image bien déterminé sur la surface de section, puisque par chaque point [de] F passe exactement une fibre. On définit les voisinages sur *f* comme les images des voisinages spatiaux dans F. [Seifert 1933 155][19]

Seifert énonce alors rapidement et sans démonstration les principales propriétés qui en font une surface topologique. Il ne fait pas explicitement appel à une notion de quotient ou d'espace de classes d'équivalence ; moins encore que la notion de produit d'espaces topologiques, la notion d'espace quotient (voire d'ensemble quotient) n'appartient à la gamme des concepts topologiques usuels. La seule référence donnée par Seifert à l'appui de cette notion est, ici encore, prise dans l'article de Birkhoff (sur lequel Hopf avait attiré l'attention

---

drei foldenden Axiomen genügen, welche Eigenschaften im Grossen fordern. Solche Mannigfaltigkeit nennen wir kurz gefaserte Räume. *5) Die Fasern, auf die sich die Punkte der Mannigfaltigkeit verteilen, sind* geschlossene *Kurven. 6) Durch jeden Punkt geht* genau eine *Faser hindurch. 7) Zu jeder Faser H gibt es eine* Faserumgebung, *das ist eine solche H enthaltene Teilmenge von Fasern, die sich fasertreu auf einen „gefaserten Vollring" abbilden lässt, wobei H in die „mittlere Faser" übergeht. Unter einem* gefaserten Vollring *verstehen wir einen geraden Kreiszylinder des euklidischen Raumes, der durch die zur Achse parallelen Geraden gefasert ist, und dessen Grundfläche und Dachfläche, um einen rationalen Winkel $2\pi\nu/\mu$ gegeneinander veschraubt zur Deckung gebracht sind. μ und ν sind teilerfremde ganze Zahlen. (...)* Fasertreu *wird dabei eine Abbildung gennant, wenn sir 1) topologisch ist und 2) Fasern in Fasern überführt."*

[19] *„Der wichtigste Begriff für die Untersuchung der gefaserten Räume ist der der* Zerlegungsfläche. *Jeder gefaserte Raum F hat eine Zerlegungsfläche f. Dies ist aber keine Punktmenge der Raumes F, und sie lässt sich im allgemein gar nicht als Fläche in den Raum hineinlegen, sondern sie ist als abstrakte Mannigfaltigkeit so definiert : jeder Faser von F entspricht umkehrbar eindeutig ein Punkt der Zerlegungsfläche f. Damit hat zugleich jeder Punkt von F auf der Zerlegungsfläche einen bestimmten Bildpunkt, denn durch jeden Punkt F geht genau eine Faser hindurch. Die Umgebung aus f sind als Bilder der räumlichen Umgebungen in F.*"

de Seifert et Threlfall) sur les systèmes dynamiques à deux degrés de libertés. Birkhoff, après avoir introduit la variété des états de mouvements, définissait :

> *A* surface of section *will be defined to be an analytic surface (or a surface made up of analytic pieces) regularly bounded by a finite number of closed stream lines, cut throughout in the same sense by the stream lines and at least once by every stream line in a fixed interval θ of time. The notion of a surface of section for certain types of dynamical problems with two degrees of freedom is due to Poincaré.* [Birkhoff 1917 269]

On voit qu'en dépit du choix des termes, le lien entre la section de Poincaré dans les problèmes de dynamiques et la « surface de section » d'une variété fibrée est assez lâche. Signalons que les notions utilisées par Birkhoff – espace des états de mouvements d'un système à deux degré de liberté, surface de section, principe du minimax – étaient disponibles dans le monde allemand dans le cours de Bieberbach sur les équations différentielles (1923)[20] ; ceci peut expliquer que Seifert et Threlfall aient pu travailler sur l'espace des états de mouvements sans connaître l'article de Hotelling (1925). Seifert signale le cas trivial où la variété fibrée est produit de sa surface de section par un cercle, auquel cas cette surface peut-être plongée dans F « de sorte que chaque fibre la coupe exactement une fois, en son point image » [Seifert 1933 156][21]. Les « voisinages en fibres » définis dans les axiomes d'espace fibrés sont alors interprétés comme les parties de l'espace fibré au-dessus d'ouverts suffisamment petits de la surface de section. Seifert donne ensuite des exemples de fibrations de la sphère tridimensionnelle – le travail sur les groupes finis de mouvements rigides en fournit à volonté. Puis il présente l'application d'invariant $\gamma = 1$ récemment décrite par Hopf comme un exemple de fibration sans fibre exceptionnelle, dont la surface de section est la sphère usuelle. Ce cas illustre le fait que la surface de section ne peut pas toujours être plongée dans la variété fibrée en ne rencontrant chaque fibre qu'une seule fois [Seifert 1933 161].

Si la classification topologique à laquelle arrive Seifert n'est pas notre propos, on doit signaler deux constructions générales relatives aux fibrés. De la « boîte à outils » classique de la topologie de 1933, Seifert n'utilise pas que la classification des surfaces : la notion de revêtement universel va aussi jouer son rôle. Après avoir redéfini avec précision la notion de revêtement, Seifert étudie la situation suivante : si $\widetilde{F}$ est un revêtement d'une variété fibrée F, si l'on parcourt une fibre dans F on peut (en se fixant un point de départ dans $\widetilde{F}$) décrire une

[20] [Bieberbach 1923 136 et suiv.]

courbe dans $\widetilde{F}$; fait-on ainsi de $\widetilde{F}$ un espace fibré [Seifert 1933 195] quitte à parcourir plusieurs fois chaque fibre de F ? Une étude détaillée permet de conclure par l'affirmative, du moins lorsque les fibres de F se relèvent en des courbes fermées (les axiomes n'autorisant que les fibrés en cercles). Dans le même paragraphe est étudiée une autre construction générale : si F est un espace fibré de surface de section f, et $\widetilde{f}$ un revêtement de f, une variété tridimensionnelle $\widetilde{F}$ est construite qui est à la fois fibrée au dessus de $\widetilde{f}$ et revêtement de F (de même multiplicité que $\widetilde{f}$ au dessus de f) [Seifert 1933 198]

IV. Les espaces en sphères de Whitney.

1. Un recentrement du travail sur les applications entre variétés différentiables.

On ne peut détacher le travail de Hassler Whitney (1907-1989) sur les fibrés en sphères de son travail sur la topologie des variétés différentielles : continuateur du travail fondationnel de Veblen et Whitehead, Whitney hérite d'une perspective, d'exemples familiers et de modes traitements différents de ceux de Stiefel, quelle que soit la similitude des résultats.
Dans son article de 1936 sur les *Variétés différentiables* [Whitney 1936] il établit une série de théorèmes de plongements :

> *The main purpose of this paper is to provide tools of a purely analytic character for a general study of differentiable manifolds, and maps of them into other manifolds. A differentiable manifold is generally defined in one of two ways; as a point set with a neighborhood homeomorphic with Euclidean space E_n, coördinates in overlapping neighborhoods being related by a differentiable transformation, or as a subset of E_n, defined near each point by expressing some of the coördinates in terms of the others by differentiable functions.*
> *The first fundamental theorem is that the first definition is no more general than the second; any differentiable manifold may be imbedded in Euclidean space.* [Whitney 1936 645][22]

[21] „(…), *dass jede Faser sie genau einmal in ihrem Bildpunkt trifft*."
[22] Citons tout de même la suite des résultats, sans lesquels on ne peut mesurer l'ampleur du champs ouvert en topologie différentielle par ce travail de Whitney : « *The second fundamental theorem (when combined with the first) deals with the smoothing of a manifold. Let f be a map of any character (continuous or differentiable, without an inverse) of a differentiable manifold of dimension m into another, N, of dimension n. (...) Then if n≥2m, we may alter f as little as we please, forming a regular map F. (A map is regular if, near each point, it has a regular inverse). Moreover, if n≥2m+1, F may be made (1-1). We show in Theorem 6 that if n≥2m+2, then any*

Au delà de ce résultat fondamental et d'une formulation resserrée des axiomes de Veblen et Whitehead sous la forme toujours utilisée aujourd'hui [Whitney 1936 646], cet article déplace sensiblement le centre de gravité du questionnement en mettant au centre les questions d'applications entre variétés. Seules les applications entre espaces de même dimension étaient définies, rapidement, par Veblen et Whitehead ; les notions de difféomorphisme et de revêtement étaient seules visées. La notion générale d'application différentiable entre variétés est définie très explicitement chez Whitney, ainsi que la notion d'application de classe C^r d'une partie quelconque d'une variété vers une variété. L'étude des propriétés de ces applications nécessite une définition de l'espace tangent en un point ; ce n'est plus chez Whitney la définition formelle de Veblen et Whitehead, elle-même héritière de la tradition des invariants différentiels : elle repose ici sur la notion de courbes se croisant en un point selon des directions indépendantes. Les applications différentiables entre variétés agissent sur les systèmes de courbes, ce qui permet de définir avec précision la notion d'application *régulière* (C^1 et conservant l'indépendance des directions), puis des notions non infinitésimales comme celle d'application *complètement régulière* :

> *The map f of M into N is* completely regular *if it is regular, and has the following property : at most two points of M go into any single point of N ; if $f(p_1) = f(p_2)$ and $p_1 \neq p_2$, then a set of m independent directions at p_1 together with such a set at p_2 go into a set of $2m$ independent directions at $f(p_1)$ in N.* [Whitney 1936 649][23]

D'autres conditions de transversalité sont considérées plus loin, ainsi que les notions d'application *propre* (*proper*) et d'*immersion* (*imbedding*) [Whitney 1936 649]. Ce travail sur les applications entre variétés de dimensions différentes, en particulier d'une variété de dimension inférieure vers une variété de dimension supérieure, ne lègue pas que des définitions précises et mêlant habilement aspect infinitésimaux et globaux.

Après les définitions, les théorèmes de plongements de Whitney nécessitent la mise en œuvre de séries de techniques inédites appelées à intégrer la « boîte à outil » fondamentale pour le travail sur les variétés différentiables ; signalons en deux. Premièrement, les résultats de Whitney reposent largement sur une série de résultats purement analytiques publiés deux ans plus tôt [Whitney 1934] ; ils portent sur le prolongement différentiable de fonctions définies sur un fermé de $\mathbf{R}^n$ et à des généralisations au cas non compact du théorème de Weierstrass d'approximation des fonctions continues par des fonctions polynômes. Immergé dans

---

two regular maps f_0, f_1 of M into E_n, are equivalent in the following sense. $f_0(M)$ may be deformed into $f_1(M)$ by maps f_t $(0 \leq t \leq 1)$ so that the path crossed by the manifold is the regular map of an $(m+1)$-dimensional manifold. Moreover, if $n \geq 2m+3$, and $f_0(M)$ and $f_1(M)$ are non-singular, so is the $(m+1)$-manifold. » [Whitney 1936 645] l'enchaînement des Lemmes on trouve une utilisation de ce que l'on nommera plus tard des partitions différentiables de l'unité [Whitney 1934 67 et suiv.]. Pour utiliser sur les variétés les théorèmes de prolongements obtenus dans $\mathbf{R}^n$, Whitney définit en 1936 la notion d'*ensemble admissible* de cartes (nous dirions : atlas localement fini) et énonce un Lemme sur l'existence d'un ensemble admissible de cartes subordonné à un recouvrement ouvert donné quelconque [Whitney 1936 651][24]. Soulignons que ces outils ne sont pas particulièrement mis en avant par Whitney, et qu'ils ne constituent que des Lemmes dans un cheminement démonstratif particulièrement complexe, centré sur l'étude d'espaces fonctionnels d'applications entre variétés. Il reviendra à d'autres d'isoler et de baptiser ces notions ; de fabriquer de l'élémentaire à partir du complexe. Deuxième outil fondamental en topologie des variétés, Whitney introduit que l'on nommera le voisinage tubulaire d'une sous-variétés. Ici encore ce n'est que sous forme de Lemme, dont on imagine l'importance dans les questions de prolongement d'applications définies sur une sous-variété. Whitney commence par évoquer la famille des plans « normaux » à une sous-variété puis obtient, après trois pages de démonstrations :

> *Lemme 23. Let M be a C^r-manifold in E_n* [25] *($r \geq 1$ finite or infinite). Then there is a positive continuous function $\xi(p)$ and a function P(p) of class C^r in M, such that : (a) P(p) is an (n-m)-plane through p independent of the tangent plane to M at p. (b) if R(p) is that part of P(p) within $\xi(p)$ of p, then the R(p) fill out a neighborhood R(M) of M in a (1-1) way. (c) if H(q) = p for q in R(p), then H is of class C^r in R(M). Moreover, if M is analytic, so are P(p) and H(p).* [Whitney 1936 667]

La fonction P « attache » à chaque point de la sous-variété le « plan » normal, la fonction H est ce que l'on nommera la projection du voisinage tubulaire sur la variété de base.

On aurait pu, somme toute, imaginer que les théorèmes de plongement, en garantissant l'équivalence des notions de variété abstraite et de sous-variété de $\mathbf{R}^n$, permettraient de reléguer les premières au magasin des concepts élégants mais inutilement éthérés ; il n'en fût bien sûr rien. Une première raison tient sans doute au mouvement dont participe la mise au point de la notion d'espace fibré sur un autre : l'enrichissement de la gamme des constructions intrinsèques permettant d'associer des variétés à une première, ou une variété à un couple d'autres, s'appuie de manière essentielle sur la présentation intrinsèque par cartes. Une seconde raison tient à l'enrichissement (voire la création) d'une boîte à outil : l'utilisation

---

[23] *m* est bien sûr la dimension de M.
[24] Les variétés sont supposées admettre un atlas dénombrable.
[25] Rappelons que E_n désigne l'espace euclidien *n*-dimensionnel.

d'une représentation comme sous-variété de $\mathbf{R}^n$ est moins nécessaire lorsqu'on dispose d'une gamme de Lemmes et de techniques adaptées au travail sur les variétés abstraites ; avec ses voisinages tubulaires, ses partitions de l'unité, ses Lemmes de lissage et de prolongement etc. Whitney n'apporte pas peu sur ce plan.

2. Les espaces en sphères.

Voisinages tubulaires[26] et problèmes de prolongements d'applications d'une variété vers une variété de plus grande dimension vont se retrouver dans les travaux sur les fibrés. Si, contrairement à l'article sur les variétés différentiables, la référence à Veblen et Whitehead n'est pas explicite dans la note de 1935 sur les *espaces en sphères* (*Sphere-spaces* [Whitney 1935b]), on peut penser qu'ici encore Whitney prolonge leur travail en donnant une assise axiomatique à la notion un peu vague d'attachement d'un espace en chaque point d'un autre. La notion est d'abord présentée informellement, dans des termes qui deviendront standards :

> *Spaces often occur in which the points themselves are spaces of some simpler sort, for instance spheres of a given dimension. The set of all great circles on a sphere is such a space. (...) Locally, sphere-spaces are product spaces (see §2) ; but in the large, this may no longer hold. In this note we define invariants which serve to distinguish different sphere-spaces when they have the same « base space ».* {Whitney 1935b 464]

Vient ensuite la définition :

> *A sphere-space is defined as follows let K be a topological space (usually a manifold or complex). To each point p of K let there correspond a point set S(p). Let U_1, U_2,... be a set of neighborhoods covering K. To each U_i let there correspond a function $\xi_i(p,q)$, where p ranges over U_i, and q ranges over the unit l-sphere S^l in Euclidean space E^{l+1} ; for p fixed, $\xi_i(p,q)$ is a one-one map of S^l onto S(p). Set $\xi'_i(p,q') = q$ whenever $\xi_i(p,q) = q'$. Suppose U_i and U_j have common points U_{ij}. Then $\xi_{ij}(p,q) = \xi'_j(p,\xi_i(p,q))$ for fixed p in U_{ij} is a one-one map of S^l onto itself ; we assume that these maps are differentiable with non-vanishing Jacobian, and that they vary continuously with p. If these conditions are satisfied, we call the resulting system a* sphere space *S(K).*

[26] Le lien avec la notion de fibré est explicité dans une note de 1935 dans laquelle Whitney résume les résultats de son article sur les variétés différentiables. [Whitney 1935a]

The space K we call the base space. *The set of all pairs (p,q), where q is in S(p), we call the total space* ***S*** *; if the spheres S(p) are non-intersecting (as part of another space), we may let* ***S*** *simply be the points q.* ***S*** *is evidently a topological space.*

If the maps $\xi_{ij}(p,q)$ *(p fixed) are orthogonal transformations, we call the sphere-space* regular. [Whitney 1935b 464]

Les résultats présentés dans cette note sont très proches de ceux de Stiefel : Whitney étudie l'homologie des espaces de *s*-uplets de points orthogonaux sur la sphère S^l, l'analogue des $V_{l+1,s}$ de Stiefel, et il associe à un espace en sphères sur un complexe des classes d'homologie (mod 2 dans le cas non-orientable) ; on les nomme toujours classes de Stiefel-Whitney[27]. Il montre qu'en dimension au plus 1, 2 ou 3, ces classes forment un système complet d'invariants pour la structure de fibré c'est-à-dire, dans le langage de Seifert et Threlfall, pour les homéomorphismes conservant les fibres. Les deux principales situations motivant l'étude des espaces en sphères sont l'espace des sphères unités des espaces tangents à une variété riemannienne (or le théorème de plongement garantit qu'on peut munir toute variété différentiable d'une structure riemannienne) et l'espace en sphères normal sur une sous-variété d'une variété riemannienne. Le construction du *pull-back* est évoquée :

Suppose S(K) is a sphere-space. Let K' be a topological space, and ϕ*, a continuous map of K' onto K. This induces a sphere-space S(K') : if* $\phi(p') = p$*, we identify S(p') with S(p).* [Whitney 1935b 465].

Whitney ne se limite donc plus, à la différence de Seifert, au cas des revêtements.

Plusieurs notions nouvelles sont introduites dans l'article de synthèse de 1937 sur les *propriétés topologiques des variétés différentiables* [28], dans lequel Whitney reformule en termes d'espaces en sphères les travaux de Seifert et Threlfall, Hopf et Stiefel, certains résultats d'Ehresmann enfin. Si l'étude des champs de *s*-uplets de directions orthogonales jouait déjà un rôle central en 1935, il n'y avait alors pas de terme pour désigner ces types d'applications intrinsèquement liées à la structure de fibré. En 1937 au contraire le problème fondamental des fibrés est reformulé : parallèlement à la recherche de classification topologique des fibrés au-dessus d'une variété donnée, se pose le problème fondamental de l'existence de sections. Whitney annonce ainsi son objectif :

We find invariants which serve to distinguish between sphere-spaces with the same base space by studying the following questions. First, is it possible to choose, for each

[27] Ces travaux semblent indépendants. En 1935 Whitney cite Hotelling, Seifert et Threlfall, l'article de Hopf sur les applications de S^3 dans S^2.

[28] *Topological Properties of Differentiable Manifolds* [Whitney 1937]

p in K, a point $\phi(p)$ of S(p), so that $\phi(p)$ is continuous in K. Any such map we call a projection *of K into* ***S****(K). More generally, is it possible to find k projections $\phi_1(p),\ldots,\phi_k(p)$ of K into* ***S****(K), so that these are orthogonal in each S(p), ($1\leq k\leq \nu+1$).* [Whitney 1937 787]

Si les termes d'espace de base et d'espace total introduits par Whitney sont demeurés en usage, on voit qu'il baptise « projection » ce que l'on nommera section, en prenant sur ce point un vocabulaire plus proche de celui choisit par Seifert (quoique ce soit l'espace de base que ce dernier appelle « surface de section » !). Pour éviter les confusions nous conserverons le vocabulaire moderne en parlant de section et non de projection. Whitney donne rapidement des exemples non triviaux illustrant la notion d'espace en sphères *simple*, i.e. admettant un système partout continu de $\nu+1$ sections deux à deux orthogonales (ν étant la dimension de la fibre sphérique) : si l'espace en sphères tangent à une variété différentiable est simple, S(K) est tout simplement le produit de K et de la sphère, ce que Whitney interprète en termes de parallélisme à distance ; pour ce qui est de l'espace normal à une sous-variété, il est simple si et seulement si la sous-variété est le lieu d'annulation d'un système de fonctions différentiables définies dans toute la variété ambiante – question dont nous verrons l'analogue analytique traité par les premières méthodes faisceautiques.

Outre la formulation générale du problème des sections et la relecture dans ce cadre de nombreux travaux antérieurs (y compris ceux de Hopf sur la *curvatura integra* et les plongements comme hypersurface), Whitney introduit deux constructions fondamentales. Il nomme la première « produit » de deux fibrés au-dessus d'une même base (on dit plutôt « somme » aujourd'hui) :

Consider two sphere-spaces $S^{\mu}(K)$ and $S^{\nu}(K)$ with the same base space K. There is a unique sphere-space $S^{\mu+\nu+1}(K)$, their product*, in which the first two may be imbedded so that for each p in K, $S^{\mu}(K)$ and $S^{\nu}(K)$ are orthogonal great spheres in $S^{\mu+\nu+1}(K)$.* [Whitney 1937 796]

Un peu plus loin, le *pull-back* permet de définir une notion d'espace classifiant :

We shall now show that all possible sphere-spaces can be generated from certain simple ones. If S(K) is a sphere-space and K' is any complex (or point set), then each continuous map ϕ of K' into K generates a sphere-space S'(K') as follows. For each p' in K', let S'(p') be the sphere $S(\phi(p'))$.

The spaces $S[\nu,\mu]$ of great ν-spheres in the μ-sphere S_0^μ form a set of universal fiber-spaces *; any $S^\nu(K)$ may be generated by mapping K suitably into the base space of $S[\nu,\mu]$, with $\mu = \nu+dim(K)$.* [Whitney 1937 799]

On voit dans ces constructions combien le cadre axiomatique proposé par Whitney non seulement rend rigoureux les formulations un peu lâches de Veblen et Whitehead, mais fournit un mode de construction d'espaces en sphères à la fois rapide, rigoureux, intrinsèque et global. Les formulations de problèmes en termes de section ou d'« espace universel » enrichissent le répertoire des liens qui unissent, pour reprendre les termes de Hopf, la « topologie de la forme » et la « topologie de la représentation » [Hopf 1936 335].

La notion de groupe jouait jusqu'ici peu de rôle dans les travaux de Whitney. Ils s'introduisent en 1937 à partir d'une question plus classique : les classes caractéristiques forment-elles un système complet d'invariants pour les espaces en sphères ? Whitney montre que non en revenant sur le mode de construction d'un espace en sphères sur un complexe, ici d'un espace fibré en S^2 sur S^4 :

In the next simple case, ν=2 and dim(K)=4, the invariants are insufficient. To show this, note that for $K = S^4$, the cohomology groups of dimensions 1, 2 and 3 all vanish, so that there can be no invariants of the above sort. Now let σ_1 and σ_2 be the 4-cells into which S^4 is divided by a great 3-sphere τ. To define abstractly an $S(S^4)$, we suppose that the coordinate systems $\xi_{\sigma 1}$ and $\xi_{\sigma 2}$ are given, and we shall define the relation between them, that is, the orthogonal map $\phi(p) = \xi_{\sigma 2}^{-1}(p)\xi_{\sigma 1}(p)$ of S_0^2 into itself (p in τ). We must choose a map ϕ of the 3-sphere into the group G^3. As the latter is homeomorphic with projective 3-space, whose covering space is the 3-sphere, these maps may be chosen in an infinity of distinct ways, thus defining an infinity of non-equivalent sphere-spaces. To define a 4-dimensional invariant distinguishing between them, we must use, for instance, the « homotopy groups » of maps of a 3-sphere into a 2-sphere as the coefficient group in the 4-chain considered. [Whitney 1937 799]

La notion même d'espace en sphères invite à construire des invariants en convoquant de manière inédite les outils récents de la topologique algébrique : à la fois les « groupes d'homotopie » π_n (n>1) récemment introduits par Hurewicz – plus précisément les $\pi_n(SO(\nu))$ –, et les homologies (et cohomologies) à coefficients dans un groupe donné. On retrouvera cette idée d'homologie à coefficients dans un groupe fondamental chez Steenrod. La topologie des groupes orthogonaux est évoquée en un autre point de l'article de Whitney. Si l'espace en sphères est simple, on peut se demander de combien de manières essentiellement différentes il est équivalent à un produit (on peut aussi dire que l'on étudie les automorphismes des produits) : le problème revient à étudier les applications de la base K dans SO(ν+1) [Whitney 1937 800] [29].

Mentionnons pour finir la note de 1940 sur la théorie des fibrés en sphères ([Whitney 1940][30]) dans laquelle une notion plus générale d'espace fibré est définie, très proche de celle que définit au même moment Ehresmann dans ses notes aux Comptes-rendus de l'Académie des Sciences. Le nouveau cadre présenté par Whitney englobe les espaces en sphères et inclut systématiquement la définition d'un groupe au sein duquel choisir les automorphismes de la fibre modèle S_0 permettant de recoller les fibres au-dessus de l'intersection de deux ouverts trivialisants ; le cadre englobe ainsi le cas des revêtements finis (« *If S_0 is a set of μ points, and G is the group of permutations, we obtain the covering space of K with μ sheets.* » [Whitney 1940 148]), et celui des fibrés vectoriels (« *If S_0 is a vector space, and G, the affine or orthogonal group, an equivalent theory is obtained* » [Whitney 1940 148]). Le cas, plus délicat, des quotients de groupes topologiques n'est évoqué qu'en passant :

> *If S_0 is a subgroup of a continuous group R_0, and $G = S_0$, then the left (or right) coset of S_0 form a space K (factor group if S_0 is normal) ; the total space is R_0.* [Whitney 1940 149]

Cette situation générale – écho, peut-être, du travail d'Ehresmann – n'est pas l'objet de la note de Whitney, qui se contente de mentionner l'obtention par ce moyen d'espaces en sphères. Du point de vue du vocabulaire notons l'apparition du « au-dessus », par exemple dans « *The part of* $\boldsymbol{S}(U_i)$ *of* $\boldsymbol{S}$ *over* U_i *is a product* $U_i \times S_0$. » [Whitney 1940 148]. On voit ici Whitney soucieux d'expliciter la généralité du type d'espace (les « *fibre bundles* ») dont la description se présente comme une série de *variantes* à partir d'un même *moule* d'axiomes au sein duquel une partie fixe concerne les notions de recouvrement par des ouverts trivialisants et de recollement selon un groupe, la fibre et le groupe étant variables. On voit ici un troisième intérêt de la présentation par axiomes de structure, après les deux que nous avions déjà relevé : donner un sens rigoureux aux notions évoquées à la fin du *Tract* de Veblen et Whitehead, permettre des constructions aisées de fibrés associés (somme, *pull-back* etc.). On sait maintenant définir des *familles de structure*, et on sait qu'on le sait.

[29] Nous ne commentons pas dans d'autres éléments de cet article importants pour une histoire de la topologie algébrique : travail sur les produits en cohomologie, relecture des travaux de Morse et de de Rham.

[30] L'apport principal de cet article est la démonstration d'un théorème de dualité pour les classes caractéristiques des fibrés en sphères. Signalons que Whitney explicite ici la nature co-homologique des invariants proposés quelques années plus tôt par Stiefel et lui-même.

Précisons un point général : lorsque nous disons que les travaux de Whitney donnent un sens précis à la notion un peu vague d'attachement d'un espace en chaque point d'un autre, telle qu'on la rencontre par exemple chez Veblen et Whitehead, nous ne disons pas qu'il arrive à dire avec précision ce que Veblen et Whitehead n'arrivaient pas à dire. La notion du *Tract* de 1932 visait sans doute bien *autre chose* que ce que Whitney définit. Notre hypothèse est que Veblen et Whitehead ont cherché à donner une formulation assez générale pour englober d'une part la notion de revêtement – en relisant la question de l'orientabilité en termes d'holonomie et de revêtement d'orientation –, d'autre part les problèmes purement infinitésimaux posés par le travail sur les espaces généralisés. Sur ce dernier point, on trouve une comparaison détaillée et éclairante des points de vue de Cartan d'une part, de l'école américaine (Veblen, Eisenhart, T.Y. Thomas) d'autre part dans un article de Weyl de 1929 *Sur les fondements de la géométrie infinitésimale* [Weyl 1929]. La synthèse entre des problèmes infinitésimaux encore largement en discussion et la classique – mais nullement infinitésimale – notion de revêtement ne pouvait sans doute être faite qu'en termes assez vagues : ce n'est pas elle que tente Whitney.

Parallèlement, les axiomes de variétés proposés par Veblen et Whitehead se voient détournés du sens qu'ils avaient vraisemblablement pour ces auteurs. Veblen et Whitehead cherchaient à rendre compte – au moyen de la notion de pseudo-groupe – de la structure locale d'espace de Klein que peuvent posséder des variétés – ils sont ici dans la droite ligne du programme de la *geometry of paths* et de l'étude des espaces localement euclidiens ou projectifs ; ils innovaient en cherchant une formulation locale et non infinitésimale, fournissant un cadre de formulation naturel pour les questions d'interactions entre propriétés différentielles et topologiques. Whitney puis Steenrod et Ehresmann reprennent ces mêmes axiomes pour en faire un mode de définition de nouveaux types d'objets et surtout pour mettre en place des procédés systématiques de formation de nouvelles variétés à partir d'anciennes : fibré tangent, fibré normal à une sous-variété, fibrés tensoriels, fibrés principaux et fibrés associés etc. Les styles sont aussi différents : là où Veblen et Whitehead proposent les *axiomes d'une théorie*, héritiers qu'ils sont du Hilbert des *Grundlagen der Geometrie* et de l'école axiomatique américaine, Whitney, Steenrod ou Ehresmann utilisent les *définitions axiomatiques de structures* générales, sur le modèle de l'algèbre abstraite.

V. Steenrod : prolongement des sections et coefficients locaux

Les trois articles de Norman Steenrod (1910-1971) qui nous intéressent ici sont des prolongements directs des travaux de Whitney que nous venons de discuter. Indépendamment des progrès qu'ils représentent en topologie des fibrés, nous les présentons pour leur insistance sur la notion de section et la formulation explicite d'un nouveau type d'homologie – l'homologie à coefficients locaux –, qui inspireront directement les fondateurs de la théorie des faisceaux.

1. L'intrinsèque et le global.

Mentionnons rapidement l'article rédigé en 1940 avec Hurewicz sur les *Relations d'homotopie dans les espaces fibrés*[31], dans lequel une notion de fibré un peu différente celle de Whitney est définie, reposant sur l'idée de « *slicing function* » :

> *If X is a topological space, B a metric space with metric function $\rho(b,b')$, and π a continuous map of X on all of B, we shall say that X is a* fiber space over B relative to π *if there exist a positive ε_0 and a continuous function ϕ as follows :*
>
> *1. $\phi = \phi(x,b)$ is a point of X and is defined for $x \in X$, $b \in B$ such that $\rho(\pi(x),b) < \varepsilon_0$,*
>
> *2. $\pi\phi(x,b) = b$ whenever ϕ is defined,*
>
> *3. $\phi(x,\pi(x)) = x$.*
>
> *The map π is called* the projection *$X \to B$, and the sets $\pi^{-1}(b)$ in X are called the* fibres. *We refer to ϕ as the slicing function ; for, if $x_0 \in X$ is fixed and b ranges over the ε_0 neighborhood of $\pi(x_0)$, $\phi(x_0,b)$ is a point of $\pi^{-1}(b)$ near x_0, so that ϕ provides a section a section through x_0 of the fibres neighboring x_0 which is homeomorphic to a neighborhood of $\pi(x_0)$.* [Hurewicz, Steenrod 1941 60]

Le point de départ n'est donc plus l'attachement d'un espace de type donné en chaque point d'un espace de base, mais l'existence de sections locales au voisinage de chaque point de l'espace de base. On perd ici l'aspect groupe, mais la présentation est plus immédiatement adaptée au contexte de recherche de liens entre les groupes d'homotopie π_n de la fibre, de la base et de l'espace total.

[31] *Homotopy Relations in Fibre Spaces* [Hurewicz, Steenrod 1941].

L'article fondamental pour notre étude est celui de 1942 consacré aux *Méthodes topologiques dans la construction de fonctions tensorielles*[32] : on y voit à la fois la naissance de la cohomologie à coefficients locaux et la construction des fibrés tensoriels de la géométrie différentielle classique.

Cet article nous intéresse tout d'abord pour l'attention qu'il porte aux fibrés vectoriels, dont il fait le cadre de travail fondamental. En un sens, il ne s'agit là ni d'un exploit technique ni d'une profonde nouveauté : le lien entre fibrés en sphères et fibrés vectoriels est évoqué chez Seifert et Threlfall ; à plusieurs reprises le fibré tangent (ou normal à une sous-variété) est rapidement construit par Whitney. Steenrod se singularise en ce qu'il prend les fibrés vectoriels au sérieux, et des fibrés vectoriels non considérés par les autres topologues : les fibrés tensoriels. Il reformule ainsi dans le cadre d'une structure mise au point récemment des questions classiques de la géométrie différentielle – après avoir été des questions de théorie des invariants différentiels. Nous sommes maintenant familiers du travail de réécriture par lequel les mathématiciens sans cesse reprennent possession d'une partie de leur héritage ; dans ce cadre, l'horizon du travail de Steenrod est différent de celui de Whitney, par exemple : là où Whitney inscrivait dans le cadre des fibrés en sphères les travaux de Hopf des années 1925-1930, eux-mêmes héritiers de Poincaré *via* Brouwer, Steenrod donne la définition globale d'objets – les tenseurs – jusque là définis seulement localement. Sur une variété différentiable M (la référence de Steenrod est sur ce point l'article de Whitney de 1937), il commence par définir la notion de tenseurs (de type donné) en un point ; un cas particulier lui suffit à illustrer la procédure générale :

> *If P is a point of M, C(x) a coördinate neighborhood of P, and* a^i_{jk} *(i,j,k = 1,…,n) an ordered set of* n^3 *real numbers, the combination (P,C(x),* a^i_{jk}*) is called a* representation of a point tensor. *Two such (P,C(x),* a^i_{jk}*), (Q,C(*$\bar{x}$*),* $\bar{a}^i_{jk}$*) are said to be equivalent if P = Q and*
>
> (A) $$\bar{a}^i_{jk} = a^u_{vw} \frac{\partial x^v}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^w}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^u}.$$
>
> *(The derivatives are evaluated at P). (…) An equivalence class is called a* point tensor. [Steenrod 1942 117]

[32] *Topological Methods for the Construction of Tensor Functions* [Steenrod 1942].

C'est là l'usage classique des formules assurant l'intrinséquéité de la notion, dans une formulation un peu plus moderne par son usage de la notion de classe d'équivalence. Il s'agit ensuite de réunir ces tenseurs ponctuels en une variété :

> *The family of all point tensors of the above type at all points of M form a set M' which we now proceed to show is a differentiable manifold in a natural way.* [Steenrod 1942 117]

Il n'est pas inutile de citer ce passage ; on y voit toutefois la formule (A) jouer un rôle *qu'elle n'avait pas* dans la présentation classique – implicitement locale – des tenseurs : garante jusqu'ici de l'intrinséquéité de la notion, la formule fournit maintenant des règles de recollement, des cartes pour un atlas de M' déduit des cartes d'un atlas de M ; la construction est donc non seulement intrinsèque mais, et du même coup, globale. Ce lien entre *intrinséquéité* et *globalité* d'une construction décrite au moyen de formules explicites (donc locales) est aussi utilisé à la même époque, par exemple par S.S. Chern. On voit ce dernier, dans son article sur *Une preuve simple et intrinsèque de la formule de Gauss-Bonnet pour les variétés riemanniennes fermées*[33], définir par des formules explicites deux formes différentielles, puis noter :

> *Using (6) and (14), we see that Φ_k and Ψ_k are intrinsic and are therefore defined over the entire Riemannian manifold R^n.* [Chern 1944 750]

2. La question des sections.

i. Le champ comme section : une reprise ensembliste.

Revenons à Steenrod, qui fait remarquer qu'il définit ainsi autant de variétés de tenseurs sur une variété M qu'il y a de types de tenseurs. Remarquons au passage que Steenrod n'établit pas de lien entre les variétés tensorielles : les variétés tensorielles (dont l'espace tangent) sont « naturellement » associées à une variété différentiable, elles ne sont pas encore « naturellement » associées les unes aux autres du fait qu'elles correspondent à des représentations linéaires du même groupe linéaire. Ce lien entre relations algébriques (entre un groupe et un espace vectoriel, entre deux groupes) et construction de fibrés associés, c'est Ehresmann qui, au même moment, lui accorde une place centrale. Après avoir établit que ces objets sont des variétés, Steenrod doit montrer qu'elles sont fibrées sur M ; il peut se contenter

[33] *A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds* [Chern 1944]

de l'affirmer tant le cadre axiomatique mis en place par ses prédécesseurs fait de la preuve une simple vérification de routine :

> *Let the function π assign to each point tensor in M' the point of M to which the tensor is attached. This natural mapping of M' onto M we refer to as the* projection. *(...) The inverse image of a point P of M in M' (i.e. the point tensors at P) form a linear space which we shall refer to as the fiber F'_P over P. The fibers are euclidean spaces with linear transformations as the admissible group, and the fibres over a particular coördinate neighborhood form a product space.* [Steenrod 1942 118]

Steenrod introduit alors la notion de section puis se lance dans une petite discussion sur la notion de graphe qui peut sembler, de prime abord, un peu étrange :

> *A* tensor function *over M is a map f of M into a tensor manifold M' over M having the property that πf is the identity. The image of M in M' under f is called the graph of f.*
>
> *The usual definition of tensor functions has the disadvantage that graphs exist only locally and then vary with the coördinate system. The advantage of the present method is that, by identifying equivalent functional values first, the function itself falls into that class of objects (usually referred to as functions) which are point to point correspondences*. [Steenrod 1942 118]

Autrement dit, les « objets » classiques que sont les « champs » de tenseurs ne s'intégraient pas naturellement dans le cadre ensembliste des applications entre ensembles : la structuration purement et implicitement locale d'une part, l'attention exclusive portée aux questions d'intrinséquéité d'autre part, faisaient manipuler des « systèmes de nombres » définis à certaines transformations près. Steenrod nous montre comment intégrer ces situations classiques à un langage ensembliste uniforme : il faut, avant de considérer les tenseurs classiques, considérer la variété des tenseurs ponctuels ; les tenseurs classiques sont alors des *champs* de tenseurs ponctuels, qui sont eux-mêmes des applications entre ensembles (M et M') vérifiant la propriété fondamentale $\pi f = \mathrm{id}_M$. Les champs sont des fonctions au sens ensembliste, il suffit de bien construire l'ensemble d'arrivée ! On voit comment une petite remarque en passant peut constituer une réflexion de haut niveau sur le langage mathématique et proposer un changement de point de vue radical sur une tradition pluridécénale. Steenrod poursuit un instant cette discussion en interrogeant la place des « fonction » les plus banales, les fonctions numériques sur une variété :

> *If f is a map of the set A in the set B, the graph of f is usually defined to be the set (a,f(a)) in the product space A×B. Therefore the foregoing definition of a graph of a*

tensor function needs a few words of justification. Suppose M' is the space of point scalars over M'. It is not hard to see that M' is the product space M×L of L with a coördinate line L. Any map f of M in L (i.e. a scalar function in the usual sense) has a graph in M×L which defines a scalar function in the sense described above. Therefore, at least in this case, the term is justified. [Steenrod 1942 118]

Si la discussion sur la pertinence du choix du terme de « graphe » d'une fonction n'est peut-être pas l'angle d'attaque le plus riche, il est intéressant de voir Steenrod relire les fonctions numériques comme des sections d'un fibré en droites trivial. Sans lui-même s'y engager, il ouvre la voie à une réécriture de nombreux problèmes classiques de la géométrie analytique ou algébrique en terme de fibrés (non triviaux) en droites. Pour l'heure, il conclut sa discussion des liens entre « champ » et « fonction », entre le sens usuel et le sens qu'il propose de « graphe », par un rappel de l'inévitable tension entre les deux sens de graphe : si les sens coïncident dans le cas d'un fibré trivial, un fibré général n'est que localement un produit ;

The only missing feature is the resolution of M' into a product space of a second space with M. This, however, is inherent in the nature of tensor. [Steenrod 1942 119]

Aussi bien, c'est le trait inhérent à la nature globale des fibrés.

ii. Prolongement de section et coefficients locaux.

Une fois ce décor planté, c'est la question de l'existence de sections qui est au centre de l'article. Steenrod montre que des sections continues suffisent, il donne en annexe un résultat de lissage de ces sections proche de ceux de Whitney – auquel il est d'ailleurs fait référence ; il reprend alors les mêmes techniques du type « partition de l'unité » permettant le lissage local de fonctions définies sur toute la variété de base. Steenrod formule un problème général d'une manière inédite. Pour ce qui est des fibrés vectoriels, la question de l'existence d'une section continue globale ne se pose pas : la section nulle est trivialement solution. Ce sont des sections à valeurs dans un sous-fibré (non vectoriel) qui sont intéressantes :

The most general type of problem for which we shall give a method of attack may be formulated as follows :

Let M' be a tensor manifold over M, and let M'' be a differentiable submanifold of M' such that the projection π maps M'' onto M, has a Jacobian of rank n [34] *at every point*

[34] Comme on l'imagine, *n* est la dimension de la variété de base M.

of M'', and M'' is locally a product space over M. (…) The problem is to define a map f of M in M'' such that πf is the identity map of M, and f has a specified class (up to the class of M''). [Steenrod 1942 119]

Steenrod propose alors une liste de problèmes classiques relevant de ce même modèle général, dont certains n'avaient pas été considérés par Whitney : champ de vecteurs non dégénérés, champ de 2-formes différentielles symétriques définies positives, problème de Stiefel (considérer, dans le produit M' de k-fois le fibré des vecteurs contravariants, la sous-variété M'' des k-uplets indépendants) etc. Plus explicitement que Whitney, Steenrod souligne qu'il n'est pas en train de résoudre les problèmes posés dans le langage des tenseurs dans les travaux des années 1920 sur les espaces généralisés :

The methods to be given seem to be of little value in handling a problem involving differential conditions such as defining a flat affine connexion or a Riemann metric of constant or constant mean curvature. [Steenrod 1942 120]

On verra plus loin Ehresmann fondre les deux problématiques dans un cadre commun.

Au problème général répond une méthode générale. La base M est supposée être décrite comme un complexe simplicial (dénombrable[35]), subdivisé assez finement pour que chaque simplexe soit entièrement contenu dans une carte trivialisante pour la structure de fibré. On peut ordonner les simplexes σ_1, σ_2, … de sorte que la dimension croisse. On peut se donner la section de manière arbitraire sur les sommets et chercher à la prolonger selon l'ordre des simplexes ; en termes informels, le pas fondamental est alors le suivant : on dispose d'une application continue du bord $\partial\sigma$ dans la fibre générique F'' de M'', donc d'une application d'une *h*-sphère dans M'', qu'on cherche à prolonger à σ, donc à la boule bordée par la sphère. La construction est donc possible ou non selon que l'application donnée au bord est ou n'est pas l'élément nul du groupe d'homotopie π_h(F''). La formulation de Steenrod est beaucoup plus précise sur le plan ensembliste dans son usage de la trivialisation locale, et l'on verra le rôle de cette attention pointilleuse dans la prise de conscience du caractère local des invariants ainsi associés. Ici M^h désigne le squelette *h*-dimensionnel de M :

To any map f of M^h in M'' such that πf = identity, we attach a chain $c^{h+1}(f)$ of M as follows. If σ is an oriented (h+1)-simplex, C an admissible neighborhood containing σ, and C×F'' a representation of $\pi^{-1}(C)$ in M'', then f maps $\partial\sigma$ into C×F''. Let λ map C×F'' into F'' by attaching to each point its F'' coördinate. Then λf maps $\partial\sigma$ into F'', determining thereby an element of $\pi_h(F'')$ which we denote by $c(f,\sigma)$. Then

[35] La variété était supposée séparable.

$$c^{h+1}(f) = \Sigma\, c(f,\sigma^{h+1})\, \sigma^{h+1}.$$

The sum extends over all (h+1)-simplexes of M. [Steenrod 1942 122]

Aux scrupules de formulations près, l'objet ainsi défini généralise directement les co-cycles de Stiefel et Whitney, Steenrod le signale. Mais il attire ensuite l'attention sur un aspect nouveau : c^{h+1} n'est pas, à strictement parler, une (co-)chaîne au sens usuel en topologie algébrique. En effet :

> *An object is a* chain *if it is a function from simplexes to a group. Here F'' varies from one neighborhood to another, so the definition of chain is not satisfied by* $c^{h+1}(f)$*. The definition will be satisfied when we have established a fixed reference* F_0''*, and fixed isomorphisms connecting* $\pi_h(F'')$ *for each F'' to* $\pi_h(F_0'')$*. We know such isomorphisms exist ; but arbitrarily chosen ones will not serve our purpose.* [Steenrod 1942 122]

La question de l'existence d'un isomorphisme « naturel » entre groupes d'homotopie attachés à différents points est ensuite précisée, puis traitée en deux temps, l'un local, l'autre global. Steenrod commence par montrer que la trivialité locale de la structure permet de déterminer des isomorphismes entre les groupes $\pi_h(F_P'')$ et $\pi(F_Q'')$ au-dessus de deux points différents P et Q dès qu'on se donne un chemin continu dans M reliant P à Q ; cet isomorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin. Par simple connexité, on dispose donc au moins d'un tel isomorphisme pour tous les points d'un même simplexe (aspect local). Lorsqu'on ne se limite plus à un simplexe, deux cas se présentent qui avaient déjà été distingués par Stiefel et Whitney : soit pour tout point P de M, l'action ainsi déterminée de $\pi_1(M)$ sur $\pi_h(F_P'')$ se réduit à l'identité, la variété M'' est alors dite orientable relativement à $\pi_h(F'')$ et l'on peut identifier les groupes associés à chaque simplexe à un unique groupe pour définir une co-chaîne au sens usuel ; soit non : « *Here we cannot proceed as before, since no unique isomorphism in the large exist.* » [Steenrod 1942 123]. Stiefel et Whitney, et avant eux de Rham dans sa thèse[36], avaient résolu le problème dans des cas particuliers en imposant des changements de signe, mais dans le cas général étudié par Steenrod – ou l'action de π_1 ne se réduit pas à la multiplication par 1 ou –1, un tel recours est impossible. Toutefois, l'existence d'isomorphismes naturels pour chaque simplexe permet de définir un opérateur de bord, déterminant lui-même une (co)-chaîne à coefficients locaux : la non-orientabilité condamne à une co-homologie d'un type nouveau, à coefficients locaux ;

[36] Les principaux résultats sont repris dans [Rham 1936].

Thus, in the non-orientable case, we are dealing with the local coefficients groups $\pi_p(F_P^{''})$ connected by the local isomorphisms gotten by deforming the $F_P^{''}$ along curves. [Steenrod 1942 124]

Steenrod énonce ensuite rapidement la liste des résultats désormais formulables en toute généralité grâce à la nouvelle cohomologie, par exemple : l'annulation de $c^{h+1}(f)$ est une condition nécessaire et suffisante de prolongement de la section de M^h à M^{h+1} ; $c^{h+1}(f)$ est un co-cycle et sa classe de cohomologie ne dépend pas de la subdivision simpliciale etc.

L'article de 1943 sur l'*homologie à coefficients locaux*[37] est consacré à l'établissement de théorèmes généraux sur la nouvelle (co)-homologie, dont Steenrod veut montrer qu'elle possède les propriétés attendues d'une théorie cohomologique tout en permettant de traiter les questions d'intersection et de dualité dans les cas non-orientables (au sens étendu que Steenrod donne à ce terme). Nous n'entrons pas dans le détail : il nous semblait plus important d'étudier l'origine de cette notion, son lien direct avec les espaces fibrés et son lien, moins direct, avec les questions de champs de tenseurs. Signalons toutefois l'introduction de la notion de *groupe local* (*local group*) – ou *anneau local*[38] – de coefficients, généralisant directement la situation rencontrée plus haut. De manière informelle, disons qu'il s'agit de se donner en chaque point x d'un espace topologique E un groupe (ou un anneau) G_x et une règle permettant d'associer, à chaque classe d'homotopie à extrémités fixes de chemins reliant deux points quelconques x et y, un isomorphisme de groupe (ou d'anneau) de G_x dans G_y, de sorte que la concaténation des chemins conduise à la composition des isomorphismes [Steenrod 1943 611].

Si les liens entre ce travail de Steenrod et l'émergence de la notion de faisceau importent dans notre étude de l'émergence du couple local/global, on doit signaler aussi son importance dans l'émergence du langage des catégories : recherche de caractérisation abstraite de ce qu'est une bonne théorie homologique – ce qui nécessite un langage pour les formuler toutes sur le même modèle avant de les comparer –, utilisation, au delà du groupe $\pi_1(E,p)$ relatif à un point P, du groupoïde dont les morphismes sont les classes de chemins de E considérées à homotopie à extrémités fixes près. Il est plaisant de voir l'une des questions centrales pour les fondateurs de la théorie des catégories – celle de la spécification des isomorphismes naturels

[37] *Homology with local coefficients* [Steenrod 1943].

[38] Rien à voir, bien entendu, avec la notion d'anneau local en algèbre commutative, bien qu'en théorie des faisceaux ce soient bien des anneaux locaux (au sens algébrique) qui interviennent à ce niveau.

parmi tous les isomorphismes possibles – émerger dans un contexte topologique dans lequel elle reflète l'opposition entre orientabilité locale et non-orientabilité globale.

VI. Ehresmann : Cartan par les structures (1932-1939).

On ne peut ici se contenter d'inscrire dans la série des travaux portant l'émergence de la notion de fibré les notes aux C.R.A.S. qu'Ehresmann (1905-1979) et Feldbau (1914-1945) font paraître entre 1941 et 1943. En le faisant on compléterait, certes, la série « fibrés », mais on passerait à côté d'aspects fondamentaux pour l'histoire du couple local/global. Accessoirement, on se priverait du contexte permettant de comprendre en quoi le concept ehresmannien de fibré puise à d'autres sources que celles, déjà variées, inspirant les travaux de Hotelling, Seifert et Threlfall, Whitney ou Steenrod. Deux traits frappent, qui sont spécifiques au travail d'Ehresmann : premièrement le rôle central des groupes ; deuxièmement l'ambition de travailler de concert les trois niveaux – infinitésimal, local, global –, au lieu de se concentrer sur l'unique classe de problèmes de passage du local au global, et d'abandonner à d'autres (en le regrettant : on le voit chez Steenrod) les questions de géométrie infinitésimale. Ces deux traits spécifiques découlent du lien étroit entre Ehresmann et Elie Cartan, directeur de thèse, maître, inspiration.

1. Les espaces homogènes.

On peut, à grands traits, distinguer trois thèmes de recherche dans les travaux d'Ehresmann avant 1940, chacun attestant de la variété de ses lectures mathématiques, de son souci d'articulation explicite des trois niveaux ; chacun porteur d'un élément du futur concept de fibré.

Le premier thème est celui des espaces (compacts) homogènes sous l'action d'un groupe de Lie, auxquels Ehresmann consacre en 1934 sa thèse [Ehresmann 1934]. Il en résume ainsi le propos dans la notice sur ses travaux qu'il rédige en 1955 à l'occasion de sa candidature à l'Université de Paris [Ehresmann 1955] :

> Le point de départ de mes recherches a été le mémoire d'Elie Cartan « Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes et les propriétés topologiques de ces espaces » (…).
>
> Soit E un espace homogène de Lie, c'est-à-dire un espace muni d'un groupe de transformations de Lie G, opérant transitivement dans E. Si nous supposons que E est

compact, la détermination des nombre de Betti de E est ramenée par Elie Cartan à celle des formes différentielles extérieures sur E invariantes par G, en tenant compte des théorèmes de de Rham. Si de plus E est symétrique au sens d'Elie Cartan, le nombre de Betti de E pour la dimension *p* est simplement le nombre maximum de formes invariantes linéairement indépendantes de degré *p*. Pour déterminer les formes invariantes par G, il suffit de déterminer, en un point *x* de E, les formes invariantes par le groupe linéaire d'isotropie, S, en *x*. On est finalement ramené à un problème purement algébrique. (…)

> J'ai résolu ce problème à l'aide de la théorie des poids dominants d'Elie Cartan et de H. Weyl. [Ehresmann 1955 472]

Outre sa connaissance des théories des espaces homogène selon Cartan et des représentations linéaires des groupes simples et semi-simples, Ehresmann utilise aussi dans cette thèse les outils classique de la topologie algébrique du temps, tels qu'ils sont présentés dans la monographie de Lefschetz. Il y détermine l'homologie des grassmanniennes complexes et de certaines quadriques complexes. Le cas réel est traité peu après [Ehresmann 1937b], dans un article où sont obtenus, indépendamment de Stiefel, des résultats sur la parallélisabilité des espaces projectifs réels. Sans que le terme y soit, Ehresmann y utilise de manière essentielle le fait que, en termes anachroniques, si G est un groupe de Lie et *g* un sous-groupe fermé, la surjection canonique G $\rightarrow$ G/*g* est une fibration de base un espace homogène et de fibre générique le groupe d'isotropie *g*. La situation est décrite très explicitement dès le premier paragraphe de la thèse. Ehresmann y commence en décrivant la bijection naturelle entre les points de l'espace homogène E et les parties de G de la forme S*g*, où S est un élément quelconque de G et *g* le groupe d'isotropie d'un point O de E, quelconque mais fixé une fois pour toute. Il introduit la « projection » (sans la nommer ainsi) :

> Il y aura une correspondance ponctuelle entre les points de E et les points de la variété du groupe G. Un point de G a pour image un point unique M de E, mais un point M de E correspond à un ensemble de points S*g* de G. [Ehresmann 1934 398]

Après ces aspects purement ensemblistes, Ehresmann commence à décrire les voisinages des points de E, utilisant en même temps l'homogénéité (tout voisinage de M est image d'un voisinage de O, point fixé dans E, par une transformation de G amenant O en M) et la représentation de E comme quotient :

> Un voisinage du point M dans E se compose des images des ensembles *s*S*g* où *s* est un élément arbitraire d'un voisinage V_0 de l'élément unité dans G. Ainsi un voisinage du point O se compose des images des ensembles *s*g. [Ehresmann 1934 398]

La structure de groupe de Lie est alors utilisée pour décomposer localement V_0 :

> Chaque transformation dans cette région est alors représentée d'une manière et d'une seule par le symbole $e_1X_1+e_2X_2\ldots+e_nX_n+e_{n+1}X_{n+1}+\ldots+e_rX_r$. Le sous-groupe *g*, qui est fermé dans G, est un groupe de Lie et nous supposerons que sa partie connexe contenant l'élément unité est engendrée par $X_{n+1},\ldots,X_{r-1}$, X_r. Si V_0 est suffisamment petit, tout élément *s* de V_0 est le produit d'une transformation bien déterminée de *g* par une transformation bien déterminée *t* de V_0 représentée par $e_1X_1+e_2X_2\ldots+e_nX_n$. Cela veut dire que la variété *sg* coupe l'hyperplan $e_{n+1} = e_{n+2} = \ldots = e_r = 0$ en un seul point *t* à l'intérieur de V_0. Le point P qui représente dans E l'ensemble *sg* est en correspondance biunivoque avec le point *t* de paramètre $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$. Tout autre point de G correspondant au point P est représenté d'une manière et d'une seule par un produit *tg*. Donc la région de G qui a pour image sur E un voisinage V_0' suffisamment petit de O est le produit topologique de V_0' et de *g*. [Ehresmann 1934 398]

Par translation selon G :

> Cette propriété a lieu pour un voisinage suffisamment petit d'un point quelconque de E ; mais, en général, la variété de G n'est pas globalement le produit topologique de E et de *g*. [Ehresmann 1934 398]

Ces mêmes lignes seront relues en termes de quotient et de fibré en 1955 :

> Déjà dans ma thèse j'ai étudié certaines structures fibrées, sans les appeler ainsi. En effet, j'y montre (p.398-399) que dans un groupe de Lie G les classes sg, où g est un sous-groupe donné fermé de G, forment une fibration de G au sens strict (localement équivalente à la fibration d'un produit) ayant pour base l'espace homogène G/g. [Ehresmann 1955 477]

Dans le cas des grassmanniennes est établi un résultat de déformation des chaînes dont Ehresmann déduit le groupe de Poincaré de la base (dans le cas complexe [Ehresmann 1934], dans le cas réel [Ehresmann 1937b 71] ; en 1955, Ehresmann décrit rétrospectivement – en des termes très éloignés, ici, des formulations de 1933-37 – ce résultat dans le cadre de la théorie homotopique des fibrés :

> J'y [dans la thèse] démontre le relèvement des homotopies et les relations entre groupes d'homotopie de l'espace fibré, de la base et de la fibre. [Ehresmann 1955 477]

Pour ce qui est de l'homologie, on retrouve les mêmes techniques d'étude de certains espaces à partir de la mise au jour de leur structure de fibré en 1939, dans une note aux C.R.A.S. *Sur les congruences paratactiques et les parallélismes dans les espaces projectifs* [Ehresmann

1939] ; Ehresmann y retrouve la fibration de Hopf de S^3 par S^2 [Ehresmann 1939 154], indépendamment de ce dernier.

2. Les espaces localement homogènes.

Après les espaces homogènes, le deuxième thème est celui des espaces localement homogènes, auquel Ehresmann travaille en même temps qu'à sa thèse puisqu'il publie un note importante en 1933 sur *Un théorème relatif aux espaces localement projectifs et sa généralisation* [Ehresmann 1933]. Les références de cette note et de l'article de synthèse de *Sur les espaces localement homogènes* [Ehresmann 1936a] sont, outre les travaux de Cartan sur les espaces localement euclidiens, les travaux de Hopf (sur le *Raumproblem*), Hopf et Rinow (sur la notion d'espace riemannien complet), le *Tract* de Veblen et Whitehead (pour sa notion de pseudo-groupe [Ehresmann 1933 1355]) et l'article de Whitehead *Sur les espaces localement homogènes en géométrie différentielle* [Whitehead 1932]. L'introduction de l'article de 1937 est caractéristique du style d'Ehresmann pour son articulation explicite du problème en termes de niveaux infinitésimal, local et global. On en attendait pas moins de la part d'un auteur nourri du cours de Cartan sur *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs* et des articles de Hopf-Rinow ; l'articulation des trois niveaux n'est toutefois pas seulement un moyen pour éclairer un problème donné, c'est elle qui constitue ici le problème :

> Les espaces qui forment l'objet de cette conférence sont des espaces analogues aux formes spatiales de Clifford-Klein. Je rappelle qu'une forme spatiale de Clifford-Klein est un espace de Riemann à courbure constante ; suivant que cette courbure est nulle, positive ou négative, on aura un espace localement euclidien, localement sphérique ou localement hyperbolique. Etant donné un espace localement euclidien, par exemple, celui-ci est caractérisé par le fait que les déplacements euclidiens voisins de la transformation identique sont définis dans un voisinage suffisamment petit de chaque point. Une généralisation immédiate de cette définition s'obtient en remplaçant le groupe des déplacements euclidiens par un groupe de transformations continu et transitif quelconque, en particulier par un groupe continu et transitif de Lie. On définit ainsi les espaces localement homogènes que nous allons étudier. Bien que les résultats que je pourrai indiquer soient encore incomplets, il m'a semblé que ce sujet méritait d'être traité ici, parce qu'il touche à la fois à la théorie des groupes et à la topologie et

> parce qu'il conduit à des relations entre les propriétés infinitésimales et les propriétés globales d'un espace. [Ehresmann 1936a 317]

La généralisation d'un problème initialement posé en termes de courbure passe par une reformulation en termes de groupe de déplacements – ce qui n'est d'ailleurs qu'un retour au problème primitif, posé en termes de libre mobilité. Après cette introduction informelle, Ehresmann propose une longue liste de définitions explicitant, avec grand soin, tous les niveaux d'articulation entre local et global. Une citation partielle ne rendrait pas compte de la minutie de l'exposé :

> Avant de préciser la notion d'espace localement homogène, il sera utile de rappeler la *définition d'un groupe de transformation de Lie au sens local ou au sens global*. Soit V une variété à n dimensions (…). Soit G un ensemble de transformations topologiques dont chacune est définie pour tout point d'un domaine D de V, les points de D étant transformés en des points qui n'appartiennent pas forcément à D. L'ensemble G forme un groupe continu à r paramètres au sens local lorsqu'il satisfait aux conditions suivantes :
>
> a) Les éléments de G peuvent être mis en correspondance biunivoque avec les points d'une variété à r dimensions, que nous désignerons par (G), telle que si M' = $\varphi(M,s)$ est la transformation correspondant au point s de (G), la fonction $\varphi(M,s)$ soit continue par rapport à l'ensemble des points M et s.
>
> b) L'ensemble G contient la transformation identique ; soit i le point correspondant de (G).
>
> c) Il existe dans (G) un voisinage Δ du point i tel qu'on ait les propriétés suivantes : Si a est un point de Δ, il existe dans D des points M dont les transformées M' = $\varphi(M,a)$ appartiennent à D ; pour tout point M de cette espèce et pour tout point b de Δ on a :
>
> $$M'' = \varphi[\varphi(M,a),b] = \varphi(M,c) .$$
>
> Le point c de (G) qui correspond ainsi à l'ensemble des points a et b est défini par une fonction $c = \psi(a,b)$.
>
> d) Soit a un point de Δ et M un point quelconque de D tel que le point M' = $\varphi(M,a)$ appartienne à D. Il existe dans (G) un point a^{-1} tel que M = $\varphi(M',a^{-1})$.
>
> e) La fonction $\psi(a,b)$ est continue par rapport à l'ensemble des points a et b ; le point a^{-1} est une fonction continue du point a. [Ehresmann 1936a 318]

En ajoutant l'hypothèse d'analyticité de ψ on obtient la notion de *groupe de Lie au sens local*. Il est de prime abord un peu difficile de s'y retrouver dans cet enchevêtrement axiomatique. On peut dire qu'Ehresmann précise la notion de pseudo-groupe – dans laquelle le caractère local de l'action sur l'espace était claire mais la structure de l'ensemble de transformations laissée dans l'ombre –, ou encore qu'il donne une définition de ce que Cartan décrivait comme un *morceau de groupe* agissant sur un *morceau d'espace*. Les variétés (G) et V sont données une fois pour toute et *a priori*, globalement, mais les éléments de G agissent un ouvert D (fixé une fois pour toute) et les axiomes de groupe ne portent que sur un voisinage de l'identité dans (G). Le fait que (G) soit donné comme variété ne sert ici qu'à garantir la dimensionalité et une topologie permettant de parler de voisinage et de fonction continue sur (G). La notion d'action transitive est définie comme on l'imagine : le fait que D soit fixé la rend non problématique. L'analogue global de la notion de groupe au sens local est donné comme une variante, lorsqu'on supprime la double localisation, dans (G) et dans V :

> Un ensemble de transformations topologiques, G, forme un *groupe continu à r paramètres au sens global* lorsqu'il satisfait aux conditions a),…, e) en supposant que dans l'énoncé de ces conditions D soit remplacé par V et Δ par (G). [Ehresmann 1936a 319]

En s'inspirant de la preuve donnée par Cartan du troisième théorème fondamental de Lie (valable pour les morceaux de groupes linéaires), Ehresmann énonce :

> Etant donné un groupe continu à r paramètres au sens local dont les transformations sont définies pour tous les points de la variété V (c'est-à-dire le domaine D est confondu avec V), l'ensemble des transformations dont chacune est le produit d'un nombre fini de transformations appartenant au voisinage Δ de i forme un groupe continu à r paramètres au sens global. [Ehresmann 1936a 319]

Mais ce passage au global n'est signalé qu'en passant, la mise en place de la structure à étudier n'est pas encore terminée, et elle passe par une étape supplémentaire de localisation ; il n'était en effet pas conforme à l'idée de localisation de fixer les ouverts D (sur V) et Δ (sur (G)). Pour bien marquer le contraste, Ehresmann commence par définir l'analogue global :

> Appelons *espace homogène de Lie* une variété à n dimensions dans laquelle est définie un groupe de transformations continu et transitif de Lie au sens global. [Ehresmann 1936a 320]

Enfin :

> Appelons *espace localement homogène de Lie* (en général nous dirons simplement espace localement homogène) une variété E à n dimensions jouissant des propriétés suivantes :

a) Chaque point M de E appartient à un voisinage V_M à l'intérieur duquel est défini un groupe continu et transitif de Lie au sens local qui transforme les points de V_M en des points de E ; le voisinage V_M sera appelé voisinage élémentaire ;

b) Soit *d* un domaine commun à deux voisinages élémentaires. Etant donnés les deux groupes de Lie au sens local attachés à ces voisinages, il existe dans chacun d'eux un voisinage de la transformation identique tel que les transformations de l'un de ces voisinages soient en correspondance biunivoque avec celles de l'autre, deux transformations correspondant opérant de la même façon sur les points de *d*. [Ehresmann 1936a 319]

En anticipant un peu, on commence à voir apparaître une structure associant localement sur la base E des morceaux de groupe (terminologie de Cartan) ou des germes de groupes (terminologie de Schreier). Ehresmann, quant à lui, reformule en termes de transformations infinitésimales :

Un espace localement homogène de Lie peut encore être défini comme étant une variété E à *n* dimensions qui jouit des propriétés suivantes :

a) Chaque point M de E appartient à un voisinage V_M dans lequel on a défini un système de coordonnées et un ensemble de *r* transformations infinitésimales linéairement indépendantes qui engendrent un groupe transitif de Lie au sens local.

b) Soit *d* un domaine commun à deux voisinages élémentaires V_M et $V_{M'}$. Le changement de coordonnées défini pour les points de *d* transforme les *r* transformations infinitésimales définies dans V_M en *r* combinaisons linéaires des transformations infinitésimales définies dans $V_{M'}$. [Ehresmann 1936a 320]

Usant d'un langage qui n'est pas celui d'Ehresmann – ni de personne en 1935 ! –, un commentateur peut résumer : « *Using sheaf language one might say that a locally homogeneous structure on V is just a section in the sheaf of germs of transitive Lie algebras of vector fields.* »[39] Ici encore, la définition du critère d'équivalence de deux espaces localement homogènes permet de saisir l'essentiel ; la présentation passe ici encore par une localisation qui fait passer de l'*équivalence* à l'*équivalence locale* :

Deux espaces localement homogènes E et E' sont dits *équivalents* lorsqu'il existe une transformation topologique de E en E' telle que, M et M' étant deux points correspondants, les transformations infinitésimales définies au voisinage de M soient

[39] W.T. van Est *The papers of Charles Ehresmann on homogeneous spaces and Lie groups*, in C. Ehresmann *Œuvres complètes et commentées* parties I.1 et I.2, suppléments 1 et 2 au volume 24 des *Cahiers de topologie et géométrie différentielle*, Amiens, 1984, p.491-501. Ici p.494.

transformées en les transformations infinitésimales définies au voisinage de M'. Les deux espaces E et E' sont dite *localement équivalents* lorsqu'il existe un voisinage élémentaire de E qui soit équivalent à un voisinage élémentaire de E'. [Ehresmann 1936a 321]

Après cette longue série de définitions, Ehresmann évoque des familles de problèmes et donne des indications de démonstrations ; nous ne donnons que quelques exemples permettant de saisir la saveur générale. Notons le résultat suivant :

(…) Il existe effectivement des espaces localement homogènes qui ne sont localement équivalents à aucun espace homogène. [Ehresmann 1936a 322]

Un épistémologue pourrait tirer parti de ce théorème pour étudier en quoi, bien que la *notion* d' « espace localement homogène » s'obtienne à partir de la notion d'espace homogène par une sorte de localisation – au niveau de la définition axiomatique –, il s'en faut de beaucoup que tous les *objets* « espaces localement homogènes » dérivent des espaces homogènes par localisation ! Autre cas de figure, on voit aussi Ehresmann utiliser à plusieurs reprises une technique de démonstration que nous avons vue dans la monographie de Cartan sur la topologie des groupes de Lie – à propos du prolongement des morphismes locaux :

Tout automorphisme local d'un espace homogène simplement connexe se prolonge en un automorphisme global de cet espace. [Ehresmann 1936a 233]

Les techniques de relèvement des chemins utilisées dans cette série de théorèmes permettent de réintroduire un peu plus loin le groupe d'holonomie et d'étendre aux espaces généralisés localement homogènes la notion d'espace complet proposée par Hopf et Rinow dans le cas riemannien.

Si l'on prend un peu de recul pour examiner la position historique de ce texte, on est frappé par le mouvement général sur la période 1925-1935. Le *Gestalt-switch* d'Elie Cartan l'amenait à caractériser rétrospectivement les travaux classiques (y compris les siens jusqu'en 1925) comme implicitement locaux ; il s'engageait alors dans une démarche double. Mieux cerner, d'une part, ce caractère local ; apparaissent alors des termes comme *morceau de groupe*[40], isomorphisme local, espace localement euclidien ou, si l'on quitte Cartan, germe de groupe (Schreier) et pseudo-groupe (Veblen et Whitehead). D'autre part, aborder les questions globales, ce qui englobe encore deux tâches : définir globalement les objets à étudier, établir des théorèmes de passage du local au global. De tout cela, Ehresmann est l'héritier direct, mais il infléchit déjà la recherche dans une autre direction, celle d'un retour

[40] Ehresmann parle, lui, de « noyau de groupe »., par exemple dans son exposé de 1937 des travaux de Cartan, [Ehresmann 1937a].

aux questions locales. Ce retour n'est en rien une réaction, et on n'imagine pas retomber dans un point de vue universellement et implicitement local. Un langage ensembliste strict – qui n'a jamais été celui de Cartan ! – et un savoir faire acquis par un travail régulier sur les systèmes d'axiomes sont mis au service de la question du local. Les objets sont *a priori* définis globalement – Ehresmann ne revient en rien sur cet héritage –, la question de la caractérisation des structures locales n'en est que plus délicate ; le global joue ici le rôle du donné et du (mieux) connu, il s'agit de comprendre ce qu'implique la localisation.

3. Les espaces infinitésimalement homogènes.

Un troisième type de travail conduit Ehresmann vers sa notion de fibré, en particulier celle de fibré principal. Après l'étude des espaces homogènes, puis celles des espaces localement homogènes, il y aborde le cas infinitésimalement homogène et retrouve ainsi le cadre des espaces généralisés issu des travaux de Weyl, Cartan, Schouten, Eisenhart etc. du début des années 1920. Notre présentation ne doit pas donner l'impression qu'il y a des travaux globaux, des travaux locaux et enfin des recherches infinitésimales : la classification que nous utilisons, par niveau d'homogénéité, recouvre trois configurations théoriques caractérisées chacune par une articulation spécifique des *trois* niveaux, infinitésimal, local et global. Ehresmann publie deux notes aux C.R.A.S. dans lesquelles il envisage une présentation globale des espaces généralisés de Cartan : *Sur la notion d'espace complet en géométrie différentielle* [Ehresmann 1936b] et *Sur les arcs analytiques d'un espace de Cartan* [Ehresmann 1938]. Les deux notes sont très proches de contenu, ainsi la définition suivante se retrouve quasiment identique dans la seconde :

> Du point de vue global, un espace généralisé de M. E. Cartan peut être défini de la façon suivante : soient E une variété analytique à n dimensions, H un espace homogène de Lie à n dimensions, G le groupe de Lie opérant dans H et g le sous-groupe qui laisse invariant un point O de H. A chaque point x de E nous supposons associé un espace H_x, isomorphe à H, le point x étant supposé commun à E et H_x. Si cet isomorphisme met en correspondance les points x et O, on a un repère d'origine x, qui sera désigné par R_x. S étant une transformation de G, on désignera par R_xS le repère qui se déduit de R_x par la transformation S relativement à R_x. L'espace E sera un espace généralisé par rapport à H lorsque tout point x_0 admet dans E un voisinage $V(x_0)$ tel qu'aux points x de $V(x_0)$ on ait associé une famille de repères R_x tels qu'à

l'ensemble de deux repères R_x et R_{x+dx} de cette famille on ait associé une transformation infinitésimale

$$S(x,dx) = \sum_{i=1}^{r} e_i X_i \quad \text{où } e_i = p_i(x,dx)$$

les fonctions $p_i(x,dx)$ étant analytiques en x et linéaires en dx ; de plus les fonctions $p_i(x,dx)$, pour $i = 1,\ldots,n$ sont linéairement indépendantes par rapport à dx, en supposant que g soit engendré par les transformations infinitésimales telles que $e_1 = \ldots = e_n = 0$. [Ehresmann 1936b 2034]

Encore la définition n'est-elle complète que lorsqu'est donnée la notion de système de repères équivalent à un système donné. Nous ne commentons pas en détail cette définition : il nous suffit d'y lire l'objectif de formulation globale et d'en disposer pour comparaison avec la définition d'un fibré principal. Quant aux objectifs de ces deux notes – qui n'est pas l'obtention d'un système d'axiomes fondant la notion globale d'espace généralisé ! –, il est d'étudier le « développement » des espaces E et H l'un sur l'autre, tel que Cartan l'utilise de manière fondamentale à partir de 1924. Le résultat principal appartient à une famille qui commence à nous être familière :

Si deux espaces de Cartan analytiques sont complets (ou normaux) et simplement connexes, tout isomorphisme local entre les deux espaces se prolonge en un isomorphisme global. [Ehresmann 1938 1435]

La similitude du questionnement ne doit pas faire oublier la différence de contextes entre espaces généralisés et espaces localement homogènes : le « développement » identifie (jusqu'à un certain ordre) les structures infinitésimales des espaces *le long d'un chemin*, alors que les espaces étaient localement identifiables dans le cas localement homogène. On retrouve un élément qu'on avait déjà vu jouer un rôle fondamental dans la thèse : la décomposition de l'algèbre de Lie en la sous-algèbre de g et un supplémentaire est utilisée pour obtenir un système de coordonnées au voisinage de tout un arc, ce qu'Ehresmann appelle ici des coordonnées cylindriques normales ; on retrouve, sans que ce soit noté aussi clairement que dans la thèse, une structure de produit qui n'est pas entièrement locale. [Ehresmann 1938 1435]

VII. Ehresmann : Cartan par les structures (1942-).

Nous présentons la série de notes aux C.R.A.S. *Sur le propriétés d'homotopie des espaces fibrés* [Ehresmann, Feldbau 1941], *Espaces fibrés associés* [Ehresmann 1941][41], *Espaces fibrés de structures comparables* [Ehresmann 1942], *Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable* [Ehresmann 1943]. Ces quatre notes nous servent de point d'arrivée, à la jonction de la série sur la mise au point des concepts fondamentaux relatifs aux fibrés et des séries, plus longues, relatives aux variétés différentiables et aux généralisations de la notion d'espace.

1. Les fibrés.

i. Construction de fibrés et association de fibrés.

On trouve dans les deux premières notes deux présentations axiomatiques différentes de la notion de fibré, l'une partant de l'espace total et décrivant la *situation* de fibré, l'autre donnant le mode général de *construction* de fibré. Tout d'abord :

> Soit E un espace topologique connexe, R une relation d'équivalence dans E, B = E/R l'espace quotient de E par R (ou *espace de base*), p l'application canonique de E sur B, F_x (appelée *fibre*) la classe d'équivalence $p^{-1}(x)$ correspondant à $x\in$B, F un espace topologique, G un groupe d'automorphismes de F. Associons à tout $x\in$B une famille H_x d'homéomorphismes de F_x sur F telle que :
>
> a. si h, $h' \in H_x$, on ait $h'h^{-1}\in G$;
> b. à tout $x\in$B correspond un voisinage U_x et un homéomorphisme de $p^{-1}(U_x)$ sur le produit topologique $U_x\times F$, cet homéomorphisme, qui induit pour $y\in U_x$ un homéomorphisme $\overline{h_y}$ de F_y sur $\{y\}\times F$, étant tel que l'application composée de $\overline{h_y}$ avec la projection canonique de $U_x\times F$ sur F appartienne à H_y.
>
> L'ensemble H des familles d'homéomorphismes H_x définit sur E une *structure d'espace fibré associée au groupe* G. On peut la désigner par E(B,F,G,H). [Ehresmann, Feldbau 1941 945]

[41] Pour des raisons politiques, Feldbau n'est mentionné que dans le corps de la Note.

Cette définition permet d'énoncer les liens entre groupes d'homotopie π_n de F, B et E : aux formulations près, il s'agit de la suite exacte d'homotopie [Ehresmann, Feldbau 1941 947], décrite au même moment par Steenrod et Hurewicz. Quelques mois plus tard :

> *Méthode de construction d'un espace fibré.* Tout espace fibré de groupe structural G, de symbole E(B,F,G,H), peut être obtenu de la façon suivante ; soient B et F deux espaces topologiques, G un groupe d'automorphismes de F, ϕ une famille d'ensembles ouverts de B formant un recouvrement de B, S = $\sum_{U\in\Phi} U \times F$ la somme topologique des produits topologiques U×F considérés comme des espaces topologiques disjoints. Soit R la relation d'équivalence dans S telle que deux points $y_1 \in U_1\times F$ et $y_2 \in U_2\times F$ soient équivalents lorsque : 1° la projection canonique de y_1 sur U_1 et de y_2 sur U_2 correspondent au même point $x \in$ B ; 2° la projection canonique $\overline{y_2}$ de y_2 sur F se déduit de la projection canonique $\overline{y_1}$ de y_1 sur F par une transformation $t_{U_2U_1}(x) \in$ G dépendant du couple (U_1,U_2) et de $x \in U_1\cap U_2$ de telle façon que $\overline{y_2}$ soit une fonction continue de $(\overline{y_1},x)$; 3° $t_{U_kU_i}(x) = t_{U_kU_j}(x)\ t_{U_jU_i}(x)$ pour tout $x \in U_i\cap U_j\cap U_k$. L'espace quotient est un espace fibré E(B,F,G,H). [Ehresmann 1941 762]

Ce passage fondamental appelle plusieurs remarques. Tout d'abord, on voit que cette description repose sur des opérations ensemblistes élémentaires (produit, somme disjointe, quotient) pour lesquelles Ehresmann renvoie aux fascicules de Bourbaki, et qui n'apparaissaient pas aussi clairement chez les auteurs précédents ; le petit stock des opérations naturelles sur les ensembles révèle son efficacité tout en induisant une plus grande clarté de la présentation. Ensuite, ces lignes fournissent l'un des points de passage importants vers la notion de *faisceau* par sa structuration trois temps, (U_i), $(U_i\cap U_j)$, $(U_i\cap U_j\cap U_k)$: on connaît le modèle local (sur les U_i), l'ensemble est recollé sur les $U_i\cap U_j$ et ces règles de recollement installent une structure sur les fibres en en faisant de manière intrinsèque des espaces sur lesquels agit G ; ces règles de recollement vérifient une condition de compatibilité sur les $U_i\cap U_j\cap U_k$ qui garantit – entre autres – l'indépendance de la structure envers le recouvrement choisi. Troisième point, peut-être le plus important, cette présentation permet *d'associer des fibrés* entre eux, d'une manière doublement inédite. Premièrement cette association sera bien plus systématique qu'elle ne l'était chez Seifert, Whitney ou Steenrod ; deuxièmement, cette association reflète largement des liens *algébriques* alors que seuls les liens topologiques (par exemples entre une variété et un revêtement) étaient jusque là considérés. Ainsi, lorsque G est un groupe topologique, on peut décrire en quelques lignes la construction du fibré principal associé à un fibré E(B,F,G,H) donné ; réciproquement, à partir d'un fibré principal de groupe G, à toute représentation fidèle de G dans un espace topologique F correspond un fibré de fibre F, dont le fibré principal d'origine est le fibré principal associé : c'est l'un des cas où des hypothèses algébriques découlent automatiquement les propriétés 2° et 3° garantissant l'existence d'une structure topologique global de fibré [Ehresmann 1941 763]. D'autres relations algébriques permettent ainsi de déterminer des relations entre espaces fibrés : ainsi la relation de groupe à sous-groupe détermine, pour des espaces fibrés de même base et même fibre, deux structures de fibré dont l'une (celle correspondant au groupe) est *moins précise* que l'autre [Ehresmann 1942 144]**.** La construction algébrique classique du groupe des automorphismes d'un groupe donné trouve elle aussi son pendant du côté des fibrés [Ehresmann 1941 764].

Ehresmann joue aussi un rôle central, aux côtés de Steenrod, dans la formulation de problèmes classiques en termes de *sections* de fibrés. Ainsi la question de l'existence d'une structure plus fine sur un fibré donné est-elle reprise en termes de sections continues (« systèmes de représentants »[42]), ce qui permet à Ehresmann de faire le lien avec les travaux de Stiefel [Ehresmann 1942 146]**.** Les quelques lignes terminant la note sur les *Espaces fibrés de structures comparables* sont quasiment identiques à celles qu'écrit au même moment Steenrod – indépendamment et dans une conjoncture isolant la France des Etats-Unis ; Ehresmann ne généralise toutefois pas jusqu'à la définition d'un nouveau type de cohomologie.

ii. Les fibrés vectoriels.

On pourrait ne voir dans la note *Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable* [Ehresmann 1943]qu'une liste d'applications des concepts nouveaux introduits dans les notes précédentes. Il n'est toutefois pas indifférent de voir des notions jusque là traitées plus ou moins rigoureusement, plus ou moins globalement et plus ou moins séparément les unes des autres être présentées dans un cadre unifié et global. Ainsi le mode général de construction de fibrés par recollement permet-il de définir aisément le fibré tangent ; les représentations

[42] Quant au vocabulaire, Ehresmann commence à remplacer « système continu de représentants » par « section » en 1943, il le signale en note [Ehresmann 1943 629]. Le contexte montre que le choix du terme est lié à l'existence, triviale dans le cas des fibrés vectoriels, d'une représentation de la base comme surface de section de l'espace total ; on retrouve ainsi le vocabulaire de Seifert et Threlfall, qui l'utilisaient, eux, faute d'un terme comme « espace quotient » !

linéaires du groupe linéaire permettent de définir ensuite les fibrés tensoriels. Les « champs » deviennent des « sections ». L'orientabilité ou l'existence sur une variété d'un champ de formes différentielles de signature donnée sont vus comme des cas particuliers de la question d'existence d'une structure plus précise qu'une structure donnée.

Avec le recul historique on peut faire deux remarques sur le *moment épistémologique* représenté par ces constructions des fibrés tangents chez Ehresmann, Steenrod ou Whitney ; deux modes de saisie classiques vont passer à l'arrière plan. Premièrement, la reformulation des problèmes de champs en termes de sections fait passer au second plan la notion de singularité. Chez Riemann, Weierstrass ou Poincaré, chez Hopf encore, les singularités sont les éléments solides sur lesquels la théorie s'appuie ; la saisie globale est alors celle qui exprime les contraintes topologiques comme des contraintes pesant sur le *système des singularités* ; réciproquement, la donnée du système des singularités permet de reconstituer l'espace d'évolution des « fonctions » considérées. La construction des fibrés associés à une variété différentiable, qu'on peut voir avec Steenrod comme la construction de l'ensemble destiné à accueillir les images des flèches ensemblistes que sont les champs-sections, fait de cette construction de domaine le préalable à l'étude des fonctions. Or ce qui caractérise ce lieu d'accueil ce n'est pas la singularité mais, au contraire, la locale trivialité ; la non-trivialité de la structure globale n'est plus exprimée en termes de lieu singulier[43]. Parallèlement, l'attention passe de questions formulées en termes de singularités de sections globales vers des questions de prolongement (non singulier) de sections locales (non singulières) – de passage du local au global, donc. Il ne s'agit pas pour nous de dire que les questions de singularités disparaissent, mais de montrer le changement de *conformation de l'édifice problématique* et le jeu de relégation au second plan de thèmes qui occupaient depuis longtemps le premier plan. Ce changement est lui-même historiquement contingent, et c'est largement notre choix d'arrêter l'étude vers 1950 qui contribue à mettre en avant ce changement de conformation là : le moment de sa première formulation explicite est celui de son apogée ; il s'impose aux acteurs comme une évidence et dessine le programme des recherches à venir. Nous observerons le même phénomène du côté de la théorie des faisceaux – ou plutôt une autre facette du même phénomène.

La deuxième remarque porte sur l'infinitésimal. La construction du fibré tangent n'est peut-être pas la cause – le mouvement de fond de réécriture ensembliste porte sans doute les deux phénomènes – mais elle marque un moment dans l'évolution du regard sur l'infinitésimal, ou, plus simplement, des vecteurs tangents. Sans doute les réflexions des années 1920 sur la notion d'espace généralisé avaient elles-mêmes constitué une étape importante de reconceptualisation des aspects infinitésimaux : les différentielles des coordonnées étaient soudain vues – par l'opération consistant à fixer la valeur des coordonnées sans fixer de valeurs aux différentielles – comme définissant une structure d'espace affine centré. Ce nouveau point de vue, plus géométrique, permettait de formuler la question de l'articulation entre une géométrie (au sens de Klein) dans chaque espace tangent (ou espace « attaché ») et la « géométrie » (en un sens qu'on attribue à Riemann) de la variété des points d'attache. On passait d'accroissements infinitésimaux – relevant du monde de la grandeur – à des vecteurs-translations infinitésimaux. Cette conception géométrique faisait apparaître une tension : ces vecteurs infinitésimaux étaient à la fois infiniment petits et non infiniment petits (soit qu'on considère une métrique riemannienne auquel cas ils sont de toutes longueurs, soit qu'on considère simplement l'espace vectoriel engendré par les symboles des différentielles des coordonnées). Les translations infinitésimales étaient attachées à un point, elles désignaient une manière de quitter un emplacement sans toutefois réellement désigner un autre point de la variété. L'aspect paradoxal de certaines formulations ne débouchait nullement sur des constructions bancales, l'édifice étant solidement soutenu par tout le calcul différentiel et intégral. Le couple fondamental ne pouvait alors être qu'infinitésimal/fini. Avec les constructions du fibré tangent, structure encore plus massive que la variété de départ, l'heure n'est plus à l'infiniment petit. Les éléments tangents apparaissaient jusque là lorsqu'on décidait de regarder la variété initiale au microscope : ils relevaient moins d'un *lieu propre* que d'un changement de *point de vue* sur la variété initiale. Ces métaphores (microscope etc.) cessent de jouer un rôle central quand les champs de vecteurs sont vus comme des sections du fibré tangent, d'un fibré tangent étudié sous l'angle topologique : dès Hotelling, le thème de la légalité primitive du lieu rattrape le monde des translations infinitésimales. Lorsque Ehresmann définit les connexions dans les fibrés principaux il ne se contente pas de donner (enfin, dit-il) une description globale d'objets définis jusque là (implicitement) localement. Le même mouvement historique porteur de cette reformulation autour du couple local/global fait disparaître du monde des mathématiques *bien écrites* tout un univers de formulations infinitésimales ; un savoir et un savoir-faire pourtant fondamentaux de Darboux à Cartan, chez Weyl aussi, passent – au mieux – à l'arrière plan.

[43] Bien qu'on puisse voir ce schéma présider à la constructions des classes de Stiefel-Whitney.

2. Le jeu des structures.

Pour revenir à Ehresmann, balayons enfin quelques aspects des développements ultérieurs permettant d'illustrer le travail de reprise et d'approfondissement des questions ouvertes dans les années 1920 par les généralisations de la notion d'espace. Ainsi dans *Sur la théorie des espaces fibrés* [Ehresmann 1947a] Ehresmann présente-t-il une synthèse de ce que contenaient les notes de 1941-42, mais en partant cette fois de la notion de pseudo-groupe *à la* Veblen et Whitehead[44]. Quant au travail sur les espaces localement homogènes, il est repris à un plus haut niveau de généralité dans les réflexions sur la notion de *structure locale*[45]. Les aspects infinitésimaux sont eux aussi approfondis, dans plusieurs directions. Premièrement la notion de connexion est reformulée dans le cadre des espaces fibrés :

> La notion d'*espace à connexion de Cartan* est une généralisation de la notion d'espace homogène de Lie, en désignant ainsi un espace F muni d'un groupe de transformations de Lie opérant transitivement dans F. Etant donnée une variété différentiable F, M.E. Cartan suppose « attaché » à chaque point de B un espace homogène « tangent » isomorphe à F et il définit le « raccord » entre deux « espaces tangents infiniment voisins ». Pour formuler les définitions de telle façon qu'elles aient un sens du point de vue global, on est conduit à introduire les notions de la théorie des espaces fibrés. [Ehresmann 1950 29]

Le cas particulier d'une connexion de Cartan *intégrable* redonne les espaces localement homogènes [Ehresmann 1950 49]. L'impératif de donation globale des objets est une constante de la réflexion d'Ehresmann : ce thème que l'on voyait dès les premiers travaux reste un fil directeur, on le voit plus haut dans le cas des connexions, ou lorsque la notion de jet permet d'approfondir la notion de structure infinitésimale ; prenant modèle sur le cas du fibré tangent à une variété V_n, les jets permettent de définir la structure de « prolongement » :

> Une section d'un prolongement d'ordre *r* est une structure infinitésimale pure d'ordre *r* sur V_n ; cette notion généralise celle d'objet géométrique qui n'avait guère été définie du point de vue global. [Ehresmann 1955 487]

Le « guère » peut en particulier renvoyer à la notion d'objet géométrique chez Veblen et Whitehead [V&W 1932 49]. Terminons ce rapide tour d'horizon par les variétés feuilletées. Dans la note de lecture qu'il rédige en 1946 à propos de l'ouvrage de Cartan sur *Les systèmes*

[44] Reformulées toutefois « avec des axiomes plus stricts » [Ehresmann 1955 475].
[45] Cf. par exemple le texte de la conférence faite en 1952 sur les *Structures locales* [Ehresmann 1952].

différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Ehresmann ne manque pas de relever :

> Remarquons enfin que toutes les questions abordées dans l'Ouvrage sont des problèmes de caractère local, dont certains pourront conduire cependant à des questions intéressantes de caractère global. [Ehresmann 1946 280][46]

C'est armé de ces théorèmes locaux qu'Ehresmann (et Reeb) abordent la théorie des variétés feuilletées, qu'il présente ainsi en 1951:

> La théorie des variétés feuilletées est une généralisation de l'étude globale des courbes définies par une équation différentielle. La notion de structure feuilletée est aussi une généralisation naturelle, d'une façon précise une localisation, de la notion de structure fibrée. [Ehresmann 1951 155][47]

Si la démarche de « localisation » était déjà parfaitement claire dans les travaux des années 1930 sur les espaces localement homogènes, relevons que le terme n'y était pas.[48] On voit non seulement comment les termes de « local », « global » et « infinitésimal » permettent dès les années 1930 de clarifier les formulations héritées des années 1920, mais aussi que ce lexique s'enrichit et fournit aussi des outils – ainsi la localisation – permettant d'engendrer des situations inédites et de révéler la structure masquée de certains problèmes complexes.

Cette lecture des travaux d'Ehresmann marque un terme naturel à notre étude. Comme au même moment en théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, se mettent en place dans les années 1940 des structures, des répertoires de problèmes et de techniques, qui vont former une base stable pour les théories géométriques. Les descriptions que les mathématiciens font de ces travaux *reposent* sur le couple local/global, ou le triplet infinitésimal/local/global. L'usage de ce couple ne semble plus relever seulement d'un niveau thématique ou *méta* – facultatifs l'un comme l'autre : la réécriture structurale des théories l'incorpore comme noyau problématique central, à la fois clé de compréhension et mystère à dissiper.

[46] Pagination de [Ehresmann 1984].
[47] Pagination de [Ehresmann 1984].
[48] Nous ne voulons pas priver le lecteur de l'énoncé du théorème classique : « Proposition 1. Si E est compact, toute application différentiable p, en tout point de rang n, de E sur une variété B de dimension n détermine sur E une structure d'espace fibré différentiable. » [Ehresmann 1947b]

Chapitre 15. Faisceaux.

Peu après l'émergence de la structure de fibré, et au départ indépendamment, émerge la structure de faisceau. On verra entre les deux mouvements à la fois des phases d'interaction – essentiellement dans la période 1945-1950 – ainsi que de nombreux parallèles : la recherche des axiomes d'une nouvelle structure doit isoler une *situation typique* sous sa *forme pure*, de sorte que les définitions, résultats ou techniques générales s'appliquent en retour dans un grand nombre de cas. Parallèlement sont agrégées des *listes de problèmes*[1] qui entretiennent avec la structure des liens dialectiques : les problèmes relèvent de la situation typique qu'ils illustrent ; par leur nombre et leur importance ils légitiment l'étude de la structure ; ils indiquent – lorsqu'ils demeurent irrésolus – le programme des recherches à venir. Structure et liste de problèmes se répondent et ce face à face exhibe un nœud problématique. Cette exhibition suffit en général au mathématicien : de temps à autres un exposé plus thématique, voire philosophique, cherche à caractériser plus explicitement la nature du problème, mais de tels exposés nous n'en trouvons pas réellement dans notre histoire du couple local/global. Au niveau thématique, la conférence de Henri Cartan sur les *Problèmes globaux dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes* [Cartan 1950b] est fondamentalement une liste de problèmes, et il en est finalement de même dans le passage que le philosophe Albert Lautman (1908-1944) consacre à Local / Global dans sa thèse, pourtant de philosophie[2]. C'est le travail de construction de ce face à face entre structures et problèmes que nous cherchons à décrire.

Dans le cas des faisceaux, plus nettement encore que dans le cas des fibrés, le dialogue des listes de problèmes et des axiomes de structure est décrit par une formule simple et récurrente, on pourrait presque parler de slogan : la théorie des faisceaux s'occupe des « problèmes de passage du local au global » ; nous parlerons à ce propos d'*étiquette de problème*. Un deuxième point distingue, lui nettement, les faisceaux des fibrés. La notion de fibré émerge à propos de plusieurs problèmes distincts : étude qualitative des systèmes dynamiques, classification des variétés topologiques tridimensionnelles, étude des obstructions topologiques à l'existence de « champs » divers sur les variétés topologiques ou différentielles etc. La structure de faisceau émerge au contraire, jusqu'en 1945 au moins, à partir d'une

[1] C'est une pratique systématique, on l'a vu, chez Whitney, Steenrod ou Ehresmann.
[2] *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématique*. I *Les schémas de structure* [Lautman 1938]. Bien entendu, cette remarque sur la forme de ce passage n'est en rien une description, moins encore une évaluation, du travail philosophique de Lautman.

racine unique, celle des problèmes de Cousins, dont Cartan[3] comprend en 1940 qu'il est le modèle d'une famille infiniment plus vaste de problèmes globaux en théorie des fonctions analytiques.

Trois mouvements se chevauchent temporellement. D'abord la mise en place, à partir de la réflexion sur les problèmes de Cousin – un problème d'Analyse donc – d'une *structure mixte* empruntant aux langages de la topologie et de l'algèbre ; nous y consacrerons la première partie du chapitre. Ensuite l'interaction avec des problématiques issues de la topologie algébrique : extension de la cohomologie à coefficients locaux et recherches des analogies avec les problèmes de fibrés. Enfin la stabilisation de l'ensemble des problèmes, définitions, techniques fondamentales etc. dans la période 1950-1953, dans laquelle le langage de la cohomologie des faisceau se met en place ; ces deux aspects constituent la deuxième partie du chapitre. On voit ici clairement que c'est bien l'histoire du couple local/global qui nous intéresse et non l'histoire de la théorie des faisceaux ; pour cette dernière, en effet, la date d'arrêt semblerait mal choisie : en 1953, on est encore à beaucoup d'égards au milieu du gué, avant que les notions de foncteur dérivé, le parallèle avec la cohomologie des groupes ou l'extension à la géométrie algébrique ne soient mûrs.

I. Des problèmes de Cousin aux « idéaux de domaines indéterminés ».

1. Avant Oka.

Nous avions quitté les problèmes de Cousin sur la correction que Gronwall apportait – sur le conseil de Osgood – à l'énoncé un peu hâtif du résultat relatif au problème des lieux d'annulations : Cousin pensait avoir démontré, dans les polycylindres, l'existence d'une fonction holomorphe de lieu de zéros donné (avec multiplicité) ; Gronwall montre que ce n'est vrai que lorsque les composantes du polycylindre sont toutes – sauf au plus une – simplement connexes. On n'en est guère plus loin une vingtaine d'années plus tard, quoique ces problèmes continuent à être mentionnés dans les grandes monographies sur les fonctions de plusieurs variables complexes, par exemple celle de Behnke et Thullen [Behnke, Thullen 1934 chapitre V, §4]. Deux petits exposés de synthèse, en 1934 puis 1937, indiquent toutefois de nouvelles directions de recherche par lesquelles on espère progresser.

[3] Dans ce chapitre, sauf mention du contraire, « Cartan » désigne bien sûr Henri et non Elie.

Ainsi Henri Cartan fait-il paraître aux C.R.A.S. en 1934 une note sur *Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes* [Cartan 1934]. L'énoncé du problème est encore classique, rappelons-le pour mémoire :

> *Premier problème de Cousin*.- On suppose que le domaine considéré D est recouvert à l'aide d'une infinité dénombrable de domaines partiels D_i intérieurs à D, et que, dans chaque D_i, on a défini une fonction *méromorphe* f_i ; on suppose en outre que, chaque fois que deux domaines D_i et D_j ont une partie commune D_{ij}, la différence $f_i - f_j$ est *holomorphe* dans D_{ij}. *On se propose de trouver une fonction* F*, méromorphe dans* D*, et telle que, dans chaque* D_i, *la différence* $F - f_i$ *soit holomorphe*.
>
> *Deuxième problème de Cousin*.- Mêmes hypothèses que pour le premier, sauf que les f_i sont remplacées par des φ_i *holomorphes* (dans D_i), et que, dans chaque D_{ij}, le quotient $\varphi_i : \varphi_j$ est supposé *holomorphe et jamais nul*. On se propose de *trouver une fonction* Φ, *holomorphe dans* D*, et telle que, dans chaque* D_i, *le quotient* $\Phi : \varphi_i$ *soit holomorphe et non nul.* [Cartan 1934 1285]

On voit que par un artifice rhétorique (« Mêmes hypothèses que pour le premier … »), Cartan cherche à faire ressortir le parallèle entre les deux problèmes ; ils semblent n'être que les deux faces d'un même problème, l'un du côté additif, l'autre du côté multiplicatif. Un troisième problème s'ajoute au premier couple : le problème « de Poincaré » est de représenter une fonction méromorphe dans un domaine D comme le quotient de deux fonctions holomorphes dans D. Signalons que le terme « domaine » ne désigne pas ici simplement un ouvert de $\mathbf{C}^n$ mais une variété analytique abstraite étalée dans $\mathbf{C}^n$, sur le modèle des surfaces de Riemann classiques ; un simple ouvert de $\mathbf{C}^n$ est une représentation comme « domaine univalent » (*schlicht*). Pour examiner les liens qu'entretiennent les trois problèmes, Cartan met l'accent sur les domaines dans lesquels ils sont résolubles :

> Si un domaine D est tel que le premier (ou le deuxième) problème de Cousin a une solution quelles que soient les données, nous dirons que « *le premier théorème de Cousin* (ou le deuxième) *est vrai pour le domaine* D. » [Cartan 1934 1285]

Les problèmes vont être intégrés à un programme de recherche dans lequel Cartan est déjà engagé, celui de la *classification des domaines* en théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes : polycylindres (cas traité par Cousin), domaines d'holomorphie (domaine maximal d'existence pour une certaine fonction holomorphe), domaines rationnellement convexes[4], domaines analytiquement convexe[5], domaines cerclés[6] etc. ; on retrouvera cette ligne problématique chez Thullen et Stein ainsi que dans les premiers travaux d'Oka. La note de Cartan présente ainsi sans démonstration des résultats comme « Si le premier théorème de Cousin est vrai pour D, D est un domaine d'holomorphie » [Cartan 1934 1286] ou « Le théorème de Poincaré est vrai pour tous les domaines cerclés et tous les domaines de Hartogs, même quand les théorèmes de Cousin ne sont pas vrais » [Cartan 1934 1287][7]. Un cas va jouer un rôle dans la suite[8] :

> Théorème 2. *Si un domaine D est convexe par rapport aux polynômes ou aux fonctions rationnelles en x,y, le premier théorème de Cousin est vrai pour D.*
>
> Ce résultat, qui dépasse de beaucoup celui de Cousin, s'obtient par une méthode analogue à la sienne, mais il faut se servir de l'*intégrale d'André Weil* (…). [Cartan 1934 1286]

Dans le cas des polycylindres, en effet, Cousin pouvait définir des fonctions holomorphes en utilisant dans le plan de chacune des variables la représentation intégrale de Cauchy (à une variable, donc). Pour des domaines plus généraux cet artifice de démonstration n'est plus utilisable, mais une formule intégrale proposée par André Weil [Weil 1932] donne l'analogue pour *n* variables complexes de la formule de Cauchy : une fonction holomorphe sur un domaine (défini par des inégalités polynomiales) est représentée comme une intégrale prise sur le bord (de dimensions réelles $2n$-2) du domaine. Cartan renonce toutefois à publier la démonstration du théorème 2 de la note, car il comprend que la formule de Weil repose sur une hypothèse non démontrée[9]. La validité de cette hypothèse implicite devient en 1940 l'un des premiers problèmes relevant de « l'étude globale des idéaux de fonctions holomorphes », celui des familles de fonctions holomorphes sans zéros communs ; il est alors résolu dans un cas bien particuliers :

> Corollaire du théorème III.- Si $f_1, \ldots, f_p$ sont holomorphes et n'ont pas de zéro commun sur un polycylindre compact et simplement connexe Δ, il existe *p* fonctions $c_1, \ldots, c_p$ holomorphes sur Δ telles que
>
> $$c_1 f_1 + \ldots + c_p f_p = 1. \qquad \text{[Cartan 1940 22]}$$

4 Pour le dire vite : définis dans $\mathbf{C}^n$ par un système d'inéquations $|R_i(x)| < 1$, les R_i étant des fonctions rationnelles des *n* variables complexes.
5 Idem avec des R_i holomorphes.
6 Un domaine de $\mathbf{C}^n$ est *cerclé* s'il contient l'origine et est stable lorsque toutes les coordonnées sont multipliées par nombre complexe de module 1.
7 En effet : Cousin II ⇒ Poincaré, mais la réciproque est fausse.
8 Cartan travaille ici sur les domaines univalents de $\mathbf{C}^2$.
9 Weil se contente d'un « choisissons (ce qui est facile) des polynômes (…) tels que (…) » [Weil 1932 1304]

Mais n'anticipons pas.

L'exposé que Behnke et Stein font sur *Les fonctions analytiques de plusieurs variables dont les surfaces des zéros et des pôles sont donnés* [Behnke, Stein 1937] est très proche de celui de Cartan, auquel il fait bien sûr référence. Après les rappels historiques qu'on imagine et la formulation des problèmes de Cousin (I et II) et de Poincaré, c'est la question des domaines qui organise la problématique. Ainsi sont donnés, pour chacun des trois problèmes, un exemple de domaine où il est résoluble et un exemple où il ne l'est pas. Pour le premier théorème, nos auteurs rendent compte de la preuve d'Oka. Pour le deuxième, outre les résultats de Cartan, ils font écho à des travaux récents de Thullen dans lesquels on voit ce problème être utilisé comme un outil dans l'étude des domaines d'holomorphie ; Thullen obtient, par exemple :

> Théorème I.- Si le deuxième théorème de Cousin est vrai pour un domaine D, tout point intérieur à H(D) est nécessairement un point intérieur à D ou un point frontière de D ; en d'autres termes, H(D) est contenu dans la fermeture de D. [Thullen 1935 721]

où H(D) désigne le domaine d'holomorphie associé à un domaine quelconque (son enveloppe holomorphe, *Regularitätshülle*). On voit qu'on en est encore à la liste de résultats partiels et de contre-exemples intéressants, sans que les principes organisateurs soient mis au jour. Un petit tableau résume, à la fin de l'article de Behnke et Stein, l'éventail des combinaisons imaginables :

	Cousin 1	Cousin 2	Poincaré	Possible ?
1	+	+	+	+
2	+	+	+	-
3	+	-	+	-
4	+	-	-	+
5	-	+	+	+
6	-	+	-	-
7	-	-	+	+
9	-	-	-	+

[Behnke, Stein 192]

Pour chacune des combinaisons possibles on rappelle un exemple. Notons que, bien que les termes de « *im Kleinen* » et « *im Großen* » soient largement utilisés en théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes – la lecture de la monographie de Behnke et Thullen le montre –, l'étiquette « problème de passage du local au global » n'est pas systématiquement attachée à la famille de problèmes Poincaré-Cousin.

2. Les premiers résultats d'Oka.

Après des études au Japon et un passage à Paris, où il travaille sous la direction de Gaston Julia sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes[10], Kiyoshi Oka (1901-1978) est assistant professeur à l'Université de Hiroshima lorsqu'il commence à publier des contributions fondamentales sur le premier puis le second problème de Cousin (ainsi que sur le problème de Levi[11]). On va voir que les succès qu'il obtient vont d'une part permettre de mieux comprendre ce qui *distingue* les deux problèmes de Cousin, et contribuer d'autre part à modifier le type de technique de manipulation des lieux efficaces dans ces problèmes ; on passe de techniques d'*approximation*[12] à des techniques de *recollement* de proche en proche.

Les deux premiers articles, *Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles*[13] [Oka 1936] et *Domaines d'holomorphie* [Oka 19371937] résolvent le problème de Cousin pour des domaines de plus en plus généraux. Oka propose une méthode permettant de se ramener à l'étude dans un polycylindre C [Oka 1936 2], dans lequel le domaine initial est représenté comme une sous-variété Σ, rationnelle (dans le premier article) ou analytique. Cette astuce lui permet d'utiliser, comme Cousin, les intégrales de Cauchy dans le plan de chacune des variables ; mais elle introduit un problème auxiliaire, celui de prolonger toute fonction holomorphe sur Σ en une fonction holomorphe dans C. Outre les formules explicites, les résultats sont obtenus en combinant des récurrences sur la dimension du polycylindre et une approximation de ce polycylindre par des polycylindres relativement compacts qu'il contient. Dans le second article, le passage des domaines rationnellement convexes aux domaines d'holomorphie utilise largement les mêmes techniques et repose de manière essentielle sur le résultat dans le cas rationnel ; le passage de l'un à l'autre repose, pour le dire vite, sur l'approximation d'un domaine analytiquement convexe par des domaines rationnellement (même polynomialement) convexes ouverts qui le contiennent [Oka 1937 18], les domaines d'holomorphie étant ensuite eux-mêmes approchables par des domaines analytiquement convexes, d'après les travaux de Cartan et Thullen[14] [Oka 1937 22]. Quant à la description de la classe des problèmes considérés, elle n'est pas plus centrée autour de local/global que chez

[10] Ce qui nous vaut de lire des articles rédigés en français, avec une syntaxe, à l'occasion, surprenante.

[11] [Oka 1942]. Le problème de Levi est aussi intégré par Cartan à la liste des *problèmes globaux en théorie des fonctions de plusieurs variables complexes*. Il y commente alors le procédé de recollement utilisé par Oka : « On reconnaît ici un énoncé du type de ceux qui permettent d'effectuer, de proche en proche, le passage d'une propriété locale à une propriété globale. » [Cartan 1950b 155]

[12] On se souvient avoir rencontré des techniques de ce type dans le dernier tiers du 19e siècle, par exemple dès 1869 chez H.A. Schwarz *Zur Theorie der Abbildung* [Schwarz 1890 108-132].

[13] Sauf mention du contraire, nous utilisons la pagination de [Oka 1984].

[14] [Cartan, Thullen 1932].

Cartan en 1934 ou Behnke et Stein en 1937 ; les problèmes sont ici aussi des outils de classification des domaines :

> *Malgré les progrès récents de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, diverses choses importantes restent plus ou moins obscures, notamment : le type de domaines dans lesquels le théorème de Runge ou ceux de M. P. Cousin subsistent, la relation entre la convexité au sens de M. F. Hartogs et celle de MM. H. Cartan et P. Thullen ; parmi eux, il y a des relations intimes.* [Oka 1936 1]

Le point de vue est profondément modifié dans l'article *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. III- Deuxième problème de Cousin* [Oka 1939]. Là où Cartan insistait sur l'analogie entre les deux problèmes, Oka met au jour une profonde différence de nature :

> P. Cousin le premier s'est posé de trouver des fonctions méromorphes qui aient les pôles et points d'indétermination donnés, et des fonctions holomorphes admettant des zéros donnés ; que nous appellerons, avec M. H. Cartan, premier et deuxième problème de Cousin, respectivement. Ces deux problèmes intimement reliés diffèrent d'ailleurs plus profondément qu'il ne semble tout d'abord. [Oka 1939 7] [15]

Oka va montrer que, même pour les domaines d'holomorphie, le second problème non seulement rencontre des obstructions de nature topologique, mais que le problème est *essentiellement* topologique. Renonçant, dans un premier temps, aux aspects analytiques, il énonce un problème de Cousin (II) généralisé en étendant le problème classique « jusqu'au champ des fonctions continues » [Oka 1939 8]. En voici l'énoncé :

> Considérons dans un espace de plusieurs variables réelles le domaine *D*, et dans lequel deux fonctions continues f_1 et f_2. Si ces fonctions satisfont dans *D* à une relation de la forme, $f_1 = f_2\lambda$, λ étant une fonction continue et non nulle, elles seront appelées *équivalentes* dans le domaine. Deux fonctions continues au voisinage d'un point *P* à l'espace fini[16] seront appelées équivalentes en *P*, si l'on peut trouver une hypersphère de centre *P* dans laquelle les fonctions soient équivalentes.
>
> Considérons dans le domaine *D* un mécanisme comme suivant : pour tout point *P* du domaine, il correspond une hypersphère (γ) de centre P et une fonction continue *f* dans (γ), et cela de telle façon que pour toute paire d'hypersphères contiguës, les fonctions correspondantes soient équivalentes dans la partie commune ; dont *f* sera appelée fonction attachée au point P. Dans ces conditions, proposons-nous de trouver une

[15] Pour les citations en français, nous utilisons la pagination de la publication originale et non celle des *Collected Papers*.

fonction continue F dans D, équivalente en tout point P du domaine à la fonction attachée à P. [Oka 1939 9]

Oka ajoute ensuite une hypothèse permettant d'éliminer de l'étude du cas continu une situation qui ne se présentera pas dans le cas analytique : il suppose que le lieu des zéro du système des fonctions est d'intérieur vide. L'introduction de cette hypothèse donne lieu à une discussion intéressante :

> Soient F_1, F_2 deux fonctions continues dans le domaine D, équivalentes en tout point de D. Ces fonctions ne sont pas en général équivalentes dans le domaine ; mais, elles le sont certainement, si l'ensemble des points pour lesquels elles s'annulent n'admet aucun point intérieur. En effet, F_1 et F_2 étant équivalentes en un point P de D, on trouve la relation $F_1 = F_2\lambda$ au voisinage de P, λ étant continue et non-nulle. Or, grâce à l'hypothèse, λ est déterminée uniquement au voisinage de P ; et ceci pour tout P dans D. D'où il s'ensuit l'équivalence globale. [Oka 1939 10]

Le lien avec le cas analytique n'est donc pas la seule motivation de l'introduction de cette hypothèse. Au niveau purement topologique, elle permet à la fois d'établir un résultat d'unicité de la solution, et de passer de l'équivalence locale en tout point à l'équivalence globale. En particulier, dans l'énoncé du problème, il n'y a pas lieu de distinguer l'équivalence en tout point de l'intersection de deux hypersphères et l'équivalence globale dans cette intersection. Un peu plus loin encore [Oka 1939 13] elle joue un rôle analogue au résultat d'unicité du prolongement analytique et permet de passer de solutions définies sur une suite croissante de domaines à une solution sur leur réunion.

Une fois clarifié le problème généralisé, l'étude que mène Oka en est assez sommaire, mais elle inaugure une autre lignée de *techniques du lieu* grâce à un Lemme dont on verra Cartan se saisir. Oka montre d'abord que le problème généralisé n'est pas toujours résoluble dans un domaine formé du produit de deux domaines annulaires. Il entreprend ensuite, après Gronwall, d'établir que le problème généralisé est résoluble dans les polycylindres dont toutes les composantes – sauf au plus une – sont simplement connexes[17]. La « situation » de base est la suivante (les variables x_i étant complexes) :

> 1°.- Sur le plan des x_1, traçons le rectangle R, que nous décomposerons en petits rectangles égaux (ω_i) par deux systèmes de lignes droites parallèles aux côtés de R. Soit A_1 un domaine fermé consistant d'un ou plusieurs de (ω_i) et des contours, soit A_2 un domaine fermé consistant en l'un des (ω_i) contigus à A_1 et du contour. Nous

[16] Comprendre : qui ne soit pas un point à l'infini.

désignerons la frontière commune de A_1 et A_2 par L et le domaine fermé consistant de A_1 et A_2 par A. Dans l'espace $(x_2,\ldots,x_n)$ traçons un domaine B.

Dans la situation, nous sous-entendons que le point $(x_2,\ldots,x_n)$ se situe dans le domaine B. Soit f_1, f_2 deux fonctions continues des n variables x_i, définies au voisinage de A_1 et à celui de A_2, respectivement, et globalement équivalentes au voisinage de L. Dans cette condition, on peut trouver une fonction continue des n variables x_i, définie au voisinage de A, et équivalente à l'une au moins des fonctions données en tout point de A, si *L ne coïncide pas avec le contour entier du rectangle A_2, et encore si B est linéairement simplement connexe*. [Oka 1939 11]

Ici, bien qu'on devine qu'on passera plus loin à des approximations de domaines plans par des domaines formés de petits carrés, on n'utilise plus un schéma d'approximation mais un schéma d'extension progressif du domaine sur lequel on a réussi à construire une solution globale au problème, extension faisant apparaître les voisinages des quatre parties $A_1 \cap A_2$, A_1, A_2 et $A_1 \cup A_2$; la simple connexité d'un voisinage de $A_1 \cap A_2$ garantit que la fonction λ (donnée dans l'intersection par $f_1 = \lambda f_2$) peut être prolongée au voisinage de A_2 en une fonction ne s'annulant pas.

Après cette étude du problème généralisé dans le cas élémentaire des polycylindres, Oka revient au problème analytique et au cas plus général des domaines d'holomorphie. Il utilise tout l'arsenal déployé dans les articles précédents pour établir que le problème est en fait essentiellement topologique, au sens où :

Théorème I.- Etant donnés des zéros analytiques dans un domaine d'holomorphie, univalent et sans point à l'infini, s'il existe une solution non-analytique, la solution analytique l'est aussi[18]. [Oka 1939 9]

3. L'étude globales des idéaux de fonctions holomorphes.

S'appuyant sur ces succès d'Oka, Henri Cartan propose en deux textes un changement complet de cadre et de perspective : *Sur les matrices holomorphes de n variables complexes* [Cartan 1940], *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes* [Cartan 1944]. Pour ce qui est du changement de perspective, on a vu que l'objectif central était jusqu'ici la classification et l'étude des propriétés caractéristiques des différents types de domaines rencontrés en théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes ; les

[17] Il utilise, et Cartan plus tard, une variante de la définition usuelle de la simple connexité

problèmes de Cousin et le problème de Poincaré étaient des sondes, parmi d'autres, dont on espérait qu'elles fourniraient des outils pour cette étude. L'objectif standard était d'étendre un énoncé démontré pour un type de domaine au cas d'un domaine un peu plus général. Cartan change entièrement la direction du questionnement : partant de la technique de démonstration par recollement utilisée par Oka[19], il montre qu'elle est centrale pour l'étude d'une famille de problème bien plus vaste que la famille initiale. Oka a montré une différence essentielle entre Cousin I et Cousin II, étudié l'analogue continu de Cousin II et utilisé un Lemme de recollement ; c'est ce fonctionnement par famille de problèmes de *type Cousin* et cette recherche des Lemmes fournissant les leviers fondamentaux qui va passer au premier plan. Quant au cadre et au mode d'exposition, Cartan innove aussi sensiblement. Comme Seifert et Threlfall, Whitney, Steenrod et surtout Ehresmann, il va s'attaquer à la généralité des problèmes en cherchant à définir les *structures* abstraites fournissant le bon cadre de formulation. Dans ce travail sur les structures, il importe en théorie des fonctions analytiques une partie du langage de l'algèbre abstraite pour dessiner les contours d'une théorie globale des idéaux de fonctions holomorphes.

L'objectif est énoncé dans les mêmes termes dans les deux articles, qu'on peut voir comme les deux volets d'un même travail. Le mode d'exposition est le même : reformuler un problème de Cousin en des termes qui en laissent voir la structure générale, ce qui nécessite plusieurs étapes.

> (…) *Construire une fonction holomorphe ayant des zéros donnés dans un domaine donné*. Il faut, bien entendu, préciser ce qu'on entend par « zéros donnés ». Nous appellerons *donnée de Cousin* dans un domaine D la donnée, en chaque point x de D, d'une fonction f_x holomorphe au point x, ces fonctions satisfaisant à la condition suivante : tout point a de D possède un voisinage V dans lequel f_a est holomorphe et en tout point x duquel le quotient f_x/f_a est holomorphe et $\neq 0$. Cette dernière condition exprime que, dans l'anneau des fonctions holomorphes au point x, f_x et f_a engendrent le même *idéal*. Le problème posé par Cousin est alors : pour toute *donnée de Cousin* dans le domaine D, existe-t-il une fonction f, *holomorphe dans* D, telle que, pour tout point x de D, le quotient f/f_x soit holomorphe et $\neq 0$. [Cartan 1944 149]

La formulation en termes d'anneaux et d'idéaux montre la voie de la généralisation :

[18] Comprendre : existe aussi.
[19] Et, avant lui, par Cousin et Gronwall.

> Remarquons (…) que le « deuxième problème de Cousin » se rapporte à l'étude globale des idéaux qui ont, au voisinage de chaque point, une base formée d'*une seule* fonction holomorphe. En dehors de ce cas particulier, on n'a pas encore abordé, semble-t-il, l'étude globale des idéaux de fonctions holomorphes. [Cartan 1940 2]

Ainsi la relation $f_x = g_x\,\lambda$, où λ est une fonction non-nulle en x, est-elle lue comme : dans l'anneau des fonctions holomorphes en x (notion qui se précisera plus tard), λ est un élément inversible, les idéaux engendrés par f_x et g_x sont donc identiques. Plus généralement, les idéaux engendrés par p fonctions holomorphes $f_1,\ldots,f_p$ et p autres $g_1,\ldots,g_p$ sont identiques lorsque les f_i sont combinaisons linéaires à coefficients holomorphes des g_i, la matrice du changement de « base »[20] étant inversible ; Oka cherchait à prolonger la fonction λ (holomorphe non nulle), il va falloir prolonger des matrices carrées holomorphes en conservant la non-nullité de leur déterminant : c'est l'objectif du premier article. La recherche de généralité passe enfin par l'énoncé d'une étiquette de problème (autre que « de type Cousin ») et l'identification d'un Lemme fondamental ; après avoir rappelé le résultat d'Oka affirmant que dans un polycylindre, toute fonction holomorphe sur une sous-variété analytique de codimension[21] 1 peut être prolongée en une fonction analytique sur le polycylindre initial :

> Pour ce théorème, comme pour le théorème de Cousin, le principe de la démonstration est le suivant : pour passer de *données locales* à une *existence globale*, on procède par assemblages successifs de morceaux. Chaque stade d'assemblage consiste en ce que nous appellerons une *opération élémentaire*. Voici par exemple en quoi consiste l'opération élémentaire qui conduit au théorème de Cousin :
>
> Etant donnés deux polycylindres compacts Δ' et Δ'' qui ont respectivement mêmes composantes dans les plans des n-1 dernières variables complexes, et dont l'intersection $\Delta'\cap\Delta''$ est *simplement connexe*, étant donnée d'autre part une fonction $f(x)$ holomorphe et $\neq 0$ en tout point de $\Delta'\cap\Delta''$, il s'agit de mettre cette fonction f sous la forme d'un quotient f'/f'', f' étant holomorphe et $\neq 0$ en tout point de Δ', et f'' étant holomorphe et $\neq 0$ en tout point de Δ''**.** [Cartan 1944 152]

C'est bien l'extension directe au cas des matrices qui constitue le cœur de l'article de 1940 :

> Théorème I.- Soient, dans l'espace de n variables complexes, deux polycylindres compacts Δ' et Δ'' qui ont mêmes composantes dans les plans de toutes les variables

[20] Cartan emploie le terme « base » pour désigner tout système fini de générateurs d'un module [Cartan 1944 153].

[21] Sauf mention du contraire, nous parlons dans ce chapitre de dimensions complexes.

> sauf une, et dont l'intersection $\Delta' \cap \Delta'' = \Delta$ est simplement connexe. Toute matrice holomorphe sur Δ peut être mise, sur Δ, sous la forme $A = A'^{-1}A''$, A' étant une matrice holomorphe et inversible sur Δ', et A'' une matrice holomorphe et inversible sur Δ''. [Cartan 1940 9]

On voit que ce théorème se situe en deçà de la question de la nature du domaine à conquérir (polycylindre, domaine rationnellement convexe, domaine d'holomorphie etc.), le polycylindre compact ne représentant que le cas de base, local mais sur lequel un résultat global est atteint. La traduction en termes d'idéaux est donnée dans le :

> Théorème II.- Δ', Δ'' et Δ ayant la même signification qu'au théorème I, considérons sur Δ' et Δ'' respectivement, deux idéaux I' et I'' de bases finies. Pour que I' et I'' admettent une même base holomorphe sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$, il faut et il suffit que I' et I'' engendrent le même idéal sur l'intersection Δ. [Cartan 1940 15]

On voit que le bon objet n'est pas réellement la fonction ni même le système de fonctions : ces systèmes ne sont que des générateurs d'idéaux, parmi d'autres générateurs possibles, ils en donnent, en un sens, une représentation extrinsèque. Ce sont les idéaux qu'il faut chercher à recoller, et non les fonctions elles-mêmes.

On devine dans quelques formulations de l'article de 1940 un aspect qui est placé en pleine lumière en 1944. Déjà dans l'énoncé du théorème II, en 1940, Cartan précisait en note infrapaginale :

> L'idéal « engendré » sur un ensemble Δ par un idéal I' sur Δ' (lorsque $\Delta \subset \Delta'$) se compose des combinaisons linéaires finies de fonctions de I' à coefficients holomorphes sur Δ. [Cartan 1940 15]

L'importation de concepts algébriques n'est pas tout, il faut ici décrire une structure *mixte* dans laquelle on n'étudie pas tant des idéaux que des « idéaux … sur … » ; c'est l'interaction entre domaines et structures associées qui constitue le cœur de l'étude, d'où la nécessaire mise en place d'une nouvelle famille de notions. Après avoir rappelé la définition d'un idéal (de fonctions holomorphes, sur un domaine dont il n'est volontairement rien dit), Cartan souligne :

> Mais la définition précédente reste vague si l'on ne précise pas dans quelles régions sont envisagées les fonctions. La notion d'idéal sera toujours relative à un ensemble E déterminé de l'espace à *n* dimensions complexes. Un *idéal* sur E sera, par définition, un idéal de l'anneau O_E des fonctions *holomorphes* sur E ; j'appelle fonction holomorphe sur E toute fonction définie et holomorphe dans un voisinage de E (ce

voisinage n'étant pas fixé à l'avance mais dépendant de la fonction) ; deux fonctions sont considérées comme *identiques* s'il existe un voisinage de E dans lequel elles coïncident. [Cartan 1944 153]

L'idéal est dit *ponctuel* lorsque E est réduit à un point ; la notion plus générale de module est ensuite introduite. Le problème fondamental est celui de l'aller-retour entre deux domaines, l'un inclus dans l'autre. Ici encore c'est l'idéal (ou le module) qui va être le bon objet, car à la restriction du domaine ce n'est pas seulement la notion – triviale – de restriction d'une fonction qui va être associée mais celle – mixte, elle aussi, entre algèbre et topologie – d'idéal (ou de module) engendré :

> Toute fonction holomorphe sur E peut être considérée comme une fonction holomorphe sur n'importe quel ensemble E' contenu dans E. Il en résulte que *tout idéal sur E engendre un idéal sur E'*, lorsque E'$\subset$ E ; il importe de ne pas confondre ces deux idéaux : le second se compose de toutes les combinaisons linéaires finies, à *coefficients holomorphes sur E'*, des fonctions du premier idéal. Ainsi, un idéal porte en puissance une foule d'idéaux, un sur chaque sous-ensemble de E. [Cartan 1944 153]

Le changement de l'anneau des coefficients permet d'obtenir sur E' des fonctions appartenant à un idéal engendré par un idéal I sur E mais qui ne sont restrictions d'aucune fonction de I. Dans ces deux articles, Cartan illustre cette subtilité en prenant comme exemple le Lemme implicite utilisé par Weil : supposons que sur E les fonctions holomorphes $f_1,\dots,f_q$ n'aient aucun zéro commun, l'idéal I qu'elles engendrent sur E engendre en tout point de E l'idéal ponctuel unité (i.e. tout l'anneau) ; il s'en faut toutefois de beaucoup qu'on puisse en déduire directement que I est l'idéal unité sur E, i.e. qu'il existe des fonctions $c_1, \dots,c_q$ holomorphes sur E telles qu'on ait, identiquement sur E, $\Sigma c_i f_i = 1$ [Cartan 1944 158]. C'est l'un des succès de l'article de 1940 que d'établir ce résultat pour les domaines d'holomorphie. Avant de pouvoir formuler le problème fondamental de remontée de E' à E, Cartan introduit la notion de système cohérent d'idéaux, qu'il décrit comme une généralisation directe de la notion de « donnée de Cousin » présentée dans l'introduction :

> Définition.- Soit E un ensemble quelconque de l'espace à n dimensions complexes, et soit q un entier ≥ 1 donné une fois pour toute. Supposons qu'à chaque point x de E ait été attaché un module M_x (à q dimensions) de fonctions *holomorphes au point x*. Nous disons que les modules ponctuels M_x forment un *système cohérent*, si tout point a de E

possède un voisinage V sur lequel existe un module (à q dimensions) qui, en tout point x de l'intersection $V \cap E$, engendre le module ponctuel M_x. [Cartan 1944 156]

Le rôle de cette notion de cohérence est ainsi caractérisé en 1950 : « (…) avant de pouvoir faire le passage du local au global, il faut approfondir les propriétés locales, c'est-à-dire voir comment les propriétés ponctuelles s'organisent localement. » [Cartan 1950a 30]. Pour l'heure il nous faut encore une dernière définition …

> Définissons encore la notion de *module associé* à un système cohérent de modules ponctuels M_x sur E : c'est le module des fonctions, holomorphes sur E, qui appartiennent à M_x en tout point x de E. Enfin nous appellerons *module associé à un module M* (sur E) le module associé au système cohérent de modules ponctuels M_x, engendré par M aux différents points x de E. Le module associé à M contient évidemment M. [Cartan 1944 157]

… et l'on peut formuler avec précision le problème fondamental (problème III) :

> Peut-on affirmer que *le module associé à* M *est contenu dans* M ? Comme ce module associé contient évidemment M, la solution du problème III signifierait que tout module est identique à son associé. [Cartan 1944 158]

L'analyse du problème III met elle-même en pleine lumière le « problème élémentaire » (problème IV) du type $\Delta = \Delta' \cap \Delta''$, Δ', Δ'', $\Delta' \cup \Delta''$. Ici Cartan se heurte à une difficulté :

> Ainsi tout l'effort doit se porter, semble-t-il, sur le problème IV, dont la solution entraînerait celle de tous les autres. Or le problème IV soulève une *question préliminaire* : les f_k étant holomorphes sur Δ, associons à chaque point x de Δ le module ponctuel $M(f_k, x)$ formé des systèmes de p fonctions c_k (holomorphes au point x) telles que $\sum_k c_k f_k = 0$; *ces modules ponctuels forment-ils un système cohérent* ? Or c'est là une question que je ne suis pas encore parvenu à résoudre. [Cartan 1944 160]

Cette question de cohérence du faisceau des relations sera résolue par Oka en dans son article *Sur les fonctions analyiques de plusieurs variables. VII Sur quelques notions arithmétiques* [Oka 1950]. D'autres résultats de cohérence sont nécessaires pour garantir le bon développement de la théorie. Ainsi Cartan fait-il remarquer en 1950 qu'en 1944 il avait implicitement supposé que le système de modules ponctuels M_x engendré par un module M sur un espace E était cohérent. En 1944 il énonce comme problème ouvert la cohérence de l'idéal d'une sous-variété analytique [Cartan 1944 187], problème qu'il résout en 1950 au moment où Oka donne un exemple de système non-cohérent d'idéaux [Oka 1950 7][22].

L'article qu'Oka fait paraître en 1950 se rattache encore à cette première phase de l'émergence de la notion de faisceau ; rédigé en 1948, il est le fruit des réflexions de son auteur sur l'article de Cartan de 1940, les circonstances n'ayant pas mis sous les yeux d'Oka l'article de 1944. Rappelons que dans l'article de 1940, Cartan énonçait en termes généraux le programme d'étude des idéaux de fonctions holomorphes et étudiait le pas élémentaire de prolongement des matrices holomorphes inversibles. Oka, qui, on l'a vu, utilisait déjà largement les termes « local » et « global », reprend de Cartan l'étiquette de problème :

> Parmi les problèmes qui se transportent du champ de l'Arithmétique à celui des fonctions analytiques, se trouve un type de problème (comme les « problèmes de Cousin »), où il s'agit de passer de données *locales* à des solutions *globales*. [Oka 1950 2]

C'est la reformulation en termes d'idéaux de problèmes posés initialement en termes de fonctions qu'Oka décrit comme un emprunt à l'Arithmétique. Ce style « arithmétique » se manifeste aussi dans son choix de la notion de congruence (« $\varphi_i \equiv 0 \pmod{f_j}$ ») pour décrire l'appartenance des φ_i au module engendre par les f_j. Après avoir proposé sa liste des problèmes fondamentaux de ce type, il arrive à une formulation de la notion d'idéal un peu plus précise que celle que Cartan donne en 1944, plus proche de la notion de faisceau. Après avoir défini la notion d'*idéal holomorphe* de domaine D fixé :

> (…) Nous allons maintenant étendre cette notion.
>
> Considérons dans l'espace (x) des couples (f,δ), où δ est un domaine et f une fonction holomorphe dans δ. Considérons l'ensemble (I) des couples (f,δ) ; au lieu de dire que $(f,\delta) \in$ I, nous dirons parfois que $f \in$ (I) pour δ. Supposons que cet ensemble (I) satisfasse aux deux conditions suivantes :
>
> 1° si $(f, \delta) \in$ I et si α est une fonction holomorphe dans un domaine (connexe ou non) δ', alors $\alpha f \in$ (I) pour $\delta\cap\delta'$;
>
> 2° si $(f,\delta) \in$ (I) et $(f', \delta') \in$ (I), alors $f+f' \in$ (I) pour $\delta\cap\delta'$.
>
> Nous dirons alors que (I) est un *idéal holomorphe de domaines indéterminés*. [Oka 1950 5]

[22] Pagination de l'article original.

Il est bien clair que, pas plus que le travail minutieux d'Ehresmann sur la notion d'espace localement homogène n'est un retour au point de vue universellement et implicitement local sur les groupes de Lie, la structure d'idéal holomorphe de domaine indéterminé n'inaugure le retour à un univers fonctionnel dans lequel les domaines de validité ou d'existence ne jouent aucun rôle et n'apparaissent jamais explicitement : dans un cas comme dans l'autre, c'est exactement le contraire. C'est dans un monde mathématique structuré par les problématiques de légalité du lieu et une écriture ensembliste ne tolérant plus l'implicite dans la référence aux domaines que les aspects locaux d'une part, les situations où l'on travaille sur des fonctions dont le domaine d'extension doit demeurer problématique d'autre part, peuvent être ressaisis en toute clarté. Dans les deux cas, ce retour à un plus haut niveau est permis par la démarche structurale et guidé de manière fondamentale par le couple local /global. De nouvelles notions viennent enrichir ce dernier couple ; ainsi la notion de germe de fonction holomorphe en un point – présente, sans que le terme « germe » soit encore utilisé, dans la définition que donne Cartan de l'identité dans l'anneau des fonctions sur un ensemble donné – renouvelle le traitement du « local en un point » ; ainsi la notion de cohérence – déjà présente dans les axiomes de surface de Riemann chez Weyl en 1913 – introduit-elle un intermédiaire entre le niveau « ponctuel » (mais déjà local) et le niveau « local ». D'ailleurs, après avoir formulé la notion d'idéal engendré sur un sous-ensemble au moyen de la notion de « pseudo-base », Oka arrive indépendamment de Cartan à la notion de cohérence :

> Etant donné un idéal (I) de domaines indéterminés, nous dirons qu'un système fini (F) de fonctions holomorphes est une pseudo-base de (I) *en un point*, si c'est une pseudo-base dans un voisinage de ce point. Un tel système sera parfois appelé une *pseudo-base locale*. [Oka 1950 7]

On a vu qu'il donnait quelques résultats fondamentaux sur ce point.[23]

II. Les « tanks ».

Après avoir entendu l'exposé de Serre *sur quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein* [Serre 1953], un auditeur allemand commente ainsi, en 1953, les méthodes parisiennes : « Nous en sommes à l'arc et aux flèches, les français ont des tanks »[24]. On

[23] Si l'on est sensible à l'évolution du vocabulaire, signalons que dans le résumé de cet article d'Oka que Behnke rédige en 1950 pour le *Zentralblatt Math*, les adjectifs « *lokal* » et « *global* » ont remplacé les traditionnels « *im Kleinen* » et « *im Großen* » (*Zentralblatt Math* **36** (1950), p.52).

[24] „*Wir haben Pfeil und Bogen, die Franzosen haben Panzer*". Cité par R. Remmert [Hilton, Hirzebruch, Remmert 1991 277].

change effet d'échelle lorsque le travail de recollement, si fondamental chez Cartan et Oka, n'est plus considéré *que* comme le travail dans les modules de cohomologie H^0 et H^1, ignorant à la fois toute l'information portée par la suite des H^n et la possibilité d'étudier les liens entre les cohomologie de faisceaux analytiques cohérents et d'autres faisceaux. D'une longue liste tirons un seul exemple (de type Cousin) de cette reformulation amorcée en 1950 ; commentant en 1984 l'un des théorèmes d'Oka de 1950 lorsque Δ est un produit de disques compacts et **I** l'idéal engendré par des fonctions F_i holomorphes sur Δ, Cartan explique :

> Le *théorème II* dit que si Δ est recouvert par des ouverts U_α dans chacun desquels on a une φ_α holomorphe de façon qu'en tout point de $U_\alpha \cap U_\beta$ la différence φ_α-φ_β appartienne à l'idéal ponctuel engendré par les F_i alors il existe une Φ holomorphe sur Δ telle que, en tout point de U_α , Φ-φ_α appartienne à l'idéal ponctuel engendré par les F_i. Ceci, en termes de faisceaux, s'énonce comme suit : si **I** est un faisceau cohérent d'idéaux sur Δ, l'homomorphisme de sections $\Gamma(\Delta,\mathbf{O}) \rightarrow \Gamma(\Delta,\mathbf{O/I})$ est surjectif (conséquence du théorème B). [Oka 1984 107]

Ainsi, si la notion de faisceau analytique cohérent (d'idéaux, de modules) a pu émerger du seul contexte des problèmes de Cousin, il nous faut décrire comment la considération d'autres types de faisceaux et la mise en place des outils cohomologiques contribuent à confirmer son rôle de théorie s'occupant des problèmes de passage du local au global.

1. Un faisceau d'idées.

Si l'apport de Leray est souvent mis en avant à ce point de l'histoire – par les auteurs eux-mêmes – nous voudrions plutôt l'insérer ici dans une famille plus large d'idées et de techniques qui circulent dans le milieu parisien – en particulier au sein de Bourbaki – dans la période 1945-1950. Si les échanges entre questions de faisceaux analytiques et topologie algébrique sont centraux, ils ne sont pas les seuls à enrichir la perspective. Précisons que nous ne visons pas une reconstruction précise de la chronologie de cette période.

i. La topologie par les ouverts.

On peut commencer par Cartan lui-même, qui, parallèlement à l'étude globale des idéaux de fonctions holomorphes, propose en 1945 un article sur les *Méthodes modernes en topologie algébrique* ; il contient plusieurs éléments appelés à intégrer le *fond commun* des théories que nous voyons émerger dans cette période. Cet article doit beaucoup à celui de Steenrod sur les *Groupes d'homologie universels*[25] (1936), dans lequel la question des groupes de coefficients (pas encore locaux) était posée de la manière suivante : après que le traité de Lefschetz a diffusé les notions d'homologie relative et d'homologie à coefficients dans un groupe abélien quelconque, on a compris qu'il n'était pas nécessaire de considérer tous les groupes possibles pour obtenir tous les invariants homologiques. Dans le cas des complexes, l'homologie à coefficients entiers est *universelle* au sens où tous les autres groupes d'homologie s'en déduisent ; ce n'est pas le cas pour les espaces localement compacts – nous dit Steenrod – mais un autre groupe joue ici un rôle universel : le groupe additif **T** des nombres réels modulo 1. Cette extension de la théorie (co)homologique[26] à des espaces topologiques généraux reprend l'idée introduite par Čech (dans ce même but) en 1933 dans son article sur la *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*[27] ; reprenant d'Alexandrov l'idée du nerf d'un recouvrement pour établir un pont entre topologie ensembliste et topologie combinatoire, il définissait l'homologie (et l'homologie relative) des espaces compacts généraux en considérant les suites de cycles stables par projection dans la suite des complexes associés à des recouvrements, chacun subordonné au précédent. Steenrod généralise en étudiant plus précisément les « *mapping systems and homomorphism systems* » [Steenrod 1936 662]. Ce sont ces notions de limites projectives de groupes topologiques abéliens selon un ensemble filtrant à gauche et de groupe d'homologie de Čech d'un espace compact à coefficient dans un groupe topologique abélien qui ouvrent l'article de Cartan. Comme Čech puis Steenrod, Cartan insiste sur l'un des traits « modernes » de la méthode : « On remarquera que notre démonstration (…) ne fait à aucun moment intervenir de considérations de triangulation ou de pavage » [Cartan 1945-46 p.13], ou quelques pages plus loin « Ce résultat vaut sans aucune hypothèse de triangulabilité (…) » [Cartan 1945-46 15] ; l'heure est aux espaces topologiques généraux[28] et aux recouvrements ouverts. Cartan passe ensuite du cas compact au cas localement compact en utilisant la compactification d'Alexandrov et l'homologie relative : si E est localement compact mais non compact, de compactifié d'Alexandrov $\hat{E}$ et de point à l'infini I, le groupe d'homologie $\Gamma^r(E)$ de E est défini comme le groupe d'homologie relatif de $\hat{E}$ par rapport à I. Autre trait « moderne », il énonce ensuite le résultat fondamental en termes

[25] *Universal Homology groups* [Steenrod 1936].
[26] Nous suivrons dans ce qui suit les dénominations utilisées par les auteurs eux-même.
[27] E. Čech *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*, Fund. Mat. Vol.19 (1933), p.149-183.
[28] Entendre « plus généraux » : des hypothèses de locale compacité, paracompacité, normalité etc. sont nécessaires selon les énoncés.

de suite exacte longue, dans le cas où E est un espace localement compact, F un fermé de E et U = F-E :

> On a ainsi une cascade de représentations, dites canoniques, de chacun de groupes de la suite
>
> $$\ldots\ \Gamma^{r}(F),\ \ \Gamma^{r}(E),\ \ \Gamma^{r}(U),\ \ \Gamma^{r-1}(F),\ \ \Gamma^{r-1}(E),\ \ \Gamma^{r-1}(U),\ \ldots$$
>
> dans le suivant ; et ces représentations jouissent de la propriété fondamentale suivante :
>
> *Théorème 5.1* (Théorème fondamental).) Γ_1, Γ_2, Γ_3 désignant trois groupes consécutifs quelconques de la suite précédente, φ désignant la représentation canonique de Γ_1 dans Γ_2, et ψ la représentation canonique de Γ_2 dans Γ_3, la représentation composée $\psi o \varphi$ est *nulle*. En outre, *lorsque le groupe de base g est* ***T***, le sous-groupe de Γ_2 formé des éléments dont l'image par ψ est nulle, *est précisément l'image* $\varphi(\Gamma_1)$. [Cartan 1945-46 6]

On voit que notre utilisation du terme « suite exacte » était un léger anachronisme, Cartan s'exprime ici encore comme Steenrod et Hurewicz (1941) ou Ehresmann et Feldbau (1941) pour la suite exacte longue d'homotopie. La présentation n'est pas le seul aspect moderne ; l'est aussi la démarche consistant à établir des résultats topologiques (ici l'invariance du domaine, par exemple) en s'appuyant sur un travail d'allure algébrique. Un dernier aspect de cet article, bref mais riche, ne dépaysera pas l'amateur de problèmes de *type Cousin*. Cartan étudie sur plusieurs paragraphes le groupe Γ^{n} d'une variété topologique de dimension *n* pour obtenir (les E_i étant les composantes connexes de la variété) :

> (…) chaque groupe $\Gamma^{n}_{T}(E_i)$ est isomorphe à **T** si E_i est orientable, isomorphe au groupe Z_2 (groupe additif des entiers module 2) si E_i n'est pas orientable. [Cartan 1945-46 10]

Pas plus que dans le cas de l'invariance du domaine il ne s'agit là d'un résultat nouveau, l'objectif est ici de donner des modèles d'utilisation des « méthodes modernes ». Ainsi la formulation de la propriété d'orientabilité est-elle un modèle :

> Une boule ouverte B_n de dimension *n* est une variété de dimension *n*. Par définition, *orienter* B_n, c'est choisir l'un des deux isomorphismes du groupe $\Gamma^{n}_{T}(B_n)$ sur le groupe de base **T**. Une orientation de B_n induit une orientation pour tout sous-ensemble ouvert U de B_n homéomorphe à B_n (…). Par définition, orienter une variété E de dimension *n*, c'est orienter chacun des sous-ensembles de E homéomorphe à B_n, de manière que si U et V sont deux tels sous-ensembles satisfaisant à $U \subset V$, l'orientation de U soit induite par celle de V. [Cartan 1945-46 9]

Le problème est d'abord reformulé en termes de *système cohérent* d'éléments de $\Gamma^n(U_i)$, les U_1 formant une base pour la topologie de E ; on est enfin ramené à deux théorèmes fondamentaux de recollement, dont voici, par exemple, le deuxième :

> *Théorème 8.2*. Soit E localement compact, réunion de deux sous-ensembles ouverts U_1 et U_2, d'intersection V. Le sous-groupe $\Gamma^r(E)$ formé des éléments dont la trace dans $\Gamma_r(U_1)$ et la trace dans $\Gamma^r(U_2)$ sont nulles, est isomorphe au quotient de $\Gamma^{r+1}(V)$ par le sous-groupe engendré par les traces (dans $\Gamma^{r+1}(V)$) des éléments de $\Gamma^{r+1}(U_1)$ et de $\Gamma^{r+1}(U_2)$. [Cartan 1945-46 10]

Si les formulations des définitions, des théorèmes relatifs aux sections globales et des étapes fondamentales de recollement suivent les modèles forgés en théorie des modules analytiques cohérents, le mode de démonstration est ici différent : c'est de la suite exacte longue d'homologie que tout découle ; elle est l'outil fondamental du côté de la topologie algébrique, elle n'a pas encore d'équivalent du côté holomorphe.

ii. Les partitions de l'unité.

Un deuxième thème nous permet de sortir du dialogue entre topologie algébrique et théorie des faisceaux analytiques, celui des partitions de l'unité. On aurait certes pu n'évoquer que les aspects directement liés à ces deux domaines en centrant l'attention sur les faisceaux fins et résolutions fines, mais il se serait dégagé de cette présentation l'image d'un enchaînement linéaire qui ne nous semble pas conforme à la réalité des circulations.

Nous signalions plus haut l'utilisation par Whitney de techniques du type partition différentiable de l'unité, sans qu'un nom soit donné à ce rouage d'une démonstration complexe. L'année suivante, Salomon Bochner (1899-1982) publie dans le *Duke Mathematical Journal* deux articles de tailles bien différentes. L'un est consacré à une extension du théorème de plongement de Whitney au cas d'une variété analytique, compacte, munie d'une métrique riemannienne [Bochner 1937a] ; apparemment passé inaperçu à l'époque, sa maîtrise des aspects harmoniques sur les variétés riemanniennes lui vaudra d'être signalé par de Rham comme un travail d'avant garde dans ce domaine [Rham 1947-48]. Cet article était précédé d'une note, apparemment passée inaperçue elle aussi. Intitulée *Remarque sur le théorème de Green*[29], elle s'ouvre sur une critique du caractère peu intrinsèque des

[29] *Remark on the Theorem of Green*, [Bochner 1937b].

démonstrations usuelles de ce cas particulier de la formule de Stokes ; R étant la région d'intégration :

> *If R is contained in one coördinate neighborhood, the proof of (1) is comparatively simple, provided the boundary B is sufficiently smooth with respect to the coördinate system. But the passage from the local case to a domain R in the large is rather laborious. It requires a cellular subdivision of R into sufficiently small subregions whose boundary is sufficiently smooth, an application of the local theorem to each subregion, and finally a justification of the mutual cancellation of the boundary terms arising from the artificial cellular partition. (...) We want to show that these two formulas can be deduced in a much simpler fashion.* [Bochner 1937b 334]

L'outil est mis en place en une page et sert à redémontrer quelques résultats usuels : comme dans les « méthodes nouvelles » de Cartan, c'est le mode de démonstration qu'il s'agit ici d'illustrer, un mode de démonstration rapide et intrinsèque, adapté à l'étude des fonctions et opérateurs (en particulier l'intégration) sur les variétés différentielles.

Ce n'est toutefois pas la notion de partition de l'unité due à Bochner qui circule dans le milieu parisien, mais celle, indépendante, de Jean Dieudonné[30] (1906-1992). Dans une note de 1937 *Sur les fonctions numériques continues définies dans un produit de deux espaces compacts* [Dieudonné 1937], il choisit non pas de démontrer un résultat nouveau mais de démontrer de manière plus générale et élégante un théorème d'approximation des fonctions continues sur un produit E×F d'espaces compacts par des fonctions de la forme $f(x)g(y)$ (où $(x,y) \in$ E×F). Si, comme chez Bochner, c'est la théorie de l'intégration qui est visée, ce n'est pas ici l'intégration sur les variété différentiables ; on verra plus tard Dieudonné utiliser son résultat pour démontrer, par exemple, l'existence de la mesure produit. La démonstration usuelle repose, nous dit-il, sur l'utilisation du théorème d'approximation de Weierstrass ; on peut la faire reposer sur un nouveau Lemme :

> Lemme.- Soit E un espace compact, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un nombre fini d'ensembles ouverts dont la réunion est identique à E. On peut trouver un nombre fini m de fonctions numériques non négatives $\lambda_k(x)$ définies et continues dans E, telles que l'ensemble $\lambda_k^{-1}(z) > 0$ soit contenu dans un des ensembles A_i ($i = 1,2,\ldots,n$; $k = 1,2,\ldots,m$) et que l'on ait identiquement

[30] Dans la notice sur ses travaux scientifiques, Dieudonné écrit : « Dans mon premier travail sur la topologie, j'ai introduit, la même année que S. Bochner, mais d'une façon indépendante et dans un cadre plus général, la notion de *partition de l'unité*. » [Dieudonné 1981 698]

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k(x) = 1 \qquad \text{[Dieudonné 1937 593]}$$

André Weil utilise ces « partitions de Dieudonné » dans son livre sur *L'intégration dans les groupes topologiques* [Weil 1940 37]. L'outil est repris, étendu et baptisé dans la *Topologie générale* de Bourbaki, en 1948 : le cadre est alors celui des espaces normaux et c'est le Lemme d'Urysohn (déjà utilisé en 1937 par Dieudonné) qui permet d'établir l'existence d'une « partition continue de l'unité » [Bourbaki 1948 66] subordonnée à un recouvrement ouvert (fini). On passe aux recouvrements localement finis dans l'édition de 1958. Ce sont les partitions de Dieudonné qui sont intégrées aux grandes monographies proposant un exposé intrinsèque et global sur la notion de variété. Ainsi C. Chevalley (1909-1984) les utilise dans son cours sur la théorie des groupes de Lie pour mettre en place l'intégration des fonctions continues à support compact sur une variété différentiable orientée [Chevalley 1946 161 et suiv.] : il est inutile de rappeler que cet ouvrage constitue, douze ans après le *Tract* de Veblen et Whitehead, peut-être le premier exposé sur la notion de variété différentiable qui puisse être enseigné tel quel aujourd'hui ; inutile encore de rappeler qu'il se fait, lui aussi, le héraut d'un traitement enfin global de ces questions :

> *Expository books on the theory of Lie groups generally confine themselves to the local aspect of the theory. This limitation was probably necessary as long as general topology was not yet sufficiently well elaborated to provide a solid base for a theory in the large. These days have now passed, and we have thought that it would be usefull to have a systematic treatment of the theory from the global viewpoint*. [Chevalley 1946 vii]

Si la préface fait directement écho à celle de la monographie d'Elie Cartan sur la topologie des groupes de Lie[31], Chevalley distingue trois temps (groupe topologique – variété différentiable – groupe de Lie) là où E. Cartan ne distinguait que groupe topologique et groupe de Lie. Les partitions de l'unité jouent aussi un rôle central dans l'autre grande monographie où apprendre, dans les années 1950, le travail sur les variétés différentiables, à savoir le cours de de Rham[32] (1955). De Rham ne saurait trop insister sur le rôle de cet outil, par exemple dès la préface :

[31] L'ouvrage de Chevalley est d'ailleurs dédié à E. Cartan et H. Weyl.
[32] G. de Rham *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques*, Actualités scientifiques et industrielles 1222, Hermann, Paris, 1955.

> Après la définition des variétés différentiables, le Chapitre I établit quelques résultats nécessaires pour la suite, en particulier l'existence de « partitions de l'unité » et le théorème de Whitney (…). [Rham 1955 v]

Il utilisait déjà les partitions dans son séminaire de 1950, à Princeton, sur les intégrales harmoniques[33]. Hermann Weyl, qui préside ce séminaire, introduit ce « truc » (*Kunstgriff*) que sont ces « facteurs de Dieudonné » (*Dieudonnésche Faktoren*) dans la dernière édition de *L'idée de surface de Riemann* [Weyl 1955 65], faisant disparaître les décompositions simpliciales utilisées jusqu'alors : comme il l'annonce dans la préface, les recouvrements ont remplacé les découpages.

iii. « Localisation » et « recollement des morceaux » chez Schwartz.

On ne se ferait pas une idée juste en s'en tenant à l'intégration des partitions différentiables de l'unité dans la boîte à outil fondamentale pour un travail sur les variétés ; d'un travail qui ne peut plus s'exposer que de manière intrinsèque et autour du dialogue entre aspects locaux et globaux. C'est par l'intermédiaire du travail de Laurent Schwartz (1915-2002) sur les distributions que les partitions de l'unité arrivent chez de Rham[34] puis Weyl. Elles ne sont pas utilisées dans les premières publications de Schwartz, qui énonce définitions, exemples et résultats sans démonstrations. Elles sont par contre centrales dans le traité de 1950[35], et accompagnent une mise en ordre de l'exposé dans lequel le couple local/global jour un rôle qu'on ne devinait pas dans les articles. Ce sont bien sûr les partitions de Dieudonné qui sont reprises, celles de Bochner ne semblant pas connues[36] : on commence par rappeler la notion bourbachique de partition continue avant de lisser par convolution ; c'est le procédé qu'on retrouve dans le cours de de Rham sur les variétés différentiables. C'est ensuite par localisation que Schwartz introduit le jeu local/global, dans un paragraphe intitulé « Principe de localisation. Support d'une distribution » [Schwartz 1951 25]. Si, en effet, la notion de support d'une fonction définie sur $\mathbf{R}^n$ ne pose pas de problème, une distribution n'est pas une fonction sur $\mathbf{R}^n$ mais sur l'espaces *D* des fonctions complexes indéfiniment dérivables et de

---

[33] [Kodaira, Rham 1950]. On ne saurait manquer de citer le rôle d'André Weil dans cette période, avec par exemple l'extrait d'une lettre à de Rham que ce dernier fait paraître en 1947 : A. Weil *Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe*, Comm. Math/ Helv. Vol20 (1947), p.110-116.

[34] Dans leurs ouvrages respectifs, de Rham et Schwartz se remercient mutuellement pour leurs conversations et leurs relectures.

[35] L. Schwartz *Theorie des distributions*, Actualités scientifiques et industrielles 1122, Hermann, Paris, 1955.

[36] Alors que Schwartz s'appuie sur les travaux de Bochner sur l'intégrale de Fourier, par exemple.

support compact dans $\mathbf{R}^n$ [37] ; la définition d'un « support » dans $\mathbf{R}^n$ d'une telle fonctionnelle doit être explicitée :

> On dit qu'une distribution T est nulle dans un ensemble ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ si $T(\varphi) = 0$ toutes les fois que $\varphi \in D$ a son support contenu dans Ω. Deux distributions T_1, T_2 sont dites égales dans Ω si T_1-T_2 est nulle dans Ω. Cette définition permet de considérer les distributions, comme les mesures ou les fonctions, *d'un point de vue local* ; on pourra écrire des égalités entre distributions pour un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, sans préjuger en rien de ce qui se passe dans l'espace $\mathbf{R}^n$ entier. [Schwartz 1951 25]

Nos partitions de l'unité servent ensuite à établir le

> Principe du « recollement des morceaux ».- Théorème IV. Soit $\{\Omega_i\}$ une famille finie ou infinie d'ouverts, de réunion Ω ; soit d'autre part $\{T_i\}$ une famille de distributions dépendant du même ensemble d'indices I. La distribution T_i est définie dans l'ouvert Ω_i ; on suppose de plus que, si Ω_i et Ω_j ont une intersection non vide, T_i et T_j coïncident dans cette intersection. Alors il existe une distribution et une seule, T, définie dans Ω, qui coïncide avec T_i dans chaque ouvert Ω_i. [Schwartz 1951 26]

Au delà de ce principe fondamental, le couple local/global est l'un des fils rouges guidant l'exposé ; ainsi pour présenter le chapitre III Schwartz écrit-il : « Ce chapitre va d'une part étudier la convergence des distributions, d'autre part étudier leur structure locale et globale » [Schwartz 1951 65]. Il est ainsi établi que toute distribution est localement la dérivée de la distribution associée à une fonction continue (Théorème 21 [Schwartz 1951 83]) ; un exemple montre que ce n'est pas toujours le cas globalement. Plus loin, les partitions de l'unité permettent d'établir des théorèmes de passage du local au global, par exemple : « Si la division par H est possible localement, elle est possible globalement » (dans $\mathbf{R}^n$) [Schwartz 1951 124].

iv. Cohomologie à coefficients dans un faisceau : Leray.

On voit qu'on appauvrirait l'image en se limitant aux échanges entre Cartan et Leray. Au sein et autour de Bourbaki circulent et s'échangent des « principes », des types de formulation, des techniques (comme les partitions de l'unité) etc. dont on retrouve les variantes chez Ehresmann comme chez de Rham, chez Cartan comme chez Chevalley ou Schwartz. Pour ce

[37] Plus précisément, des formes linéaires sur *D* compatibles avec une certaine notion de convergence dans *D* : une suite de fonctions de *D* converge vers 0 si les supports sont contenus dans un compact fixe et si les fonctions ainsi que toutes leurs dérivées partielles de tous ordres convergent uniformément vers 0.

qui est de l'apport de Leray, nous ne soulignons que quelques points[38] appelés à s'intégrer à la présentation que Cartan donne dans son séminaire de 1950-1951. L'objectif annoncé par Leray dans les notes qu'il fait paraître aux C.R.A.S. en 1946 est d'utiliser les méthodes homologiques[39] pour passer, en reprenant les termes de Hopf, de la topologie de la forme à la topologie de la représentation ; autrement dit, sur le modèle de la suite exacte longue d'homotopie associé à un fibré, pour associer à une application continue $\pi : E \to E'$ des structures algébriques permettant, dans le cas particulier d'une fibration, de relier les groupes d'homologie de la fibre, la base et l'espace total. On peut dire de manière informelle que Leray reprend de Steenrod l'idée de l'homologie à coefficients locaux en utilisant comme systèmes de coefficients en un point y de E' les A-modules d'homologie de $\pi^{-1}(y)$ (A étant un anneau donné). La mise en place précise passe par l'introduction, en 1946, d'une notion plus générale que celle de système de coefficients locaux, celle de « faisceau » :

> Un *faisceau* de modules (ou d'anneaux) sera défini sur un espace topologique E par les données que voici : 1° à chaque ensemble fermé F de points de E est associé un module (ou un anneau) $\mathbf{B}_F$, qui est nul quand F est vide ; 2° à chaque couple d'ensembles fermés, f et F, de points de E, tels que $f \subset F$, est associé un homomorphisme de $\mathbf{B}_F$ dans $\mathbf{B}_f$, qui transforme un élément b_F de $\mathbf{B}_F$ en son *intersection* $b_F.f$ par f ; si $f' \subset f \subset F$ et si $b_F \in \mathbf{B}_F$, on doit avoir $(b_F.f).f' = b_F.f'$. [Leray 1946 1366]

Après avoir défini les faisceaux *normaux* – dans lesquels, en termes légèrement anachroniques, le module associé à un fermé F est limite inductive de ceux associé aux voisinages fermés de F [40] – il cite le cas qu'il vise :

> Exemple : les classes d'homologie à p dimensions des ensembles fermés de points d'un espace E constituent un faisceau que nous nommerons $p^{\text{ième}}$ *faisceau d'homologie* de E ; si E est normal, ce faisceau est normal. [Leray 1946 1366]

Leray introduit ensuite les chaînes à coefficients dans un faisceau **B**, là où il n'utilisait que des coefficients dans un anneau donné dans son cours de topologie algébrique (T.A.) professé en captivité [Leray 1945] :

> Nous nommerons formes de E les expressions du type $\Sigma_\alpha\, b_\alpha X^{q,\alpha}$; les $X^{q,\alpha}$ sont les éléments à q dimensions d'une couverture[41] de E ; b_α , au lieu d'être comme dans T.A.

---

[38] On trouvera une présentation bien plus complète dans [Houzel 1998].
[39] Leray écrit systématiquement « homologie » pour désigner la cohomologie, nous suivons ici son usage.
[40] Cf. [Houzel 1998 105]
[41] Sans entrer dans le détail des définitions, les $X^{q;\alpha}$ forment, pour q fixé, une base de la composante de degré q d'un module différentiel gradué ; $|X^{q;\alpha}|$ en est le support (fermé). Cf. [Leray 1945] pages 106 et 108.

un élément d'un module indépendant de α, sera un élément de $\mathbf{B}_{|X^{q;\alpha}|}$; [Leray 1946 1366]

L'existence d'un opérateur bord associé à la structure de couverture et de morphismes d'«intersection » reliant les modules associés par **B** aux différents supports permettent, comme chez Steenrod, de définir les modules de cohomologie de E à coefficients dans **B**. La notion classique de module d'homologie à coefficients dans un anneau A (donné) et celle d'homologie à coefficients dans un faisceau sont ensuite mêlées pour associer des modules d'homologie à une application π : si $\mathbf{B}^p(F)$, où F est un fermé de E, désigne le $p^{\text{ième}}$ A-module d'homologie de F, le (p,q)-ième A-module de cohomologie de π relatif à A sera le $q^{\text{ième}}$ module de cohomologie de E' relatif au faisceau associant à tout fermé F' de E' le A-module $\mathbf{B}^p(\pi^{-1}(F'))$. On devine que les développements à venir vont porter sur ce qui deviendra la suite spectrale.

C'est un autre point, toutefois, que nous voulons relever. Dans les actes d'un Colloque de topologie algébrique tenu à Paris en 1947, Leray publie en réalité un résumé des cours professés sur ce sujet au Collège de France en 1947-1948 ; un résumé remanié après des remarques de Cartan [Leray 1949]. Y apparaît la définition de l'homologie à partir de « couvertures fines », qui prendra la forme des résolutions fines dans le séminaire de Cartan. O désignant ici le produit tensoriel d'un complexe et d'un faisceau :

> Définition.- Etant donné un espace localement compact X et un faisceau différentiel **B** sur X, nous nommerons anneau d'homologie de X relatif à **B** et nous noterons **H**(XO**B**) l'anneau, défini à une isomorphie près, par **H**(**X**O**B**) où **X** désigne une couverture fine de X. [Leray 1949 77]

Après avoir défini le support S d'une application d'un complexe **K** dans lui-même, Leray avait défini ainsi la notion de complexe *fin*

> Nous dirons que **K** est *fin* quand, étant donné un recouvrement fini, ouvert de X, $\bigcup_\alpha V_\alpha = X$ (…) on peut trouver des applications λ_x de K en lui-même, telles que
>
> $$\lambda_\alpha(k-k') = \lambda_\alpha k - \lambda_\alpha k' \;;\; \sum_\alpha \lambda_\alpha k = k \;;\; S(\lambda_\alpha) \subset V_\alpha. \qquad \text{[Leray 1949 73]}$$

Leray empruntait ensuite à Cartan la construction d'Alexander-Spanier pour montrer l'existence de tels objets sur tout espace localement compact [Leray 1949 76]. C'est cette présentation que Cartan adapte pour définir, dans son séminaire de 1950-51, la cohomologie d'un espace à coefficients dans un faisceau.

2. Cohomologie des faisceaux et problèmes globaux (1950-1953).

Pour présenter le moment de jonction entre les problèmes globaux en théories des fonctions analytiques et les méthodes de cohomologie à coefficients locaux mises au point en topologie algébrique, nous utiliserons quatre textes ou groupes de textes : les exposés au séminaire de Cartan (années 1949-50, 50-51 et 51-52), la conférence de Cartan intitulée *Problèmes globaux en théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes* [Cartan 1950b], et la paire d'exposés au Colloque de Bruxelles (1953), celui de Cartan sur *Variétés analytiques complexes et cohomologie* [Cartan 1953] et celui de Serre sur *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein* [Serre 1953]. Pas plus que pour la période 1945-1950 notre objectif n'est ici la restitution d'une chronologie détaillée ; la réflexion de nos auteurs n'en est certes pas au même point en 1950 et 1953 [42], c'est toutefois comme un unique bloc cohérent que nous présentons définitions, théorèmes et listes de problèmes car c'est la structuration de cet ensemble comme bloc qui nous semble pertinente comme point d'arrivée de notre récit historique sur le long terme.

i. Faisceaux et fibrés.

Comme pour les fibrés chez Ehresmann deux types de présentation de la structure sont possibles, l'un étant choisi comme définition (ou description axiomatique, adaptée à la formulation des définitions générales, en particulier des morphismes), l'autre comme mode de construction. Pour le premier type de présentation, Cartan choisit de suivre un exposé de M. Lazard :

> Définition : Soit K un anneau commutatif à élément unité (…). Un faisceau de K-modules sur un espace topologique (régulier) **X** est un ensemble F, muni d'une application p (dite « projection ») de F sur **X** et des 2 structures suivantes :
>
> 1) pour chaque point $x \in \mathbf{X}$, l'image réciproque $p^{-1}(x) = F_x$ est munie d'une structure de K-module ;
> 2) F est muni d'une structure topologique (en général non séparée) satisfaisant aux deux conditions : (α) les lois de compositions de F (non partout définies) définies par les

[42] On dispose d'un aperçu du travail effectué entre 1950 et 1953 dans la série de lettres de Serre à Cartan récemment publiée sous le titre *Les petits Cousins* [Serre 1991]. Par ailleurs, dans un exposé sur *Le rôle des séminaires Cartan* (Journée Henri Cartan, E.N.S. 28 Juin 2004), J.-P. Serre rapporte la surprise de Cartan de voir le cadre de la cohomologie des faisceaux s'adapter si bien (avec les théorèmes A et B) aux problèmes globaux en théories des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes.

structures de K-module des F_x sont continues ; (β) la projection p est un homéomorphisme local (i.e. tout élément de F possède un voisinage ouvert que p applique biunivoquement et bicontinûment sur un ouvert de **X**). [Cartan 1950-51a 1]

Cette présentation s'inspire de celle des espaces fibrés[43], auxquels était consacré le séminaire l'année précédente : à l'espace total d'un fibré correspond ici l'espace « étalé » [44], les F_x pouvant toujours s'appeler des « fibres » ; la condition 2β nous écarte toutefois des fibrés généraux. Le parallélismes de formulations ne doit pas induire en erreur : si par exemple l'on part d'un fibré, le faisceau *associé* a pour fibre l'ensemble des germes de sections, un objet bien plus complexe donc. Hors cas d'un revêtement, pour la topologie du fibré de départ la projection n'est pas un homéomorphisme local : le fait qu'elle l'est depuis l'espace étalé ne traduit que le souhait de garantir qu'une section *continue* du faisceau (un choix, donc, en chaque point, d'un germe de section du fibré) corresponde bien localement à une section continue du fibré[45], ou encore, reflète le fait que l'égalité des germes traduit l'égalité des sections du fibrés initiales *au voisinage* du point et non seulement leur égalité *en* ce point. On voit qu'on a finalement posé comme axiomes pour les faisceaux des propriétés observées dans des situations usuelles, par exemple lorsqu'on considère les germes de section d'un fibré. Le changement de point de vue consistant, quand on part d'un fibré, à considérer les germes de sections, permet de définir une structure beaucoup plus large : dans le cas général la structure n'est pas localement triviale, et les éléments de F_x n'ont pas à être des germes de fonctions entre ensembles. La généralité de ce cadre permet d'utiliser des raisonnements et des images inspirés du cas des fibrés dans des situations beaucoup plus complexes : premièrement, on réintroduit la *singularité* (par exemple dans le faisceau structural d'une sous-variété analytique quelconque d'un espace analytique) ; deuxièmement, la considération de faisceaux *quotients* permet de considérer des fibres qui ne sont pas formées de germes de fonctions mais, par exemple, de classes de germes de fonctions modulo un sous-module de germes de fonctions : le cadre est donc adapté à la formulation des problèmes de recollement – de prolongement des sections – dans le cas de la coïncidence « à quelque chose près », comme dans les deux problèmes de Cousin[46].

[43] Nous entendons « fibré » au sens donné à ce terme par Ehresmann dans ses notes des années 1941-1943.
[44] Dans la terminologie de [Godement 1958].
[45] Ou, pour le dire autrement et dans un cadre plus général, pour que la fibre F_x s'identifie à la limite inductive des modules de sections au voisinage de x. Voir plus bas.
[46] Pour que Cousin II rentre dans ce cadre, il faut aussi des faisceaux de groupes.

A la présentation précédente, décalque subtil de la notion de fibré, est naturellement associée la notion de section continue[47] ; Cartan note ici $\Gamma(F,X)$ le K-module des sections du faisceau F au-dessus de l'ouvert X de l'espace **X**. On voit que l'arrière plan fonctionnel conduit Cartan à s'écarter de la définition des faisceaux *à la* Leray, en choisissant de travailler sur les ouverts et non les fermés. Le cadre ensembliste de la formulation en termes d'espace étalé permet de définir les morphismes de restriction $\Gamma(F,Y) \to \Gamma(F,X)$ (lorsque $X \subset Y$) au moyen de la notion ensembliste de restriction. Cette notion de section fournit la passerelle naturelle vers l'autre mode de présentation des faisceaux, analogue à la « méthode de construction d'un espace fibré » de Ehresmann [Ehresmann 1941] :

> Soit F un faisceau sur l'espace **X**. Pour chaque point x de **X**, le module F_x s'identifie évidemment à la limite inductive (« direct limit ») des modules $\Gamma(F,X)$ relatifs aux ouverts X contenant x, munis des homomorphismes $\Gamma(F,Y) \to \Gamma(F,X)$. (…)
>
> Réciproquement : supposons que l'on ait attaché, à chaque ouvert X d'un système fondamental de l'espace **X**, un module F_X, et, à chaque couple (X,Y) d'ouverts tels que $Y \supset X$ et que F_Y et F_X soient définis un homomorphisme f_{XY} dans F_Y dans F_X, et cela de manière que, si $X \subset Y \subset Z$ l'homomorphisme f_{XZ} soit le composé $f_{XY}f_{YZ}$. Ces données définissent un faisceau F comme suit : pour chaque point $x \in$ **X**, on considère le module F_x, limite inductive des F_X relatifs aux ouverts X contenant x ; sur la réunion F des F_x, on définit une structure de faisceau, d'abord en définissant l'application p qui, à un élément u de F, associe le point x tel que $u \in F_x$, puis en prenant comme système d'ouverts V(X,v) de la topologie de F les ensembles suivants : on prend arbitrairement un ouvert $X \subset$ **X** tel que F_X soit défini, un élément $v \in F_X$, et l'ensemble V(X,v) des images de v dans tous les modules F_x relatifs aux points $x \in X$. [Cartan 1950-51a 3]

Quelques années plus tard, la distinction entre préfaisceau et faisceau vient expliciter une articulation entre local et global qui reste ici un peu cachée : le passage au faisceau à partir des données dans les ouverts a un effet non trivial de localisation. La distinction entre préfaisceau (les données dans les ouverts) et faisceaux vient préciser la notion de « données locales », i.e. vérifiant les axiomes (ici repris de Godement) : un préfaisceau[48] *F* d'ensembles sur un espace topologique X est un faisceau si sont vérifiés les axiomes d'unicité et d'existence

[47] Nous omettrons dans la suite le terme « continu ».
[48] On trouve cette notion dans [Grothendieck 1957 153].

> (F1) : Soient $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles ouverts dans X, U la réunion des U_i, et *s'*, *s''* deux éléments de *F*(U) ; si les restrictions de *s'* et *s''* à chaque U_i sont égales, on a *s'* = *s''*.
>
> (F2) : Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles ouverts dans X, de réunion U, et supposons donnés des $s_i \in F(U_i)$ de telle sorte que, quels que soient $i,j \in I$, les restrictions de s_i et s_j à $U_i \cap U_j$ soient égales ; alors il existe un $s \in F(U)$ dont la restriction à U_i est s_i pour tout $i \in I$. [Godement 1958 109]

Il s'en faut de beaucoup que le simple fait d'être donné à l'aide d'une base d'ouverts fasse de tout préfaisceau un objet « local », le passage au faisceau engendré est non trivial dans des cas fondamentaux, par exemple celui de l'image d'un morphisme de faisceaux. Avant d'aborder cette famille de problèmes, terminons sur la notion de faisceau telle qu'elle est proposée par Cartan en 1950 (par Serre en 1955 encore, dans *Faisceaux algébriques cohérents* [Serre 1955]). Cartan donne deux exemples de faisceaux : le faisceau produit (« on notera l'analogie avec la notion de fibré trivial » [Cartan 1950-51a 3]) et le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur une variété analytique complexe. Dans ce dernier cas, Cartan fait remarquer que contrairement au cas général, « la topologie du faisceau F est séparée (principe du prolongement analytique) » [Cartan 1950-51a 3] ; la relecture de cette notion fondamentale est ici amusante : c'est en effet le principe du prolongement analytique qui garantit que deux points distincts de l'espace étalé (qu'on peut supposer au-dessus du même point, sans quoi le cas est trivial du fait de l'homéomorphisme local avec la base) admettent des voisinages disjoints ; ces points distincts correspondent à deux germes distincts de fonctions analytiques en un même point, leurs prolongements analytiques maximaux (leur composante connexe dans l'espace étalé) donnent des voisinages disjoints… on retrouve la lecture topologique que Weyl proposait en 1913 des configurations analytiques de Weierstrass[49].

Les liens avec la notion de fibré ne se limitent pas à des analogies et des modèles de présentations axiomatiques. On trouve un exemple d'une autre nature dans la conférence de Cartan de 1950 au Congrès International des Mathématiciens. Après avoir rappelé le deuxième problème de Cousin, Cartan souligne qu'il ne s'agit pas uniquement d'un problème d'*idéaux* de fonctions analytiques :

> Supposons que *B* soit un domaine d'holomorphie ; alors, d'après les résultats généraux de la théorie des idéaux, il existe dans *B* un idéal fermé *I*, et un seul, qui engendre I_z

> en chaque point z de B. Mais le « problème de Cousin » consiste à chercher une *fonction unique*, holomorphe dans B, et qui, en chaque point z, engendre l'idéal I_z (c'est-à-dire qui s'annule sur chaque variété avec l'ordre de multiplicité voulu, et pas ailleurs). [Cartan 1950b 160]

Le fait que B est un domaine d'holomorphie n'épuise pas cette question, la nature topologique de B intervient de manière essentielle ; Cartan le fait sentir en proposant une reformulation originale :

> Une donnée de Cousin dans B définit un nouvel espace topologique E que voici : un point de E sera, par définition, un couple (z,f) formé d'un point z de B et d'un élément générateur f de l'idéal principal I_z attaché au point z ; on identifiera les couples (z,f) et (z',f') si $z = z'$ et si le quotient f/f' (qui est holomorphe et $\neq 0$ au point z) est *égal à un* au point z. Faisons opérer, dans cet espace E, le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$ des nombres complexes $\neq 0$. (…) Dans le langage de la topologie moderne, E est un *espace fibré principal*, de groupe $\mathbf{C}^*$, ayant B pour base. L'hypothèse selon laquelle les idéaux I_z forment un système cohérent exprime que chaque fibre possède un voisinage isomorphe au produit U×$\mathbf{C}^*$ d'un ensemble ouvert U de B par la fibre $\mathbf{C}^*$; ceci permet de définir, sur E, une structure de variété analytique-complexe.
>
> (…) On voit aussitôt qu'une solution du problème de Cousin définit une *section analytique* de cet espace fibré. (…) Ainsi, pour que le problème de Cousin ait une solution (…) notre espace fibré E doit être *trivial* ; [Cartan 1950b 161]

Cartan attribue cette reformulation en termes de fibré à André Weil (1906-1998). Le résultat d'Oka de 1939 peut être reformulé en disant que s'il existe une section continue alors il existe une section analytique. Dans le cas des fibrés vectoriels, on trouve déjà un exposé de synthèse des différents points de vue en 1956 dans les *Nouvelles méthodes topologiques en géométrie algébrique* de F. Hirzebruch [Hirzebruch 1956].

ii. Une forme de problème.

L'un des apports de la période 1945-1950 à la réflexion sur les problèmes de Cousin réside dans l'introduction des *morphismes* : ni Cartan en 1944 ni Oka en 1950 ne posaient les problèmes en termes de morphismes entre les objets dont ils venaient de définir la structure ; du côté de la topologie par contre, on assistait *parfois* à un travail explicite sur la notion de

[49] Il était alors questions du cas plus complexe – bien qu'à une seule variable – où l'on incluait les points de

bon morphisme – par exemple en remplaçant les homéomorphismes de 3-variétés par les homéomorphismes de 3-variété fibrées chez Seifert et Threlfall –, *toujours* on associait aux morphismes topologiques des morphismes entre structures algébriques associées (« fonctorisation »). Ainsi voit-on dans l'exposé de Cartan sur les *Faisceaux sur un espace topologique* la définition d'un homomorphisme de faisceau, celle de son noyau et de son image : « Ceci définit Γ(X,F) comme foncteur du faisceau X » [Cartan 1950-51a 5], sans d'ailleurs que les catégories de départ ou d'arrivée soient explicitées.

Cette présentation par les morphismes et le foncteur des sections permet de formuler le problème fondamental de la théorie. Des listes « problèmes fondamentaux », les travaux sur les problèmes de Cousin nous en ont proposées de multiples ; les liens entre les différents problèmes étaient analysés, des réseaux d'interdépendance étaient mis au jour. L'expérience de la topologie algébrique, avec ses théories cohomologiques et ses suites exactes courtes ou longues, permet de formuler *un* problème fondamental[50] :

> Suite exacte de faisceaux et d'homomorphismes : on a la notion de suite exacte, puisqu'on a celle de noyau et d'image d'un homomorphisme de faisceaux. On considérera notamment les suites exactes de la forme $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$; pour de telles suites, F' s'identifie à un sous-faisceau de F, et F'' au faisceau-quotient de F par ce sous-faisceau. Etant donné une telle suite exacte, la suite des homomorphismes associés
>
> $$0 \to \Gamma(F',X) \to \Gamma(F,X) \to \Gamma(F'',X)$$
>
> est exacte (trivial à partir des définitions). Mais, en général, l'homomorphisme $\Gamma(F,X) \to \Gamma(F'',X)$ n'est pas sur. [Cartan 1950-51a 5]

La non exactitude à droite du foncteur des sections devient la forme fondamentale de question et la forme technique que prend le problème de passage du local au global : l'exactitude d'une suite de faisceaux est une propriété locale, l'exactitude du foncteur des sections est une question globale[51]. Dans les conférences dans lesquelles Cartan et Serre présentent les premiers résultats de leur théorie des faisceaux, le moment de reformulation dans ces termes d'un problème plus classique est un passage obligé ; donnons-en trois exemples. Le fait, sur une variété différentiable, que toute forme différentielle de dérivée extérieure nulle est localement une dérivée extérieure se résume en disant que la suite de faisceaux $0 \to Z^p \to \Omega^p$

ramification.

[50] Du côté des faisceaux analytiques on a aussi une deuxième famille de problèmes fondamentaux, ceux de cohérence (du faisceau structural, de l'image et d'un noyau de morphisme entre faisceaux cohérents, de l'idéal de définition d'une sous-variété analytique singulière).

[51] Au sens de Osgood : le domaine sur lequel on cherche les sections est fixé au départ.

$\rightarrow Z^{p+1} \rightarrow 0$ est exacte (Ω^p le faisceau des germes de *p*-formes différentielles, Z^p celui des germes de *p* formes fermées, la flèche $\Omega^p \rightarrow Z^{p+1}$ étant la dérivation extérieure) [Serre 1953 58]. On trouve, sur le même modèle, la reformulation d'une situation encore plus classique ; on sort ici des faisceaux analytiques cohérents pour examiner les liens avec des faisceaux de groupes : sur une variété analytique, **O** désignant toujours le faisceau structural (on considère ici le groupe additif sous-jacent) et **F** le faisceau des germes de fonctions holomorphes inversibles (vu comme groupe multiplicatif),

> (…) soit ϑ l'application qui à toute fonction holomorphe φ fait correspondre $e^{2i\pi\varphi}$; ϑ définit un morphisme du faisceau **O** *sur* le faisceau **F** (car toute fonction holomorphe non nulle a *localement* un logarithme), et le noyau de ϑ est évidemment le faisceau constant **Z** des entiers. [Serre 1953 60]

Terminons sur l'exemple du premier problème de Cousin, reformulé ainsi par Cartan : après avoir défini, sur une variété analytique complexe, le faisceau **O** des germes de fonctions holomorphes et le faisceau **M** des germes de fonctions méromorphes, Cartan explique :

> Il est clair que **O** est un sous-faisceau de **M**. Interprétons le faisceau-quotient **M/O** : si $m \in$ **M**, la classe de *m* dans $\mathbf{M}_x/\mathbf{O}_x$ s'appelle la *partie principale* de *m*. Une section de **M/O** s'appelle un *système de parties principales*. Considérons l'homomorphisme φ : $\Gamma(X,\mathbf{M}) \rightarrow \Gamma(X, \mathbf{M/O})$; à chaque fonction méromorphe dans X, associe un système principal. Le classique *problème additif de Cousin* consiste à caractériser, parmi les systèmes de parties principales dans X, ceux qui proviennent d'une fonction méromorphe dans X ; autrement dit, à caractériser l'image de l'homomorphisme φ. Dire que le problème de Cousin est toujours résoluble, c'est dire que φ est un épimorphisme. [Cartan 1953 47]

Nos auteurs n'ont pas besoin, en 1953, de formuler les problèmes globaux associés à ces suites exactes courtes de faisceaux : sur une variété différentiable, toute forme différentielle fermée n'est pas, en général, exacte ; sur une variété analytique, toute fonction holomorphe non nulle n'est pas, en général, l'exponentielle d'une fonction holomorphe, et le lien entre problèmes additifs et multiplicatifs n'est pas globalement transparent ; le premier problème de Cousin n'est peut-être pas toujours résoluble. A cette forme générale de problème formulée comme un unique problème général, répond une méthode générale.

iii. L'outil cohomologique.

En 1950, la stratégie générale d'attaque de cette forme de problème est bien entendu la cohomologie. Cartan commence par illustrer le rôle des faisceaux fins, ainsi définis :

> Définition : un faisceau de K-module (éventuellement, de K-modules gradués) est fin si, pour tout recouvrement localement fini de l'espace **X** par des ouverts $\mathbf{U}^i$, il existe des endomorphismes l^i du faisceau (cf. Exp.14 numéro 3) tels que :
>
> 1° pour chaque i, l'endomorphisme l^i soit nul en dehors d'un fermé contenu dans $\mathbf{U}^i$;
>
> 2° la somme $\sum_i l^i$ soit l'identité. [Cartan 1950-51b 1]

Après avoir donné quelques exemples importants, dont celui du faisceau des formes différentielles de degré donné sur une variété différentiable (où l'on retrouve les partitions de l'unité), Cartan énonce les propriétés fondamentales : premièrement, si le noyau d'un morphisme surjectif de faisceaux $F \to G$ est fin, alors le l'homomorphisme $\Gamma_\Phi(F) \to \Gamma_\Phi(G)$ est surjectif [Cartan 1950-51b 4] [52]; la démonstration est le dernier avatar de la lignée des problèmes de recollement des morceaux (dans lequel on doit, ici, aller jusqu'aux intersections trois par trois : $U_i \cap U_j \cap U_k$). Deuxièmement, le faisceau K (où K est l'anneau de base) possède une résolution fine $0 \to K \to C^0 \to C^1 \to \dots$; la somme C des C^i définit un faisceau différentiel gradué, la cohomologie de l'espace **X** à valeur dans un quelconque faisceau F est alors définie au moyen des modules de cohomologie du complexe des sections du produit tensoriel $F \bigcirc C$: $H_\Phi{}^q(\mathbf{X},F) = H^q(\Gamma_\Phi(C \bigcirc F))$. En un sens, nous aurions pu ne pas nous attarder sur les questions de partition de l'unité et de faisceau fin : ces derniers sont assez vite appelés à disparaître au profit d'une mise en place de la cohomologie par le procédé de Čech, puis par les résolutions injectives, flasques etc. Dans le développement de la cohomologie des faisceaux, les faisceaux fins sont un outil *provisoirement fondamental* ! Leur importance est toutefois double : importance historique, comme trace des circulations conceptuelles dans la période 1945-1950 ; importance épistémologique : l'existence ou non de partitions de l'unité est l'un des moyens de comprendre ce qui différencie fondamentalement la situation C^∞ des situations analytiques ou algébriques ; l'existence d'un analogue des partitions de l'unité permet d'établir la trivialité cohomologique des faisceaux algébriques cohérents sur une variété affine [Serre 1955 236 et suiv.] etc.

---

[52] Cartan utilise ici le foncteur des sections à support dans une famille Φ, l'espace X étant supposé paracompact. Pour les familles Φ, cf. [Cartan 1950-51b 3].

Les éléments sont en place pour formuler la solution cohomologique au problème de non-exactitude à droite du foncteur des sections. Soucieux de l'indépendance du résultat envers le procédé de construction, Cartan formule la « théorie axiomatique » de la cohomologie des faisceaux. Dans le séminaire de 1950-1951 le cadre est, rappelons le, celui des faisceaux de K-modules (K anneau fixé, supposé provisoirement principal) et des sections dans une famille Φ sur un espace paracompact **X** :

<u>Axiomes d'une théorie de la cohomologie</u> : (…) On suppose que l'on s'est donné

I. Pour tout faisceau F de K-modules (sur l'espace **X**), et pour tout entier q, un K-module $H^q_\Phi(\mathbf{X},F)$, appelé le q-ième module de cohomologie de l'espace **X**, relativement à la famille Φ et aux faisceau de coefficients F (…)

II. Pour tout homomorphisme de faisceau $F \to F'$, et pour tout entier q, un homomorphisme $H^q_\Phi(\mathbf{X},F) \to H^q_\Phi(\mathbf{X},F')$.

III. Pour toute suite exacte de faisceaux et d'homomorphismes $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$, et pour tout entier q, un homomorphisme $H^q_\Phi(\mathbf{X},F'') \to H^{q+1}_\Phi(\mathbf{X},F')$.

Relativement aux données précédentes, on suppose vérifiés les 6 axiomes suivants :

(a) $H^q_\Phi(\mathbf{X},F) = 0$ pour $q < 0$, $H^0_\Phi(\mathbf{X},F) = \Gamma_\Phi(F)$;

(b) Si F est <u>fin</u>, $H^q_\Phi(\mathbf{X},F) = 0$ pour tout q ;

(c) Pour toute suite exacte $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$, la suite

$$\ldots H^q_\Phi(\mathbf{X},F') \xrightarrow{\beta_q} H^q_\Phi(\mathbf{X},F) \xrightarrow{\gamma_q} H^q_\Phi(\mathbf{X},F'') \xrightarrow{\delta_q} H^{q+1}_\Phi(\mathbf{X},F') \to \ldots$$

(où β_q et γ_q sont les homomorphismes définis en II, et δ_q est l'homomorphisme défini en III) est une <u>suite exacte</u> ; [Cartan 1950-51c 1]

Les trois axiomes suivants demandent le caractère fonctoriel de H_Φ^q (i.e. H_Φ^q commute à la composition de morphismes et transforme l'identité en l'identité) et la compatibilité de δ aux morphismes de suite exacte courtes. Cartan établit l'unicité (à « isomorphismes près ») d'une telle théorie cohomologique, avant d'établir l'existence d'une telle théorie grâce, ici, aux résolutions fines. On ne comprendrait pas cette présentation si on ne mentionnait que dans le même séminaire, Samuel Eilenberg (1913-1998) propose, exactement sur le même modèle, une théorie de l'homologie des groupes. Le cas « trivial » représenté, côté faisceaux, par les faisceaux fins, est représenté côté groupes par les groupes libres [Eilenberg 1950-51].

Encore faut-il savoir en déterminer quelques-uns parmi tous les groupes entretenant tant de belles relations ! Dans le cas des variétés analytiques, le séminaire Cartan de l'année suivante (1951/52) y est consacré et ce sont ces résultats que Cartan et Serre présentent à leurs collègues en 1953. L'exposé 18, fait par Cartan, est fondamental. Consacré aux faisceaux analytiques sur les variétés de Stein (généralisant les domaines d'holomorphie), Cartan y énonce les principaux résultats de cohérence – en particulier du noyau de l'image d'un morphisme entre faisceaux cohérents –, pour une définition de la cohérence légèrement différente de celle des années 1940 (il s'agit maintenant de faisceaux localement de présentation libre finie). Viennent ensuite les théorèmes d'engendrement par les sections globales et de trivialité cohomologique :

> Théorème A : Soit X une variété de Stein, ou un compact d'une variété de Stein identique à son enveloppe. Soit F un faisceau analytique cohérent sur X. Alors, pour tout point $x \in X$, l'image, dans le $\mathbf{O}_x$-module I_x, du module des sections $H^0(X,I)$, engendre I_x pour sa structure de module sur $\mathbf{O}_x$. [Cartan 1951-52 7]

On retrouve dans la remarque qui suit ce théorème l'analogue d'une note infrapaginale de 1940, qui prenait alors acte de la reformulation du problème en termes d'idéaux de fonctions plutôt qu'en termes de fonctions :

> Commentaire : il n'est pas question, bien entendu, de vouloir prolonger au-dessus de tout X n'importe quelle section de I donnée seulement au voisinage de x. Mais le théorème affirme que toute section de I, au-dessus d'un voisinage de x, si petit soit-il, est combinaison linéaire (à coefficients holomorphes au point x) de sections prolongeables au-dessus de X tout entier. [Cartan 1951-52 7]

Puis :

> Théorème B. Soit X une variété de Stein, ou un compact d'une variété de Stein identique à son enveloppe. Soit F un faisceau analytique cohérent sur X. Alors les modules de cohomologie $H^q(X,F)$ sont nuls pour tout entier $q \geq 1$. [Cartan 1951-52 7]

C'est Serre qui en 1953 est chargé d'exposé l'utilisation de ces résultats, exhibant la puissance des « tanks » cohomologiques français. Prenons deux des trois exemples cités plus haut. Le cas des formes différentielles conduisait, sur une variété différentiable ou holomorphe, à la suite exacte de faisceaux $0 \to Z^p \to \Omega^p \to Z^{p+1} \to 0$; les faisceaux Ω^p étant cohérent et Z^0 s'identifiant au faisceau constant $\mathbf{C}$, le théorème B et la suite exacte de cohomologie permettent de démontrer l'analogue holomorphe du théorème de Rham (C^p et B^p désignant les espaces de p-formes différentielles fermées et exactes (resp.) définies sur tout l'espace X):

> Théorème I. Si X est une variété de Stein, le groupe $C^p(X)/B^p(X)$ est isomorphe à $H^p(X,\mathbf{C})$, le $p^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de X à coefficient dans le corps des nombres complexes. [Serre 1953 57]

Quant au second problème de Cousin, sa structure profonde est décrite en juxtaposant deux suites exactes courtes de faisceaux[53] : la suite exacte de groupes $0 \to (\mathbf{Z},+) \to (\mathbf{O},+) \to (\mathbf{F},\times) \to 0$ traduisant l'existence[54] locale du logarithme complexe et $0 \to (\mathbf{F},\times) \to (\mathbf{G},\times) \to (\mathbf{G/F},\times) \to 0$, où **G/F** est le faisceau des germes de diviseurs[55]. L'utilisation des deux suites exactes longues permet de considérer la flèche composée $h : H^0(X,\mathbf{G/F}) \to H^1(X,\mathbf{F}) \to H^2(X,\mathbf{Z})$ qui associe à un diviseur une classe de cohomologie dans $H^2(X,\mathbf{Z})$; on retrouve dans un autre cadre une association bien naturelle : il ne s'agit finalement que d'un changement de point de vue sur le même objet, le diviseur étant ici considéré comme une section globale de **G/F**, là comme le dual du 2-cycle associé à son support (compté avec multiplicité). Si l'on travaille sur une variété de Stein on a $H^1(\mathbf{O}) = 0$, et le langage des suites exactes longues permet de restituer la nature topologique du deuxième problème de Cousin sous la forme :

> Théorème 2. Si X est une variété analytique complexe telle $H^1(X,\mathbf{O}) = 0$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un diviseur D de X soit le diviseur d'une fonction holomorphe sur X est que la classe de cohomologie $h(D) \in H^2(X,\mathbf{Z})$ définie par D soit nulle. [Serre 1953 61]

Ces problèmes sont repris de la liste des *Problèmes globaux en théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes* proposée par Cartan en 1950, en particulier de ceux classés dans le thème « relation avec la topologie » [Cartan 1950b 159 et suiv.].

Il semble un peu ridicule d'essayer de récapituler le liens entre cet ensemble de développements théoriques et le couple local/global : on pense mieux le local lorsqu'on dispose des concepts de germe de section, de cohérence, de faisceau associé à un préfaisceau ; on saisit bien les problèmes de passage du local au global en termes d'exactitude à droite du foncteur des sections. Quant aux problèmes de « recollement des morceaux », ils forment la trame de la construction cohomologique, on le voit le plus clairement dans le présentation *à la* Čech ; la notion faisceau quotient permet de formuler avec précision le problème de recollement d'objets donnés localement « à quelque chose près » etc.

[53] Rappelons les notations introduites plus haut : **F** est le faisceau des germes de fonctions holomorphes inversibles, **G** celui des germes de fonctions méromorphes.
[54] Ou l'univocité, si l'on préfère le 19e siècle.
[55] Où l'opération est usuellement notée positivement.

Cette imbrication à tous les niveaux va de pair avec la stabilité de la description *méta* en termes de local/global [56] ; d'emblée mise en avant par Cartan (dès les années 1940) puis Serre, elle est reprise, par exemple, lorsque Chern expose les méthodes françaises en 1954:

> *Sheaves* (faisceaux). *The cohomology groups of a manifold with a coefficient sheaf furnish the algebraic tool to formulate globally the properties of the local structure*. [Chern 1956 106]

Dans sa concision, cette phrase de Chern enferme beaucoup d'éléments, par exemple la nature mixte de la formulation – mêlant langages de l'algèbre et de la topologie – de problèmes dont la nature peut n'être pas entièrement topologique, ainsi dans les cas des variétés analytiques ou algébriques. Parallèlement à la structure de faisceau, le langage des faisceaux permet de décrire des structurations doubles ; quelle que soit la nature des objets (fonctions holomorphes ou simplement C^{∞} etc.), le problème est formulé dans deux directions articulées l'une à l'autre : ces objets forment des ensembles algébriquement structurés (d'où des questions de morphismes, d'objet quotient), et « vivent » quelque part (d'où des aspects de restriction et prolongement). La mise en perspective historique éclaire ici les remarques épistémologiques : la topologie algébrique classique étudiait les aspects *topologiques* – fût-ce pour étudier les aspects topologiques sous-jacents à un problème d'Analyse –, et les saisissait d'emblée au niveau *global* ; de 1900 à 1950, on parle plus volontiers de question d'*Analysis situs* que de question globale, et l'on n'a guère de raison de distinguer. Héritière de la cohomologie à coefficients locaux, la cohomologie des faisceaux autorise des systèmes de coefficients relevant *d'autres structures* et met l'accent sur le *passage* du local au global.

[56] Illustrons cette stabilité d'un exemple. Vingt-cinq ans après Chern, lorsqu'on doit introduire le sujet en une phrase : « (…) *sheaf theory is a part of geometry ; namely, that part concerned with the passage from local properties to global properties*. » [Gray 1979 1].

Conclusion générale.

Les travaux d'histoire n'appellent pas toujours de conclusion, ce qui n'est pas nécessairement le signe d'un défaut de problématisation : notre longue introduction générale, espérons-le, l'illustre. Il n'est pas non plus question de proposer ici un résumé : nous avons choisi d'utiliser systématiquement des titres (de chapitre, de paragraphe etc.) reflétant le contenu, de sorte que le sommaire résume le propos tout en soulignant les articulations. En somme, les trois premières parties cherchent à rendre compte de l'affirmation : l'émergence du couple local/global résulte, dans les premières années du 20e siècle, de la rencontre entre des traditions d'Analyse globale et des modes d'écriture de l'Analyse mis en œuvre par la seconde génération post-weierstrassienne ; l'émergence explicite (partie 3) comme conjonction d'occasions d'émergence (partie 1) et de conditions de possibilité d'émergence (partie 2). Les deux dernières parties s'attachent à décrire comment un couple concernant, *en droit,* « *more or less all mathematics* », en arrive à les concerner *en fait*.

Plutôt qu'un résumé, quelques réflexions rétrospectives sur le type d'histoire que nous avons pratiqué.

Nous n'avons fait l'histoire ni d'une notion, ni d'une théorie. Ainsi, si à de nombreuses reprises nous avons croisé l'histoire de la topologie (au sens d'*Analysis situs*), nous n'avons pas insisté, dans le cas de Poincaré, sur son *Analysis situs* de 1895 [Poincaré 1895] ; du point de vue d'une histoire de la topologie, notre examen de la période 1930-1950 passe à côté de points essentiels : groupes π_n , naissance de la co-homologie, introduction des structures algébriques etc. De même, si nous avons travaillé sur la notion de voisinage et sur la topologie ensembliste chez Weierstrass, l'histoire de la topologie ensembliste n'est pas plus notre objet que celle de la théorie des ensembles. Peut-être les notions de « fonction » et de « variété » sont celles que nous avons approfondies le plus régulièrement, mais on voit qu'aucune des deux ne pouvait, à elle seule, structurer l'exposé : c'est sur leur co-évolution que nous avons travaillé. Les configurations furent multiples : des fonctions qui deviennent des domaines (surface de Riemann d'une fonction algébrique ou configuration géométrique *à la* Weierstrass) ; des grandeurs variables vues, depuis un monde ensembliste qui distingue progressivement ensemble et application, comme des fonctions-domaines ; des domaines qui imposent leurs lois aux fonctions qui « y vivent » ; des énoncés d'Analyse « rigoureux » qui ne peuvent plus parler des fonctions sans systématiquement inclure un référent de lieu ; des problèmes de covariance – issus de travaux implicitement locaux – qui définissent ici des types de lieu (variété différentiable, analytique, métrique, fibré tangent etc.), là des types de « fonctions » (fonctions ou différentielles méromorphes, champ de tenseurs etc.).

Ni histoire d'une théorie, ni histoire d'une notion, mais peut-être : une histoire de la façon dont les problèmes *se posent*. Même lorsque notre unité de description semblait être l'*auteur* – qu'on pense à Riemann ou à Poincaré – notre travail n'a pas emprunté les voies de la biographie intellectuelle. Nous nous sommes moins intéressé au *pourquoi* qu'au *avec quoi*, moins aux motivations qu'aux techniques qui circulent et aux modes de formulation qui s'imposent. Cela nous a conduit à présenter une assez vaste collection de techniques de preuve, en nous centrant sur les *pratiques du lieu* : exclure des points singuliers, franchir une coupure, déplier une surface découpée, passer à un revêtement, passer à l'échelle infinitésimale, recouvrir par des ouverts en contrôlant la nature et le degré d'empiètement, fusionner deux zones, « compactifier » en ajoutant le « bord » etc. Nous n'avons pas toujours craint d'entrer dans les détails, en particulier dans le cas des *séries longues* fournies par les démonstrations des principaux théorèmes de la théorie des fonctions algébriques d'une variable complexe, de Riemann à Weyl. A côté des techniques, des cadres épistémologiques guident le travail de la preuve, ce que nous avons en particulier saisi en présentant des organisations *concurrentes* à celle construite autour du couple local/global. Ainsi infinitésimal/fini : si l'objectif est le dépassement de l'infinitésimal, on aura plutôt recours au calcul intégral, le résultat risque de demeurer implicitement local, la question du dépassement du local prendra la forme d'une étude du *Gesamtverlauf*, une saisie d'abord narrative en termes de parcours de chemins et de franchissement de coupures pourra déboucher sur une formulation en termes de groupe de symétries. Ainsi lorsqu'on utilise la clé des *singularités* plutôt que des *domaines* pour comprendre un univers fonctionnel, on emprunte des voies qui induisent d'autres modes d'attention au lieu : seuls les points singuliers mériteront une étude locale (parfois en deçà de la distinction entre l'infinitésimal et le local), les aspects globaux seront saisis sous l'angle des systèmes de singularités ; par sa compatibilité avec le point de vue universellement local – tel que nous l'avons caractérisé –, l'entrée par les singularités pourra être porteuse d'une forme particulière de « manque à voir », ainsi chez Fuchs. Troisième élément, après les pratiques du lieu et les structures épistémologiques concurrentes, les modes de référence au lieu sont aussi des éléments qui, largement, s'imposent au mathématicien. Selon l'époque et le contexte de recherche dans lequel on s'inscrit, on dispose ou non d'énoncés modèles de la forme « la fonction est [*propriété*] sur [*domaine*] », on voit

dans le complément de lieu un complément obligatoire ou facultatif, on dispose de termes plus ou moins précis pour désigner le domaine.
Une histoire de la manière dont les problèmes *se posent* donc ; sans doute, aussi, une histoire de la manière dont les mathématiciens *posent* les problèmes. Cet aspect nous a conduit à fréquenter plusieurs *genres* de textes mathématiques et à distinguer plusieurs *niveaux* au sein des textes. La troisième partie, en particulier, était consacrée à des textes qui ne sont pas des articles de recherche : des articles d'encyclopédie, des analyses d'œuvres, des cours, des conférences ; des textes mathématiques certes, mais en un certain sens : des textes *sur* les mathématiques rédigés par des mathématiciens au travail et, largement, pour des mathématiciens. Nous avons aussi considéré, dans des articles de recherche, des pratiques non strictement démonstratives, en particulier la constitution de listes de problèmes. Nous avons distingué deux niveaux de discours réflexif, le premier *méta* et représenté sous une forme typique par un Osgood qui utilise systématiquement *im Kleinen* / *im Grossen* pour baptiser des théorèmes, distinguer les étapes d'une démonstration ou signaler une erreur usuelle ; on retrouve ce type d'intervention chez Blaschke, et les formes de question qu'il met en avant circulent de la topologie (Hopf) à la théorie des groupes topologiques (Schreier). Le second niveau, représenté par Hadamard, nous l'avons qualifié de *thématique*, plus proche de ce que peut étudier une histoire des idées mathématiques. Dans les deux cas, toutefois, un discours *sur*, un discours de second niveau surplombant – après coup – des mathématiques *déjà là*. L'émergence de la présentation par des structures définies axiomatiquement change, sur ce point, la donne. La position de Weyl est paradoxale : dans notre troisième partie, c'est lui qui représente la présentation structurale, quoique son texte fasse aussi intervenir *im Kleinen* / *im Grossen* au niveau *méta* ; pourtant, lorsqu'en 1932 [Weyl 1932] il commente l'essor de la méthode axiomatique, il n'y voit qu'une manière de présenter proprement les choses après que le contenu mathématique a été bien compris : une méthode d'exposition et non de découverte. Cette vision est certes compatible avec son travail de 1913 sur l'idée de surface de Riemann, il jouit dans ce cas de soixante ans de recul ; cela reflète aussi son traitement différente de la théorie, encore dans son enfance, des connexions et espaces généralisés. Dans les années 1930-1950, toutefois, une nouvelle génération d'auteurs utilise la recherche de structures et les définitions axiomatiques pour mieux formuler et aborder des problèmes neufs : méthode d'exposition de théories mûres, elle devient aussi art d'inventer. La présentation structurale modifie le lien au couple local/global, nous l'avions déjà noté à propos de l'*Idée de surface de Riemann*. Si les niveaux *méta* et thématique ne disparaissent pas, l'axe local/global guide la recherche des bonnes définitions de structure : il quitte son

niveau de discours second pour pénétrer le cœur de l'enchaînement démonstratif en son point de départ.

Enfin, à l'occasion, une histoire *aliénante* ; un goût pour la mise à distance, pour l'étrange dans le familier. C'est bien sûr un moyen de déjouer les pièges d'une narration sans relief, qui rapproche le passé du présent sous la forme du « là depuis toujours » : certes, après Gauss, on peut bien dire que « chacun sait » que les surfaces sont formées de petits morceaux assimilables à des morceaux de plans, mais il s'en faut de beaucoup que la notion de variété ait été là depuis toujours, nous avons essayé de le montrer, par exemple, en travaillant sur le sens de ce « petit ». De même, notre travail n'aurait pas eu beaucoup de saveur si la lecture de la première partie avait servi à conclure que le couple local/global était déjà présent chez Riemann ou Poincaré. Ce goût pour l'histoire aliénante éclate dans la seconde partie où, en interrogeant des séries longues et en décrivant des types-idéaux cohérents, nous cherchons à comprendre l'espace épistémologique différent du nôtre dans lequel se meuvent nos auteurs. Nous espérons par là contribuer à une histoire conceptuelle qui ne soit pas l'histoire linéaire du perfectionnement et de l'accumulation, qui puisse saisir les discontinuités. En faisant ressortir des traits spécifiques à un monde de la grandeur qui n'est plus le nôtre, nous pensons en avoir permis une saisie positive, au sens où il n'est plus saisi que comme *non*-ensembliste ou *pré*-ensembliste. Ce monde de la grandeur, on peut travailler dedans – auquel cas il fournit des ressources (ainsi *Punkt / Stelle / Lage* chez Riemann) – ou chercher à le dépasser – ainsi chez Weierstrass. Dans les deux cas, il est le référent permettant l'intelligibilité historique : les acteurs font avec *ce qu'ils ont*, pas en fonction d'un cadre à venir, quand bien même ils contribueraient à le faire émerger.

Qu'on nous permette d'exprimer deux petits regrets. Premièrement, nous avons à plusieurs reprises rencontré la question de l'*infinitésimal* sans jamais pouvoir lui accorder la place qu'elle mérite. Deuxièmement, notre grande ignorance de la physique nous a sans doute privé d'un pan entier de l'histoire du couple local/global. Si ces deux regrets sont « petits », ce n'est bien sûr pas parce qu'ils portent sur des points mineurs, mais parce que nous ne désespérons pas de continuer à travailler.

Bibliographie

Abréviations usuelles

Acta Math.	Acta Mathematica
Am. J. Math.	American Journal of Mathematics
AHES	Archive for History of Exact Sciences
AMS	American Mathematical Society
AMSHU	Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität
Ann. Math.	Annals of Mathematics
Ann. Sci. ENS	Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure
Bull. AMS	Bulletin of the American Mathematical Society
Bull. Sc. Math.	Bulletin des Sciences Mathématiques
Bull. SMF	Bulletin de la Société Mathématique de France
Com. Math. Helv.	Commentarii Mathematici Helvetici
CRAS	Comptes rendus de l'Académie des Sciences (France)
Duke MJ	Duke Mathematical Journal
Encyclopädie	Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen
Ens. Math.	L'enseignement Mathématique
Fund. Math.	Fundamenta Mathematicae
Gött. Nachr.	Nachrichten von der König. Ges. Der Wissenschaft zu Göttingen
HM	Historia Mathematica
JDMV	Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung
J. de Math.	Journal de Mathématiques
JMPA	Journal de Mathématiques Pures et Appliquées
JRAM	Journal für die reine und angewandte Mathematik
MA	Mathematische Annalen
MZ	Mathematische Zeitschrift
Proc. ICM	Proceedings of the International Congress of Mathematicians
Proc. NAS	Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)
Rend. Circ. Mat. Pal.	Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo
Sem. Cartan	Séminaire Henri Cartan
Trans. AMS	Transactions of the American Mathematican Society

1 Akivis M., Rosenfeld B., 1993. Elie Cartan (1869-1951), *AMS*, Providence, 1993.

2 Alexandroff P., 1935. On Local Properties of Closed Sets, *Ann. Math.* **36**(1) (2ème série) (1935), p.1-39.

3 Ampère A.-M., 1806. Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à l'expression finie des termes que l'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque, *Journal de l'Ecole Polytechnique* **13** (1806), p.148-181.

4 Appel P., 1884. Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$, *Acta Math.* **4** (1884), p.313-374.

5 Behnke H., Thullen P., 1934. Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* **III**(3), Springer, Berlin, 1934.

6 Behnke H., Stein K., 1937. Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null- und Polstellenflächen, *JDMV* **47** (1937), p.177-193.

7 Behnke H., Kopfermann K. (eds.), 1966. *Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraβ 1815-1865*, Westdeutscher Verlag, Köln, 1966.

8 Berwald L., 1923. Differentialinvarianten in der Geometrie. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen, *Encyclopädie* **III.3** (1902-1927), p.73-181.

9 Bieberbach L., 1920. Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variabeln, *Encyclopädie* **III.3.1** (1909-1921), p.379-532.

10 Bieberbach L., 1923. *Theorie der Differentialgleichungen*, Springer, Berlin, 1923.

11 Birkhoff G., 1917. Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom, *Trans. AMS* **18** (1917), p.199-300.

12Blaschke W., 1923. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. II Affine Differentialgeometrie* (1ste und 2te Auflage), Springer, Berlin, 1923.

13 Blaschke W., 1924. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie I* (2te Auflage), Springer, Berlin, 1924.

14 Blaschke W., 1929a. Über topologische Fragen der Diffetentialgeometrie, *JDMV* **38** (1929), p.193-205.

15 Blaschke W., 1929b. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. III Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln*, Springer, Berlin, 1929.

16 Blaschke W., 1931. Neue Strömungen in der Differentialgeometrie, *JDMV* **40** (1931), p.1-14.

17 Briot C., Bouquet J.-C., 1859. *Theorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques*, Mallet-Bachelier, Paris, 1859.

18 Bochner S., 1937a. Analytic Mapping of Compact Riemann Spaces into Euclidean Space, *Duke MJ* **3**(2) (1937), p.339-354.

19 Bochner S., 1937b. Remark on the Theorem of Green, *Duke MJ* **3**(2) (1937), p.334-338.

20 du Bois-Reymond P., 1875. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen, *JRAM* **79** (1875), p.21-37.

21 Bolza O., 1904. *Lectures on the Calculus of Variations*, The University of Chicago Press, Chicago, 1904.

22 Bolza O., 1909. *Vorlesungen über Variationsrechnung*, Teubner, Leipzig, 1909.

23 Borel E., 1912. Notice sur les travaux scientifiques de M. Emile Borel, *Œuvres d'Emile Borel* **I**, C.N.R.S., Paris, 1972.

24 Bourbaki N., 1948. Topologie générale. Chapitre IX Utilisation des nombres réels en topologie générale, *Actualités scientifiques et industrielles* **1045**, Hermann, Paris, 1948.

25 Brill A., Noether M., 1894. Die Entwickelung der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit, *JDMV* **3** (1894), p.107-566.

26 Brouwer L.E.J., 1912a. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, *MA* **71** (1912), p.97-115.

27 Brouwer L.E.J., 1912b. Über die topologischen Schwierigkeiten des Kontinuitätsbeweis der Existenztheoreme eindeutig umkehrbarer polymorpher Funktionen auf Riemann'schen Flächen, *Gött. Nachr.* 1912, p.603-606.

28 Cantor G., 1870. Beweis, daβ eine für jede reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen kann, *JRAM* **72** (1870), p.139-142.

29 Cantor G., 1871. Notiz zu dem Aufsatze : Beweis, daβ eine für jede reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen kann, *JRAM* **73** (1871), p.294-296.

30 Cartan E., 1894. *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus* (thèse), Nony, Paris, 1894 = *Œuvres Complètes* **I.**1 p.137-288.

31 Cartan E. 1915. La théorie des groupes continus et la géométrie (exposé d'après l'article allemand de G. Fano), *Encyclopédie des sciences mathématiques* **III.1**, réimpression Gabay, Paris, 1991. p.1-135 = *Œuvres Complètes* **III.**2 p.1727-1862.

32 Cartan E., 1922a. *Leçons sur les invariants intégraux* (3ème tirage), Hermann, Paris, 1971.

33 Cartan E., 1922b. Sur une définition géométrique du tenseur d'énergie d'Einstein, *CRAS* **174** (1922), p.437-439 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.613-615.

34 Cartan E., 1922c. Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion, *CRAS* **174** (1922), p.593-595 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.616-618.

35 Cartan E., 1922d. Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité, *CRAS* **174** (1922), p.734-736 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.619-621.

36 Cartan E., 1922e. Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique, *CRAS* **174** (1922), p.857-860 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.622-624.

37 Cartan E., 1922f. Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein, *CRAS* **174** (1922), p.1104-1107 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.625-628.

38 Cartan E., 1923. Sur les variétés à connexions affines et la théorie de la relativité généralisée, *Ann. Sci. ENS* **40** (1923), p.325-412 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.659-746.

39 Cartan E., 1924a. Les récentes généralisations de la notion d'espace, *Bull. Sc. Math.* **48** (1924), p.294-320 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.863-890.

40 Cartan E., 1924b. Sur les variétés à connexions affines et la théorie de la relativité généralisée (suite), *Ann. Sci. ENS* **41** (1924), p.1-25 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.799-824.

41 Cartan E., 1924c. Sur les variétés à connexions projectives, *Bull. SMF* **52** (1924), p.205-241 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.825-862.

42 Cartan E., 1925a. La géométrie des espaces de Riemann, *Mémorial des Sciences Mathématiques* **IX**, Gauthier-Villars, Paris, 1925.

43 Cartan E., 1925b. La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielle (conférence faite au Congrès de Toronto en 1924), *Ens. Math.* **24** (1925), p.1-18 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.891-904.

44 Cartan E., 1925c. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés et l'*Analysis Situs*, *Assoc. Av. Sc.* **49** (1925), p.47-49 = *Œuvres Complètes* **III**.1 p.919-920.

45 Cartan E., 1925d. Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples, *Bull. Sc. Math*. **49** (1925), p.130-152 = *Œuvres Complètes* **I**.1 p.531-553.

46 Cartan E., 1925e. Sur les variétés à connexions affines et la théorie de la relativité généralisée (2ème partie), *Ann. Sci. ENS* **42** (1925), p.17-88 = *Œuvres Complètes* **III**.2 p.921-992.

47 Cartan E., 1926a. L'application des espaces de Riemann et l'*Analysis Situs*, *Assoc. Av. Sc.* **50** (1926), p.53 = *Œuvres Complètes* **III**.2 p.993-995

48 Cartan E, 1926b. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés, *Acta. Math.* **48** (1926), p.1-42 = *Œuvres Complètes* **III**.2 p.997-1038.

49 Cartan E., Schouten J.A., 1926. On riemannian geometries admitting absolute parallelism, *Proc. Amsterdam* **29** (1926), p.933-946 = *Œuvres Complètes* **III**.2 p.1067-1080.

50 Cartan E., 1927a. La géométrie des groupes de transformations, *JMPA* **6** (1927), p.1-119 = *Œuvres Complètes* **I**.2, p.673-792.

51 Cartan E., 1927b. La théorie des groupes et la géométrie, *Ens. Math.* **26** (1927), p.200-225 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.841-866.

52 Cartan E., 1927c. Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupes fondamental simple, *CRAS* **184** (1927), p.1628-1630 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.667-669.

53 Cartan E., 1927d. Sur la possibilité de plonger un espace de Riemann dans un espace euclidien, *Ann. Soc. Pol. Math.* **6** (1927), p.1-7 = *Œuvres Complètes* **III**.2 p.1091-1098.

54 Cartan E., 1927e. Sur la topologie des groupes continus simples réels, *CRAS* **184** (1927), p.1036-1038 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.664-666.

55 Cartan E., 1927f. Sur les formes riemanniennes des géométries à groupe fondamental simple, *CRAS* **185** (1927), p.96-98 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p. 670-672.

56 Cartan E., 1927g. Sur les géodésiques des espaces de groupes simples, *CRAS* **184** (1927), p.862-864 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.661-663.

57 Cartan E., 1928a. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

58 Cartan E., 1928b. Sur les nombres de Betti des espaces de groupe clos, *CRAS* **187** (1928), p.196-198 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.999-1001.

59 Cartan E., 1929. Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces, *Ann. Soc. Pol. Math.* **8** (1929), p.181-225 = = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.1081-1126.

60 Cartan E., 1930. La théorie des groupes finis et continus et l'*Analysis situs*, *Mémorial des Sciences Mathématiques* **XLII**, Gauthier-Villars, Paris, 1930 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.1165-1226.

61 Cartan E., 1931. Notice sur les travaux scientifiques, *Œuvres Complètes* **I**.1 p.1-98.

62 Cartan E, 1936. La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie (conférence de 1935), *Ens. Maths.* **35** (1936), p. 177-200 = *Œuvres Complètes* **I**.2 p.1307-1330.

63 Cartan E., 1945. Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, *Actualités scientifiques et industrielles* **994**, Hermann, Paris, 1945.

64 Cartan E. 1952-1955. *Œuvres Complètes*, Gauthier-Villars, Paris, 1952-1955.

65 Cartan H., Thullen P., 1932. Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Regularitäts- und Konvergenzbereiche, *MA* **106** (1932), p.617-647.

66 Cartan H., 1934. Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes, *CRAS* **199** (1934), p.1284-1287.

67 Cartan H., 1940. Sur les matrices holomorphes de *n* variables complexes, *JMPA* **19** (1940), p.1-26.

68 Cartan H., 1944. Idéaux de fonctions analytiques de *n* variables complexes, *Ann. Sci. ENS* **61** 3ème série (1944), p.149-197.

69 Cartan H., 1945-46. Méthodes modernes en topologie algébrique, *Com. Math. Helv.* **18**, p. 1-15.

70 Cartan H., 1950a. Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, *Bull. SMF* **78** (1950), p.29-64.

71 Cartan H., 1950b. Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, *Proc. ICM* (Cambridge Mas. 30.8-6.9 1950), *AMS*, Providence R.I., 1952. p.152-164.

72 Cartan H, 1950-51a. Faisceaux sur un espace topologique I, *Sem. Cartan*, E.N.S. Paris, 1950-51, exposé 14.

73 Cartan H, 1950-51b. Faisceaux sur un espace topologique II, *Sem. Cartan*, E.N.S. Paris, 1950-51, exposé 15.

74 Cartan H, 1950-51c. Théorie axiomatique de la cohomologie, *Sem. Cartan*, E.N.S. Paris, 1950-51, exposé 16.

75 Cartan H, 1950-51d. Théorie de la cohomologie des espaces, *Sem. Cartan*, E.N.S. Paris, 1950-51, exposé 17.

76 Cartan H, 1950-51e. Théorèmes fondamentaux de la théorie des faisceaux, *Sem. Cartan*, E.N.S. Paris, 1950-51, exposé 19.

77 Cartan H, 1951-52. Faisceaux analytiques sur les variétés de Stein, *Sem. Cartan*, E.N.S. Paris, 1951-52, exposé 18.

78 Cartan H., 1953. Variétés analytiques complexes et cohomologie, *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables*, C.R.B.M. Thone (Liège) & Masson (Paris), 1950. p.41-55.

79 Cartan H., 1987. Sur quelques progrès dans la théorie des fonctions analytiques de variables complexes entre 1930 et 1950, [Hilton *et alii* 1991] p.45-58.

80 Cauchy A.-L., 1821. Cours d'analyse à l'Ecole Royale Polytechnique, 1ère partie : analyse algébrique, *Œuvres Complètes* **3** (2ème série), Gauthier-Villars, Paris, 1882-1974. Réimpression Gabay, Paris, 1989.

81 Cauchy A.-L., 1823. Résumé des leçons données à l'Ecole Polytechnique, *Œuvres Complètes* **4** (2ème série), Gauthier-Villars, Paris, 1882-1974.

82 Cauchy A.-L., 1853. Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire entre des limites données, *CRAS* **36** (1853), p.454-459.

83 Cauchy A.-L., 1882-1974. Sur les fonctions continues de quantités algébriques ou géométriques, *Œuvres Complètes* **14** (2ème série), Gauthier-Villars, Paris, 1882-1974. p.367-391.

84 Cauchy A.-L., 1981. *Equations différentielles ordinaires* (C. Gilain ed.), Etudes vivantes, Paris, 1981.

85 Čech E., 1933. Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque, *Fund. Math.* **19** (1933), p.149-183.

86 Chern S.-S., 1944. A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds, *Ann. Math.* **45**(4) (1944), p.83-88.

87 Chern S.-S., Chevalley C., 1952. Elie Cartan and his Mathematical Work, *Bull. AMS* **58** (1952), p.217-250.

88 Chern S.-S., 1956. Scientific Report on the Second Summer Institute. Several Complex Variables (Part II), *Bull. AMS* **62** (1956), p.101-117.

89 Chern S.-S., 1992. My Mathematical Education, *Chern – A Great Geometer of the Twentieth Century*, S.-S. Yau (ed.), International Press, Hong-Kong, 1992. p.1-15.

90 Chevalley C., 1946. *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

91 Chevalley C., 1951. Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable, *Mathematical Surveys* **VI**, A.M.S., NY, 1951.

92 Chorlay R., 2003. Les fonctions implicites : de la notion au théorème, *Mnémosyne* **18**, IREM Paris 7, 2003, p.15-58.

93 Chorlay R, 2004. L'idée de géométrie différentielle intrinsèque, de Gauss à Einstein, *Bulletin de l'UPS* **208** (2004), p.11-24.

94 Chorlay R., 2006. L'*Analysis situs* de Poincaré : les limites d'une synthèse classique, *Actes du congrès d'histoire des sciences et des techniques* (Poitiers, 20-20 mai 2004), *Cahier d'histoire et de philosophie des sciences* (hors-série), SFHST, Paris, 2006. p.32-39.

95 Chorlay R., 2007. La multiplicité des points de vue en Analyse élémentaire comme construit historique, *Actes de colloque inter-IREM / INRP « Histoire et enseignement des mathématiques : rigueurs, erreurs, raisonnements »* (Clermont-Ferrand, 19-20 mai 2006), INRP, Lyon (à paraître, 2ème semestre 2007).

Chorlay R., *à paraître*. Questions of Generality as Probes into Nineteenth-Century Mathematical Analysis, in *Handbook on Generality in Mathematics and the Sciences* (Chemla, Chorlay, Rabouin eds.).

96 Corry L., 1996. Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structure, *Science Networks – Historical Studies* **17,** Birkhäuser, Boston, 1996.

97 Cousin P., 1895. Sur les fonctions analytiques de *n* variables complexes, *Acta Math.* **19** (1895), p.1-61.

98 Crowe M. 1975. *Ten « Laws » Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics*, [Gillies 1992], p.15-20.

99 Darboux G., 1872. Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions, *Bull. Sc. Math.* **3** (1872), p.307-313.

100 Darboux G., 1875. Mémoire sur les fonctions discontinues, *Ann. Sci. ENS* **5** (2ème série) (1875), p.57-112.

101 Darboux G., 1887. *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, Gauthier-Villars, Paris, 1887.

102 Darrigol O., 2005. *Les équations de Maxwell : de MacCullagh à Lorentz*, Belin, Paris, 2005.

103 Dieudonné J., 1937. Sur les fonctions continues numériques définies dans un produit de deux espaces compacts, *CRAS* **205** (1937), p. 593-595.

104 Dieudonné J., 1978. Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900, Hermann, Paris, 1978.

105 Dieudonné J., 1981. Notice sur les travaux scientifiques, *Choix d'œuvres mathématiques II*, Hermann, Paris, 1981.

106 Dieudonné J., 1989. *A History of Algebraic and Differential Topology*, Birkhäuser, Boston, 1989.

107 Dini U., 1878. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Nistri, Pisa, 1878.

108 Dirichlet G., 1829. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, *JRAM* **4** (1829), p.157-159 = *G. Lejeune Dirichlet's Werke* (*Erster Band*)*,* G. Keimer, Berlin, 1889. p.117-132.

109 Dugac P., 1973. Eléments d'Analyse de Karl Weierstrass, *AHES* **10** (1973), p.41-176.

110 Dunmore C., 1992. Meta-level Revolutions in Mathematics, [Gillies 1992], p.209-225.

111 Ehresmann C., 1933. Un théorème relatif aux espaces localement projectifs et sa généralisation, *CRAS* **196** (1933), p.1354-1356.

112 Ehresmann C., 1934. Sur la topologie de certains espaces homogènes, *Ann. Math.* **35** (1934), p.396-443.

113 Ehresmann C., 1936a. Sur les espaces localement homogènes, *Ens. Math.* **35** (1936), p.317-333.

114 Ehresmann C., 1936b. Sur la notion d'espace complet en géométrie différentielle, *CRAS* **202** (1936), p.2033-2035.

115 Ehresmann C., 1937a. Les groupes de Lie à *r* paramètres, *Séminaire de mathématiques de la faculté des sciences de Paris 4ème année* (1936-37), p.1-61 = [Ehresmann 1984] p.381-410.

116 Ehresmann C., 1937b. Sur la topologie des certaines variétés algébriques réelles, *J. de Math.* **16** (1937), p.69-100.

117 Ehresmann C., 1938. Sur les arcs analytiques d'un espace de Cartan, *CRAS* **205** (1938), p.1433-1436.

118 Ehresmann C., 1939. Sur les congruences paratactiques et les parallélismes dans les espaces projectifs, *CRAS* **208** (1939), p.153-155.

119 Ehresmann C., Feldbau J., 1941. Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés, *CRAS* **212** (1941), p.945-948.

120 Ehresmann C., 1941. Espaces fibrés associés, *CRAS* **213** (1941), p.762-764.

121 Ehresmann C., 1942. Espaces fibrés de structures comparables, *CRAS* **214** (1942), p.144-147.

122 Ehresmann C., 1943. Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable, *CRAS* **216** (1943), p.628-630.

123 Ehresmann C., 1946. Compte-rendu de l'ouvrage d'Elie Cartan *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, *Bull. Sc. Math.* **LXX** 2ème série (1946), p.1-6 = [Ehresmann 1984] p.275-280.

124 Ehresmann C., 1947a. Sur la théorie des espaces fibrés, *Colloque international de topologie algébrique*, C.N.R.S., Paris, 1947. p. 3-15.

125 Ehresmann C., 1947b. Sur les espaces fibrés différentiables, *CRAS* **224** (1947), p.1611-1612.

126 Ehresmann C., 1950. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Colloque de topologie*, C.B.R.M., Bruxelles, 1950. p.29-55.

127 Ehresmann C., 1951. Sur la théorie des variétés feuilletées, *Rend. Mat. e Appl.* Ser. V, X-1-2 Rome (1951), p.64-83 = [Ehresmann 1984] p.155-173.

128 Ehresmann C., 1952. Structures locales, [Ehresmann 1984] p.411-420.

129 Ehresmann C., 1955. Notice sur les travaux scientifiques de Charles Ehresmann, [Ehresmann 1984] p.471-488.

130 Ehresmann C.,1984. Œuvres complètes et commentées I.1 et I.2, *Cahier de topologie et géométrie différentielle* (suppléments 1 et 2 au volume 24), Amiens, 1984.

140 Eilenberg S., Steenrod N., 1945. Axiomatic Approach to Homology Theory, *Proc. NAS* **31** (1945), p.117-120.

141 Eilenberg S, 1950-51. Homologie des groupes, *Sem. Cartan*, E.N.S. Paris, 1850-51, exposé 1.

142 Einstein A., 1916. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik* **49**(7) (1916), p.769-822.

143 Eisenhart L., 1922. Condition that a Tensor be the Curl of a Vector, *Bull. AMS* **28** (1922), p.425-427.

144 Eisenhart L., Veblen O., 1922. The Riemann Geometry and its Generalization, *Proc. NAS* **8** (1922), p.19-23.

145 Eisenhart L., 1926. *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1950 (2ème édition).

146 Engel F., 1900. [Notes sur des travaux de MM. Slocum et Taber], *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* **31** (*Jahrgang 1900)***,** Berlin, 1902. p.148-151.

147 Engel F., 1908. Zu der Studyschen Abhandlungen, *JDMV* **17** (1908), p.143-144.

148 Epple M., 1998, Topology, Matter and Space I : Topological Notions in 19th Century Natural Philosophy, *AHES* **52**(4), p.297-392.

149 Epple M., 1999, Geometric Aspects in the Development of Knot Theory, [James 1999], p.301-358.

150 Epple M., 2002. From Quaternions to Cosmology : Spaces of Constant Curvature, ca. 1873-1925, *Proc. ICM* (Beijing, 20-22 August 2002) vol.**3**, p.935-945.

151 Epple M. *et alii*, 2002. Zum Begriff des topologischen Raumes, *Felix Hausdorff – Gesammelte Werke* (Band II), E. Brieskorn, S.D. Chatterji., M. Epple *et alii* (eds.), Springer, NY, 2002. p.675-744.

152 Epple M. 2003. The End of the Science of Quantity : Foundations of Analysis, 1800-1910, [Jahnke 2003], p.291-324.

153 Fano G., 1907. Kontinuirliche geometrische Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip, *Encyclopädie* **III.1.1** (1907-1910), p.289-388.

154 Ferraro G., Panza M., 2003. Developing into Series and Returning from Series : A Note on the Foundations of Eighteenth-century Mathematics, *HM* **30** (2003), p.17-46.

155 Ferreiros J., 1999. Labyrinth of Thought - A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics, *Science Networks – Historical Studies* **23,** Birkhäuser, Boston, 1999.

156 Fuchs L., 1880a. Sur une classe de fonctions de plusieurs variables tirées de l'inversion des intégrales de solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles, *CRAS* **90** (1880), p.678-680 et p.735-736.

157 Fuchs L., 1880b. Ueber eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen, *JRAM* **89** (1880), p.151-169.

158 Gallot S., 1989. Géométrie, *Encyclopédie Philosophique Universelle*, Tome 1, Chap.10 : « Démarches Mathématiques », PUF, Paris, 1989. p.996-1026.

159 Gallot S., Hulin D., Lafontaine J., 1993. *Riemannian Geometry* (2nd edition), Springer, NY, 1993.

160 Gauss C.F., 1822. Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, *Carl Firedrich Gauss. Werke* (4ter Band), *König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1873. p.189-216.

161 Gauss C.F., 1828. Recherches générale sur les surfaces courbes (trad. M.A.), Bachelier, Paris, 1852.

162 Gilain C., 1991. La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles, *La France mathématique*, H. Gispert (ed.), *Cahier d'histoire et de philosophie des sciences* **34** (1991), SFHST – SMF, Belin, Paris, 1991. p.221-242.

163 Gillies D., 1992. *Revolutions in Mathematics*, D. Gillies (ed.), Clarendon Press, Oxford, 1992.

164 Gispert H., 1983. Sur les fondements de l'analyse en France, *AHES* **28** (1983), p.37-106.

165 Godement R., 1958. Topologie algébrique et théorie des faisceaux, *Actualités scientifiques et industrielles* **1252**, Hermann, Paris, 1958.

166 Goenner H., 2001. Weyl's Contribution to Cosmology, [Scholz 2001a]. p.105-137.

167 Goldstein C., 1999. Local et global, *Dictionnaire d'histoire et de philosophie des sciences*, D. Lecourt (dir.), PUF, Paris, 1999. p.571-575.

168 Goursat E., 1891. *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Hermann, Paris, 1891.

169 Goursat E., 1904. *A Course in Mathematical Analysis, vol. I* (trad. E. Hedrick), Ginn & Co., Boston, 1904.

170 Gray John, 1979. Fragments in the History of Sheaf Theory, *Application of Sheaves*, M.P. Fourman, C.J Mulvey, D.S. Scott (eds.), London Mathematical Society, Springer, NY, 1979. p.1-79.

171 Gray Jeremy, 1986. *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*, Birkhäuser, Boston, 1986.

172 Gray Jeremy (ed.), 1999. *The Symbolic Universe : Geometry and Physics 1890-1930*, Oxford UP, Oxford, 1999.

173 Gronwall T., 1917, On the expressibility of a uniform function of several complex variables as the quotient of two functions of entire character, *Trans. AMS* **18** (1917), p.50-64

174 Grothendieck A., 1957. Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. Journal* **9** (1957), p.119-221.

175 Hadamard J., 1897. Quelques applications possibles de la théorie des ensembles, 1[er] Congrès International des Mathématiciens (Zürich, 9-11 Août 1897), Kraus Reprint Ltd., Nendelen/Liechtenstein, 1967. p. 201-202 = [Hadamard 1968] vol.**1** p.311-312.

176 Hadamard J., 1898. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, *J. de Maths.* **4**(5) (1898), p.27-73 = [Hadamard 1968] vol.**2**, p.729-775.

177 Hadamard J., 1900. *Sur les points doubles des contours fermés* (Bordeaux, 1900) = [Hadamard 1968] vol.**2**, p.783-786.

178 Hadamard J., 1903. Sur les surfaces à courbure positive, *Bull. SMF* **31** (1903), p.300-301 = [Hadamard 1968] vol.**2**, p.781-782.

179 Hadamard J., 1906a. Sur les transformations planes, *CRAS* **142** (1906), p.74-77.

180 Hadamard J., 1906b. Sur les transformations ponctuelles, *Bull. SMF* **34** (1906), p.71-84 = [Hadamard 1968] vol.**1**, p.449-363.

181 Hadamard J., 1909a. Notions élémentaires sur la géométrie de situation, *Nouv. Ann. Math.* **4**(9) (1909), p.193-235 = [Hadamard 1968] vol.**2**, p.829-871.

182 Hadamard J., 1909b. La géométrie de situation et son rôle en mathématiques (Leçon d'ouverture du cours de Mécanique Analytique et Mécanique Céleste au Collège de France, 1909) = [Hadamard 1968] vol.**2**, p.805-827.

183 Hadamard J., 1910a. *Leçons sur le calcul des variations*, tome I, Hermann, Paris, 1910.

184 Hadamard J., 1910b. Sur quelques applications de l'indice de Kronecker, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable réelle* (2ème édition), J. Tannery, Hermann, Paris, 1910.

185 Hadamard J., 1911. Sur les trajectoires de Liouville, *Bull. Sc. Math.* **35**(2) (1911), p.105-113 = [Hadamard 1968] vol.**4**, p.1889-1896.

186 Hadamard J., 1912. L'œuvre mathématique de Poincaré, *Acta Mathematica* **38** (1921), p.203-287 = [Hadamard 1968] vol.**4**, p.1921-2006.

187 Hadamard J., 1919. Sur les correspondances ponctuelles, *Bull. SMF* **47** (1919), p.28-29 = [Hadamard 1968] vol.**1**, p.383-384.

188 Hadamard J., 1928. *Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel* (CIM Bologne, 1928) = [Hadamard 1968] vol.**1**, p.435-453.

189 Hadamard J., 1936. Equations aux dérivées partielles. Les conditions définies en général – le cas hyperbolique (Conférence Internationale sur les Equations aux Dérivées Partielles), *Ens. Math.* **35** (1936), p.5-42 = [Hadamard 1968] vol.**3**, p.1593-1630.

190 Hadamard J., 1954. Sur des questions d'histoire des sciences : la naissance du calcul infinitésimal, *An. Acad. Brasil. Ci.* **26**, p.83-89 = [Hadamard 1968] vol.**4**, p.2267-2271.

191 Hadamard J., 1968. *Œuvres* (4 volumes), C.N.R.S., Paris, 1968.

192 Hawkins T., 2000. *Emergence of the Theory of Lie Groups – An Essay in the History of Mathematics 1869-1926*, Springer, NY, 2000.

193 Heine E., 1870. Ueber trigonometrische Reihen, *JRAM* **71** (1870), p.353-365.

194 Heine E., 1872. Die Elemente der Functionenlehre, *JRAM* **74** (1872), p.172-188.

195 Hensel K., Landsberg G., 1902. *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale*, réimpression Chelsea Pub. Cie., NY, 1965.

196 Hessenberg G., 1916. Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie, *MA* **78** (1916), p.187-217.

197 Hilbert D., 1899. Über das Dirichlet'schen Prinzip, *JDMV* **8** (1899), p.184-188.

198 Hilbert D., 1901. Ueber Flächer von constanter Gaussscher Krümmung, *Trans. AMS* **2** (1901), p.87-99.

199 Hilbert D., 1902. Ueber die Grundlagen der Geometrie, *Gött. Nachr.* **1902**, p.233-241.

200 Hilton P., Hirzebruch F., Remmert R. (eds.), 1991. *Miscellanea Mathematica*, Springer, Berlin, 1991.

201 Hirzebruch F., 1956. *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **9** (neue Folge), Springer, Berlin, 1956.

202 Hölder O., 1882. Beweis des Satzes, dass eine eindeutige analytische Function in unendlicher Nähe einer wesentlich singulären Stelle jedem Werth beliebig nahe kommt, *MA* **20** (1882), p.138-143.

203 Hopf H., 1925. *Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik von Mannigfaltigkeiten* (Dissertation), Friedrich-Wilhelms-Universität, Berlin, 1925

204 Hopf H., 1926a. Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, *MA* **95** (1926), p.313-339.

205 Hopf H., 1926b. Über die Curvature integra geschlossener Hyperfläche, *MA* **95** (1926), p.340-367.

206 Hopf H., 1927a. Abbildungsklassen *n*-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, *MA* **96** (1927), p.209-224.

207 Hopf H., 1927b. Vektorfelder in *n*-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, *MA* **96** (1927), p.225-251.

208 Hopf H., 1931a. Géométrie infinitésimale et topologie, *Ens. Math.* **30** (1931), p.233-240.

209 Hopf H., 1931b. Über die Abildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, *MA* **104**, p.637-665.

210 Hopf H., Rinow W., 1931. Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, *Com. Math. Helv.* **3** (1931), p.209-225.

211 Hopf H., 1932. Differentialgeometrie und topologische Gestalt, *JDMV* **41** (1932), p.209-228.

212 Hopf H., Rinow W., 1933. Die topologischen Gestalten differentialgeometrischen verwandter Fläche, *MA* **107** (1933), p.113-123.

213 Hopf H., 1935. On Mapping Spheres onto Spheres of Lower Dimension, *Fund. Math.* **25** (1935), p.427-440.

214 Hopf H., 1936, Quelques problèmes de la théorie des représentations continues, *Ens. Math.* **35** (1936), p.334-347.

215 Hotelling H., 1925. Three-Dimensional Manifolds of States of Motion, *Trans. AMS* **27** (1925), p.329-344.

216 Hotelling H, 1926. Multiple-Sheeted Spaces and Manifolds of States of Motion, *Trans. AMS* **28** (1926), p.479-490.

217 Houzel C., 1998. Histoire de la théorie des faisceaux, *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XX^e^ siècle*, Séminaires et Congrès **3**, SMF, 1998. p.101-119.

218 Houzel C., 2002. La géométrie algébrique – recherches historiques, Blanchard, Paris, 2002.

219 Hurewicz W., Steenrod N., 1941. Homotopy Relations in Fiber Spaces, *Proc. NAS* **27** (1941), p.60-64.

220 Hurwitz A., 1897. Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, *Gött. Nachr.* 1897, p.71-90.

221 Jahnke H.N. (ed.), 2003. A History of Analysis, *History of Mathematics* **3**, AMS, 2003.

222 James I.M. (ed.), 1999. History of Topology, Elsevier Science, Amsterdam – NY, 1999.

223 Jordan C., 1866a. Des contours tracés sur les surfaces, *J. de Math.* **11**(2) (1866), p.110-130 = *Œuvres* **4**, Gauthier-Villars, Paris, 1964, p.91-111.

224 Jordan C., 1866b. Sur la déformation des surfaces, *JMPA* **11** (2ème série) (1866), p.105-109 = *Œuvres* **4**, Gauthier-Villars, Paris, 1964, p.85-89.

225 Jordan C., 1991a. Cours d'analyse de l'école polytechnique. Tome I, calcul différentiel (3ème édition), réimpression Gabay, Paris, 1991.

226 Jordan C., 1991b. Cours d'analyse de l'école polytechnique. Tome II, calcul intégral (3ème édition), réimpression Gabay, Paris, 1991.

227 Katz V., 1999. Differential Forms, [James 1999], p.111-121.

228 Killing W., 1880. Die Rechnung in der Nicht-Euklidischen Raumformen, *JRAM* **89** (1880), p.265-287.

229 Klein F., 1872. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (dit Programme d'Erlangen), *MA* **43** (1893), p.63-100.

230 Klein F., 1874. Bemerkungen über die Zusammenhang der Flächen, *MA* **7** (1874), p.549-557.

231 Klein F., 1875. Ueber den Zusammenhang der Flächen, *MA* **9** (1875), p.476-482.

232 Klein F., 1882. *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Teubner, Leipzig, 1882.

233 Klein F., 1883. Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie, *MA* **21** (1883), p.141-218.

234 Klein F., 1890. Zur Nicht-Euklidischen Geometrie, *MA* **37** (1890), p.544-572.

235 Klein F., 1892. Ueber den Begriff des functionentheoretischen Fundamentalbereichs, *MA* **40** (1892), p.130-139.

236 Klein F. 1893. *Conférences sur les mathématiques* (Congrès de Mathématiques de Chicago, 1893. Trad. Laugel), Hermann, Paris, 1898.

237 Klein F., 1918. Über die Integralform der Erhaltungssatz und die Theorie des räumlichen-geschlossenen Welt, *Gött. Nachr.* 1918, p.395-423.

238 Kneser A., 1900. *Lehrbuch der Variationsrechnung*, Vieweg, Braunschweig, 1900.

239 Kneser H., 1926. Die Topologie der Mannigfaltigkeiten, *JDMV* **34** (1926), p.1-13.

240 Kodaira K, Rham G., 1950. *Harmonic integrals* (lectures delivered in a seminar conducted by Pr. H. Weyl and L. Siegel), Institute for Advanced Study, Princeton, 1955.

241 Koebe P., 1908. Ueber ein allgemeinen Uniformizierungsprinzip, *Atti del IV Congresso Internazionale dei Mattematici* vol.2, Roma, 1909.

242 Künneth H., 1923. Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit, *MA* **90** (1923), p.65-85.

243 Kuratowski C., 1936. La notion de connexité locale en Topologie, *Ens. Math.* **35** (1936), p.229-240.

244 Lacroix S.-F., 1867. *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* (7ème édition revue et augmentée), Gauthier-Villars, Paris, 1867.

245 Lagrange J.-L., 1806. *Leçons sur le calcul des fonctions*, Courcier, Paris, 1806 = *Œuvres de Lagrange* **11** (J.-A. Serret et G. Darboux eds.), Gauthier-Villars, Paris, 1867-1892.

246 Lakatos I., 1978. Cauchy and the Continuum, *Math. Intel.* **1**(3) (1978), p.151-161.

247 Lautman A., 1938. Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques. I Les schémas de structure, *Actualités scientifiques et industrielles* **590**, Hermann, Paris, 1938.

248 Lefschetz S., 1930. *Topology*, réimpression Chelsea Pub. Co., NY, 1956.

249 Leray J., 1945. Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations, *JMPA* **24** (9ème série) (1945), p.95-167.

250 Leray J., 1946. L'anneau d'homologie d'une représentation, *CRAS* **222** (1946), p.1366-1368.

251 Leray J., 1949. L'homologie filtrée, *Colloques internationaux du C.N.R.S. : topologie algébrique, juin-juillet 1947*, Gauthier-Villars, Paris, 1949.

252 Levi-Civita T., Ricci-Curbastro M., 1901. Méthodes de calcul différentiel absolu, *MA* **54** (1901), p.125-201.

253 Lie S., 1880. Theorie der Transformationsgruppen I, *MA* **16** (1880), p.441-528.

254 Lie S., 1888. Theorie der Transformationsgruppen I (unter Mitwirkung von Dr. F. Engel), réimpression de la seconde édition Chelsea Pub. Co., NY, 1970.

255 Lie S., 1890. Theorie der Transformationsgruppen II (unter Mitwirkung von Dr. F. Engel), réimpression de la seconde édition Chelsea Pub. Co., NY, 1970.

256 Lie S., 1893. Theorie der Transformationsgruppen III (unter Mitwirkung von Dr. F. Engel), réimpression de la seconde édition Chelsea Pub. Co., NY, 1970.

257 Liebmann H., 1914. Geometrische Theorie der Differentialgleichungen, *Encyclopädie* **III.3** (1902-1927), p.503-539.

258 Lilienthal, 1902. Die auf einer Fläche gezogenen Kurven, *Encyclopädie* **III.3** (1902-1927), p.105-185..

259 Lipschitz R., 1877. *Lehrbuch der Analysis. Erster Band. Grundlagen der Analysis*, Max Cohen und Sohn, Bonn, 1877.

260 Mangoldt H.,1902. Anwendung der differential und Integralrechnung auf Kurven und Flächen, *Encyclopädie* **III.3** (1902-1927), p.1-106.

261 Maxwell J.C., 1873. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1873.

262 Mineur H., 1925. Sur la théorie analytique des groupes continus, *JMPA* **4** (9ème série), p.23-108.

263 Mittag-Leffler G., 1882. Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable, *CRAS* **94** (1882), p.414-416.

264 Mittag-Leffler G., 1883. Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante, *Acta Math.* **4** (1884), p.1-79.

265 Möbius A.F., 1863. Theorie der Elementar Verwandtschaft, *Berichte über der Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wiss. math.-phys. Klasse* **15** (1863), p.18-57 = *Gesammelte Werke* II, Hirzel, Leipzig, 1886. p. 433-472.

266 Möbius A.F., 1865. Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyëders, *Berichte über der Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wiss. math.-phys. Klasse* **17** (1865), p.31-68 = *Gesammelte Werke* II, Hirzel, Leipzig, 1886. p. 473-512.

267 Morse M., 1924. A Fundamental Class of Geodesics on any Closed Surface of Genus p Greater then One, *Trans. AMS* **26** (1925), p.25-60 = [Morse 1987] vol.**1**, p.41-76.

268 Morse M., 1925. Relations between Critical Points of a Real Function of n Independent Variables, *Trans. AMS* **27** (1925), p.345-396 = [Morse 1987] vol.**1**, p.77-128.

269 Morse M. 1927. The Analysis and Analysis Situs of Regular n-Spreads in $(n+r)$-Space, *Proc. NAS* **13** (1927), p.813-817 = [Morse 1987] vol.**1**, p.129-133.

270 Morse M., 1928. The Foundations of a Theory in the Calculus of Variations in the Large, *Trans. AMS* **30** (1928), p.213-274 = [Morse 1987] vol.**1**, p.134-195.

271 Morse M., 1929. The Critical Points of Functions and the Calculus of Variations in the Large, *Bull. AMS* **35** (1929), p.38-54 = [Morse 1987] vol.**1**, p.210-226.

272 Morse M., 1930a. The Critical Points of a Function of *n* Variables, *Proc. NAS* **16** (1930), p. 777-779 = [Morse 1987] vol.**1**, p.280-282.

273 Morse L., 1930b. The Foundations of a Theory of the Calculus of Variations in the Large in *m*-space (2nd paper), *Trans. AMS* **32** (1930), p.599-631 = [Morse 1987] vol.**1**, p.283-315.

274 Morse M., 1967. What is Analysis in the Large, *Global Differential Geometry*, S.S. Chern (ed.), *Studies in Mathematics* **27**, The Mathematical Association of America, 1989. p.259-269.

275 Morse M., 1987. *Collected Papers* (5 volumes), World Scientific Publishing Co., Singapore, 1987.

276 Mumford D., 1975. *Curves and their Jacobians*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

277 Nash C., 1999. Topology and Physics – a Historical Essay, [James 1999], p.359-416.

278 Neumann C., 1865. *Vorlesungen über Riemann's Theorie der abelschen Integrale*, Teubner, Leipzig, 1865.

279 Neumann C., 1870. Zur Theorie des Potentiales, *MA* **2** (1870), p.514.

280 Neumann C., 1877. *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*, Teubner, Leipzig, 1877.

281 Neumann C., 1884. *Vorlesungen über Riemann's Theorie der abelschen Integrale* (2te Auflage), Teubner, Leipzig, 1884.

282 Oka K., 1936. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, *Journal of Science of the Hiroshima University* **6** (1936), p.245-255 = *Collected Papers*, p. 1-10.

283 Oka K., 1937. Domaines d'holomorphie, *Journal of Science of the Hiroshima University* **7** (1937), p.115-130 = *Collected Papers*, p.11-23.

284 Oka K., 1939. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables III. Deuxième problème de Cousin, *Journal of Science of the Hiroshima University* **9** (1939), p.7-19 = *Collected Papers*, p.24-35.

285 Oka K., 1942. Domaines pseudoconvexes, *Tôhoku Math. J.* **49** (1942), p.15-52 = *Collected Papers*, p.48-70.

286 Oka K., 1950. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables VII. Sur quelques notions arithmétiques, *Bull. SMF* **78** (1950), p.1-27 = *Collected Papers*, p.80-106.

287 Oka K., 1984. *Collected papers*, R. Remmert (ed.), Springer, NY, 1984.

288 Olver P.J., 1993. Applications of Lie Groups to Differential Equations (2nd edition), *Graduate Texts in Mathematics* **107**, Springer, NY, 1993.

289 Osgood W., 1898. Selected Topics in the General Theory of Functions (Six Lectures delivered before the Cambridge Colloquium, August 22-27, 1898), *Bull. AMS* **5** (1899), p.59-87.

290 Osgood W., 1899. Note über analytische Functionen mehrerer Veränderlichen, *MA* **52** (1899), p.462-464.

291 Osgood W., 1900a. On the Existence of the Green Function for the most General Simply Connected Plane Region, *Trans. AMS* **1** (1900), p.310-314.

292 Osgood W., 1900b. Ueber einen Satz des Herrn Schönflies aus der Theorie der Functionen zweier reeller Veränderlichen, *Gött. Nachr.* (1900), p.94-97.

293 Osgood W, 1901. Analysis der komplexen Größen. Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Größen, *Encyclopädie* **II.2** (1921-1928), Leipzig, Teubner, 1901-1921. p.1-114

294 Osgood W., 1911. Fonctions analytiques (exposé, d'après l'article allemand de W.F. Osgood, par P. Boutroux et J. Chazy), *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* **II**.2 (rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de J. Molk), réimpression Gabay, Paris, 1992. p. 94-126.

295 Osgood W., 1912. *Lehrbuch der Funktionentheorie* (2te Auflage), Teubner, Leipzig, 1912.

296 Osgood W., 1913. Topics in the Theory of Functions of Several Complex Variables, *The Madison Colloquium* 1913 part II, *AMS*, 1914 = réimpression Dover, NY, 1966.

297 Painlevé P., 1887. *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1887.

298 Picard E., 1879a. Sur une propriété des fonctions entières, *CRAS* **88** (1879), p.1024-1027.

299 Picard E., 1879b. Sur les fonctions entières, *CRAS* **89** (1879), p.662-665.

300 Picard E., 1879c. Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel, *CRAS* **89** (1879), p.745-747.

301 Picard E., 1880. Mémoire sur les fonctions entières, *Ann. Sci. ENS* **9** (1880), p.145-166.

302 Picard E., 1991. *Traité d'Analyse. Tome I* (4ème édition), réimpression Gabay, Paris, 1991.

303 Poincaré H., 1878. Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles, *Journal de l'Ecole Polytechnique* XLVe Cahier (1878), p.13-20 = *Œuvres* **1**, p.XXXVI-XLVIII.

304 Poincaré H., 1879. Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences finies, Thèse : Mathématiques, Faculté des sciences de Paris, 1879 = *Œuvres* **1**, IL-CXXXII.

305 Poincaré H., 1881. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, *J. de Math.* **7** (3ème série) (1881), p.375-422 et **8** (3ème série) (1882), p.251-296 = *Œuvres* **1**, p.3-84.

306 Poincaré H., 1882. Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Math.* **1** (1882), p.1-62 = *Œuvres* **2**, p.108-168.

307 Poincaré H., 1883a. Sur un théorème général de la théorie des fonctions, *Bull. SMF* **11** (1883), p. 112-125 = *Œuvres* **11**, p.57-69.

308 Poincaré H., 1883b. Sur les fonctions de deux variables, *Acta Math.* **2** (1883), p.97-113 = *Œuvres* **4**, p.147-161.

309 Poincaré H., 1884. Sur les groupes des équations linéaires, *Acta Math.* **4** (1884), p.201-311 = *Œuvres* **2**, p.300-401.

310 Poincaré H., 1885. Sur les courbes définies par les équations différentielles (3ème partie), *JMPA* **1** (4ème série), p.167-244 = *Œuvres* **I**, p.90-161.

311 Poincaré H., 1887. Sur les résidus des intégrales doubles, *Acta Math.* **9** (1887), p.321-380 = *Œuvres* **3**, p.440-489.

312 Poincaré H., 1888. Sur une propriété des fonctions analytiques, *Rend. Circ. Mat. Pal.* **2** (1888), p. 197-200 = *Œuvres* **4**, p.11-13.

313 Poincaré H., 1890. Sur les Equations aux Dérivées Partielles de la Physique Mathématique, *Am. J. Math.* **12** (1890), p.211-294 = *Œuvres* **9**, p.28-113.

314 Poincaré H., 1895. Analysis situs, *Journal de l'Ecole Polytechnique* **1** (2ème série) (1895) = *Œuvres* **6**, p.193-288.

315 Poincaré H., 1898. Sur les propriétés du potentiel et les fonctions abéliennes, *Acta Math.* **22** (1898), p.89-178 = *Œuvres* **4**, p.162-243.

316 Poincaré H., 1899a. Sur les groupes continus, *CRAS* **128** (1899), p.1065-1069 = *Œuvres* **3**, p.169-172.

317 Poincaré H., 1899b. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (tome III), Gauthier-Villars, Paris, 1899.

318 Poincaré H., 1899c. L'œuvre mathématique de Weierstrass, *Acta Math.* **22** (1899), p.1-18.

319 Poincaré H., 1901. Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même, *Acta Math.* **38** (1921), p.3-131.

320 Poincaré H., 1905. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, *Trans. AMS* **6** (1905), p.237-274 = *Œuvres* **6**, p.38-84.

321 Poincaré H., 1907a. Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme, *Rend. Circ. Mat. Pal.* **23** (1907), p.185-220 = *Œuvres* **4**, p.244-289.

322 Poincaré H., 1907b. Sur l'uniformisation des fonctions analytiques, *Acta Math.* **31** (1907), p.1-63 = *Œuvres* **4**, p.70-143.

323 Poincaré H., 1908. L'avenir des mathématiques, *Atti del IV congresso internazionale dei matematici, vol.1* (Roma, 6-11 Aprile 1908), Accademia dei Lincei, Rome, 1909. p.167-182

324 Poincaré H., 1921. Lettres de Henri Poincaré à L. Fuchs, *Acta Math.* **38** (1921), p.175-187 = *Œuvres* **11**, p.13-25.

325 Poincaré H., 1951. Œuvres de Henri Poincaré (11 volumes), Gauthier-Villars, Paris 1951-1956.

326 Pont J.-C., 1974. La topologie algébrique, des origines à Poincaré, *Bibliothèque de Philosophie Contemporaine*, PUF, Paris, 1974.

327 Portnoy E., 1982. Riemann's Contribution to Differential Geometry, *HM* **9** (1982), p.1-18.

328 Purkert W., 2002. Historische Einführung, *Felix Hausdorff – Gesammelte Werke* (Band II), E. Brieskorn, S.D. Chatterji., M. Epple *et alii* (eds.), Springer, NY, 2002. p.1-91.

329 Reich K., 1973. Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauβ bis Riemann (1828-1868), *AHES* **11** (1973), p.273-382.

330 Rham G., 1936. Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples, *Ens. Math.* **35** (1936), p. 213-228.

331 Rham G., 1947-48. Remarque au sujet de la théorie des formes différentielles harmoniques, *Annales de l'Université de Grenoble* **23** (1947-48), p.55-56.

332 Rham G., 1955. Variétés différentiables – formes, courants, formes harmoniques, *Actualités scientifiques et industrielles* **1222**, Hermann, Paris, 1955.

333 Rham G., 1981. *Œuvres Mathématiques*, éditions de l'Enseignement Mathématique, Genève, 1981.

334 Riemann B., 1892. *Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass* (*hrsg. unter Mitwirkung von R. Dedekind, von H. Weber*), Teubner, Leipzig, 1892.

335 Riemann B., 1898. *Œuvres mathématiques de Riemann* (traduites par L. Laugel), Gauthier-Villars, Paris, 1898 = répimpression Gabay, Paris, 1990.

336 Riemann B., 1919. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (3^te^ Auflage. Neu herausgegeben und erläutert von H. Weyl), Springer, Berlin, 1919.

337 Rinow W., 1932. Über Zusammenhänge zwischen der Differentialgeometrie im Groβen und im Kleinen, *MZ* **35** (1932), p.512-528.

338 Robadey A., 2006. *Différentes modalités de travail sur le général dans les recherches de Poincaré sur les systèmes dynamiques*, Thèse de doctorat : histoire des mathématiques, Paris 7, 2006.

339 Scheeffer L., 1886. Über die Bedeutung der Begriffe « Maximum und Minimum » in der Variationsrechnung, *MA* **26** (1886), p.197-208.

340 Scholz E., 1980. *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriff von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser, Boston, 1980.

341 Scholz E., 1999a. The Concept of Manifold, [James 1999], p.25-64.

342 Scholz E., 1999b. Weyl and the Theory of Connections, [Gray 1999], p.260-284.

343 Scholz E. (ed.), 2001a. *Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie and a General Introduction to his Scientific Work*, Birkhäuser, Basel-Boston, 2001.

344 Scholz E., 2001b. Weyls Infinitesimalgeometrie, 1917-1925, [Scholz 2001a], p.48-104.

345 Schönflies A., 1900. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, *JDMV* **8** (1900), p.1-150.

346 Schönflies A., 1906. Die Beziehungen der Mengenlehre zur Geometrie und Funktionentheorie*, JDMV* **15** (1906), p.557-575.

347 Schouten J.A., 1926. Erlanger Programm und Uebertragungslehre. Neue Gesichtpunkte zur Grunglegung der Geometrie, *Rend. Circ. Mat. Pal.* **50** (1926), p.142-169.

348 Schreier O., 1926. Abstrakte kontinuirlichen Gruppen, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgische Universität* **4**, Leipzig, Teubner, 1926. p.15-32.

349 Schreier O., 1927. Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im Groβen, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgische Universität* **5**, Leipzig, Teubner, 1927. p.233-244.

350 Schreier O., 1928. Über neue Untersuchungen in der Theorie der kontinuirlichen Gruppen, *JDMV* **37** (1928), p.113-122.

351 Schur I., 1901. Über eine Klasse von Matrizen die sich einer gegebene Matrix zuordnen lassen (inaugural Dissertation), Friedrich-Wilhelms-Universität, Berlin, 1901.

352 Schwarz H.A., 1890. *Gesammelte mathematische Abhandlungen* (2^ter^ Band), Springer, Berlin, 1890.

353 Schwartz L., 1951. Théorie des distributions, *Actualités scientifiques et industrielles* **1122**, Hermann, Paris, 1951.

354 Seifert H., Threlfall W., 1931. Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes, *MA* **104** (1931), p.1-70.

355 Seifert H., Threlfall W., 1933. Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes (Schlußβ), *MA* **107** (1933), p.543-586.

356 Seifert H., 1933. Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume, *Acta Math.* **60** (1933), p.147-238.

357 Seifert H., Threlfall W., 1934. *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig, 1934.

358 Serre J.-P., 1953. Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables*, C.R.B.M. Thone (Liège) & Masson (Paris), 1950. p.57-68.

359 Serre J.-P., 1955. Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. Math.* **61** (1955), p.197-278.

360 Serre J.-P., 1991. Les petits cousins (lettres à H. Cartan, 1950-1953), [Hilton *et alii* 1991] p.278-291.

361 Serret J.-A., 1879. *Cours de calcul différentiel et intégral. Tome premier : calcul différentiel* (2ème édition), Gauthier-Villars, Paris, 1879.

362 Sigurdsson S., 2001, Journeys in Spacetime, [Scholz 2001a], p.15-47.

363 Sitter W., 1917. On Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences (3rd paper), *Month. Not. Royal Astr. Soc.* **78** (1917), p.3-28.

364 Spivak M., 1970. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* vol.**2**, Publish or Perish, Wilmington (Del.), 1970.

365 Stachel J., 1989. Einstein's Search for General Covariance, *Einstein and the History of General Relativity*, *Einstein Studies* **I**, Birkhäuser, Basel-Boston, 1989.

366 Steenrod N., 1936. Universal Homology Group, *Am. J. Math.* **58**(4) (1936), p.661-701.

367 Steenrod N., 1942. Topological Methods for the Construction of Tensor Functions, *Ann. Math.* **43**(1) (1942), p. 116-131.

368 Steenrod N., 1943. Homology with Local Coefficients, *Ann. Math.* **44**(4) (1943), p.610-627.

369 Steinitz E., 1908. Beiträgen zur *Analysis situs*, *Sitz. Berl. Math. Ges.* **7** (1908), p.29-

370 Stiefel E., 1935. Richtungsfelder und Fernparallelismus in *n*-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Com. Math. Helv.* **8** (1935-1936), p.305-353.

371 Stolz O., 1893. *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung* (*Erster Theil*), Teubner, Leipzig, 1893.

372 Struik D., 1933a. Outline of a History of Differential Geometry (I), *ISIS* **19** (1933), p.92-120.

373 Struik D., 1933.b Outline of a History of Differential Geometry (II), *ISIS* **20** (1933), p.161-191.

374 Study E., 1908. Kritische Betrachtungen über Lies Invariantentheorie der endlichen kontinuirlichen Gruppen, *JDMV* **17** (1908), p.125-142.

375 Tannery J., 1875. Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables, *Ann. Sci. ENS* **4** (2ème série) (1875), p.113-182.

376 Threlfall W., 1932. Räume aus Linienelementen, *JDMV* **42** (1932), p. 87-110.

377 Threlfall W., 1936. Quelques résultats récents de la topologie des variétés, *Ens. Math.* **35** (1936), p.242-255.

378 Threlfall W., 1939. Le calcul des variations global, *Ens. Math.* **38** (1939-1940), p.189-207.

379 Thullen P., 1935. Sur le deuxième problème de Cousin, *CRAS* **200** (1935), p.720-721.

380 Tietze H., Vietoris L., 1929. Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie, *Encyclopädie* **III.1.2** (1914-1931), p.141-237.

381 Vanden Eynde R., 1999. Development of the Concept of Homotopy, [James 1999], p.65-102.

382 Veblen O., 1918. Analysis Situs, *The Cambridge Colloquium 1916* (part II), AMS, NY, 1918-1922

383 Veblen O., 1927. Invariants of Quadratic Differential Forms, *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics* **24**, Cambridge UP, London, 1927.

384 Veblen O, 1928a. Conformal Tensors and Connections, *Proc. NAS* **14** (1928), p.735-745.

385 Veblen O., 1928b. Projective Tensors and Connections, *Proc. NAS* **14** (1928), p.154-166.

386 Veblen O, Whitehead J.H.C., 1931. A Set of Axioms for Differential Geometry, *Proc. NAS* **17**(10) (1931), p.551-561.

387 Veblen O., Whitehead J.H.C., 1932. The Foundations of Differential Geometry, *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics* **29**, Cambridge UP, London, 1932.

388 Volkert K., 1987. Die Geschichte der pathologischen Funktionen – Ein Beitrag zur Entstehung der Mathematischen Methodologie, *AHES* **73** (1987), p.193-232.

389 Volkert K., 1988. *Geschichte der Analysis*, Wissenschaftsverlag, Manheim, 1988.

390 van der Waerden B., 1930. Kombinatorische Topologie, *JDMV* **39** (1930), p.121-139.

391 Weber H., 1908. *Lehrbuch der Algebra*, 3ter Band (2te Auflage), Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1908.

392 Weierstrass K., 1876. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, *Abh. König. Ges.* 1876 = [Weierstrass 1894-1927 **2**], p.77-124.

393 Weierstrass K., 1878. Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen (Vorlesungen Berlin 1878, in einer Mitschrift von A. Hurwitz), *Dokumente zur Geschichte der Mathematik*, DMV – Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1988.

394 Weierstrass K., 1881a. Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques, *Bull. Sc. Math.* **5** (2ème série) (1881), p.157-183.

395 Weierstrass K., 1881b. Sur un théorème de M. Mittag-Leffler et sur la théorie des fonctions uniformes, *Bull. Sc. Math.* **5** (2ème série) (1881), p.113-124.

396 Weierstrass K., 1886. Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre (Vorlesungen gehalten in Berlin, 1886), *Teubner Archiv zur Mathematik* **9**, Teubner, Leipzig, 1988.

397 Weierstrass K., 1894-1927. *Mathematische Werke* (5 vol.), Mayer & Müller, Berlin, 1894-1927.

398 Weierstrass K., 1902. Theorie der Abelschen Transcendenten = [Weierstrass 1894-1927 **4**].

399 Weil A., 1932. Sur les séries de polynômes de deux variables complexes, *CRAS* **194** (1932), p.1304-1305.

400 Weil A., 1940. L'intégration dans les groupes topologiques, *Actualités Scientifiques et Industrielles* **1045**, Hermann, Paris, 1940.

401 Weil A., 1947. Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe, *Com. Math. Helv.* **20** (1947), p.110-116.

402 Weyl H., 1913. *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Teubner, Leipzig, 1913 = Die Idee der Riemannschen Fläche (hrsg. Von R. Remmert), *Teubner Archiv zur Mathematik* **5**, Teubner, Leipzig, 1997.

403 Weyl H., 1918. Reine Infinitesimalgeometrie, *MZ* **2** (1918), p.384-411 = *Gesammelte Abhandlungen* **2**, p.1-28.

404 Weyl H., 1919a. Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, *Annalen der Physik* **59** (1919), p.101-133 = *Gesammelte Abhandlungen* **2**, p.55-87.

405 Weyl H., 1919b. *Raum, Zeit, Materie* (2te, ungeanderte Auflage), Springer, Berlin, 1919.

406 Weyl H. 1922a. Das Raumproblem, *JDMV* **31** (1922), p.205-221 = *Gesammelte Abhandlungen* **2**, p.329-344.

407 Weyl H., 1922b. Die Einzigartigkeit der Pythagorischen Maβbestimmung, *Math. Zeit.* **12** (1922), p.114-146 = *Gesammelte Abhandlungen* **2**, p.263-295.

408 Weyl H., 1922c. Temps, Espace, Matière (trad. G. Juvet et R. Leroy), Blanchard, Paris, 1922.

409 Weyl H., 1923. *Mathematische Analyse des Raumproblems*, Springer, Berlin, 1923.

410 Weyl H., 1924a. Das Gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung, *Gött. Nachr.* 1924, p.218-224 = *Gesammelte Abhandlungen* **2**, p.461-467.

411 Weyl H., 1924b. Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuirlichen Gruppen, *Sitzungsbericht der Preuβischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1924, p.338-345 = *Gesammelte Abhandlungen* **2**, p.453-460.

412 Weyl H. 1925. Theorie der Darstellung kontinuirlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen I, II,III (resp. *MZ* **23** (1925), p.271-309, *MZ* **24** (1926), p.328-376), *MZ* **24** (1926), p.377-395), *Gesammelte Abhandlungen* **2**, p.543-647.

413 Weyl H., 1929. On the Foundation of Infinitesimal Geometry, *Bull. AMS* **35** (1929), p.716-725 = *Gesammelte Abhandlungen* **3**, p.207-216.

414 Weyl H., 1931. Geometrie und Physik, *Die Naturwissenschaften* **19**, p.49-58 (1931) = *Gesammelte Abhandlungen* **3**, p.336-345.

415 Weyl H., 1932. Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege mathematischen Verständnisses, *Unterrrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften* **38**, p.177-188 = *Gesammelte Abhandlungen* **3**, p.348-358.

416 Weyl H., 1939. *The Classical Groups. Their Invariants and Representations*, Princeton UP, Princeton, 1939.

417 Weyl, 1955. *Die Idee der Riemannschen Fläche* (3[te] vollständig umgearbeitete Auflage), Teubner, Stuttgart, 1955.

418 Weyl H., 1968. *Gesammelte Abhandlungen* (hrsg. Von K. Chandrasekharan), Springer, NY, 1968.

419 Whitehead J.H.C., 1932. Locally Homogeneous Spaces in Differential Geometry, *Ann. Math.* **33**(4) (1932), p.681-687.

420 Whitney H., 1934. Analytic Extensions of Differentiable Functions Defined in Closed Sets, *Trans. AMS* **36** (1934), p.63-89.

421 Whitney H., 1935a. Differentiable Manifolds in Euclidean Space, *Proc. NAS* **21** (1935), p.462-464.

422 Whitney H., 1935b. Sphere-Spaces, *Proc. NAS* **21** (1935), p.464-468.

423 Whitney H., 1936. Differentiable Manifolds, *Ann. Math.* **37**(3) (1936), p.645-680.

424 Whitney H., 1937. Topological Properties of Differentiable Manifolds, *Bull. AMS* **43** (1937), p.785-805.

425 Whitney H., 1940. On the Theory of Sphere-Bundles, *Proc. NAS* **26** (1940), p.148-153.

426 Wiener N., 1924. Four Books on Space (review), *Bull. AMS* **30** (1924), p.258-262.

427 Wirtinger W., 1901. Algebraische Funktionen und ihre Integrale, *Encyclopädie* **II.2** (1921-1928), p.115-175.

428 Zisman M., 1999. Fibre Bundles, Fiber Maps, [James 1999], p.605-630.