

Quatrième partie : le passage au global.

Chapitre 10. Variété du « passage au global » dans les années 1920.

I. Morse et le calcul des variations *in the large*.

Les liens entre les travaux de Morse et les mathématiciens que nous étudions jusqu'ici sont si étroits qu'on peut dire que sa formation comme chercheur est placée d'emblée sous le signe du global. En choisissant de nous pencher sur le cas des travaux de Morse dans les années 1920 nous illustrons des filiations importantes et indiquons une étape majeure dans le développement d'une Analyse globale. Nous voulons aussi examiner les conditions dans lesquelles Morse choisit de recourir explicitement au couple local/global en forgeant l'appellation « *calculus of variations in the large* ». Comme pour la géométrie différentielle ou la théorie des groupes de Lie, nous donnerons quelques indications – malheureusement limitées par notre grande ignorance du calcul des variations – sur la manière dont ce passage au global modifie des démarches classiques. Nous verrons aussi apparaître l'utilisation locale des outils d'*Analysis situs* jusqu'alors typiquement associés aux aspects globaux, au point qu'il semblait indifférent aux auteurs de parler d'étude globale ou de prise en compte des propriétés d'*Analysis situs*.

1. Un questionnement qualitatif en héritage.

Morse entre à Harvard et y obtient en 1915 son *Master's degree* avant d'y préparer une thèse sous la direction de Georges Birkhoff. Comme étudiant, il suit entre autres les cours d'Osgood¹, que Birkhoff avait lui aussi suivi à Harvard en 1903-1905. Le thème des premiers travaux de Morse et les principales références sur lesquelles il s'appuie montrent clairement son insertion dans une tradition de recherche qualitative en Analyse. Ainsi sa thèse porte-t-elle sur les géodésiques des surfaces de courbure négative, les deux références principales y sont le travail de Hadamard sur ce même sujet et l'article fondamental que Birkhoff publie en 1917 *Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom* [Birkhoff 1917], ce dernier travail

¹ Morse évoque le souvenir du cours d'Osgood de 1916. Dans son article *Relations between the critical points of a real function of n independent variables* il renvoie ponctuellement au *Lehrbuch* d'Osgood pour des techniques de topologie plane [Morse 1927 87]. Nous utilisons systématiquement à la pagination des *Collected Papers* [Morse 1987]

marquant lui-même une étape dans une jeune carrière – celle de Birkhoff – marquée par la lecture de Poincaré, en particulier des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Morse poursuit par des travaux sur les géodésiques des surfaces à courbure positive de genre strictement supérieur à un, en s'appuyant non seulement sur le travail de Poincaré *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes* [Poincaré 1905] mais aussi sur sa *Théorie des groupes fuchsien*s [Poincaré 1882] comme on le voit dans le passage suivant :

The surfaces to be considered are to be two-sided, closed surfaces of finite genus p , p greater than unity. They are to be without singularities. More specifically we will suppose that the points in the neighborhood of any point of the surface can be put into one to one correspondence with the points in the neighborhoods of some point in a plane, in such a manner that, for the neighborhood considered, the cartesian coördinates x, y and z of a point of the surface, be continuous functions of the cartesian coördinates, u, v , of the plane, provided with continuous partial derivatives up to the fourth order, while further

$$\left[\frac{D(xy)}{D(uv)} \right]^2 + \left[\frac{D(xz)}{D(uv)} \right]^2 + \left[\frac{D(yz)}{D(uv)} \right]^2 \neq 0$$

The given surface will eventually be mapped upon the interior of a unit circle, in a manner that will be one to one and continuous as far as the neighborhoods of any two corresponding points are concerned, but by a correspondence that will be one to infinity as a whole. Within that end in view there will now be defined a special group of linear transformations of a complex variable carrying the interior of the unit circle into itself. The method of definition will be similar to the method used by Poincaré in the article cited below. [Morse 1924 42]

La description sommaire des sous-variétés différentielles de \mathbf{R}^3 est exactement celle donnée quelques années plus tôt dans sa thèse, elle est moins précise que celle qu'on trouvait dans l'article de Hadamard de 1898 ou dans l'*Analysis Situs* de Poincaré en 1895. La description du lien entre la surface et un revêtement universel plan, localement 1-1 mais globalement 1- ∞ , est celle qu'on trouvait dans l'exposé d'Osgood en 1898, les termes *méta* en moins. Si l'on s'intéresse aux termes dans lesquels Morse introduit ce travail, c'est moins l'aspect global qui est directement commenté que le lien entre topologie et nature des géodésiques, la question étant :

(...) is it possible also on closed surfaces, to characterize the geodesics in terms of the topographical elements of the surface, that is to characterize the geodesics on any

particular closed surface in terms which would serve likewise for any other closed surface of the same genus ? [Morse 1924 41]

Cette question des géodésiques est elle-même inscrite par Morse, après Birkhoff, dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques et non en lien avec la géométrie riemannienne ; ces questions de dynamique étaient aussi celles dans lesquelles s'inscrivaient les travaux de Poincaré et Hadamard, avant que le terme – voire la notion – de système dynamique ne soit utilisé.

Pour comprendre la ligne de questionnement dans laquelle s'inscrit Morse on doit donner quelques éléments du travail de Birkhoff dans *Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom* (1917), sans d'ailleurs chercher à rendre compte pour elle-même de la totalité des thèmes et résultats contenus dans cet article, par exemple de l'interprétation dynamique du cas irréversible (partie I) ou de l'usage de la section de Poincaré (partie III). Dans la deuxième partie, Birkhoff cherche à établir l'existence d'orbites périodiques – dans le cas réversible, auquel nous nous limitons dans ces lignes et dans lequel les orbites peuvent être vues de manière purement géométrique comme des géodésiques d'une surface munie d'une métrique riemannienne – en reprenant les techniques qualitatives passant par la recherche de minimums puis en les dépassant ; il l'annonce ainsi dans son introduction :

A further suggestive criterion for periodic orbits in the reversible case has been given by Whittaker. (...) When we employ the geodesic interpretation, Whittaker's criterion may be formulated as follows : If the two boundaries of a ring on the surface have everywhere positive geodesic curvature toward the inner normal, there will exist a closed geodesic which makes a single circuit of the ring. It is intuitively manifest that the curve of minimum length around the ring furnishes such a geodesic.

(...) The inherent limitations of the minimum method is that it can only yield the completely unstable periodic orbits. The minimax method of Part II, which is applied also to the reversible case, yields a large and entirely different class of periodic orbits. [Birkhoff 1917 200].

Déjà dans l'utilisation des raisonnements usuels relatifs aux courbes minimisant l'intégrale J – interprétée comme une longueur –, Birkhoff étend la notion usuelle en introduisant, outre les minimums (locaux) les minimums « unilatéraux » :

We will say that an orbit is of minimum type if $J = J^$ is not less along any nearby closed curve than along the orbit ; if J is not less along any nearby closed curve on*

one side of the orbit, the orbit will be termed of unilateral minimum type. [Birkhoff 1917 219]

Quelques pages plus loin, Birkhoff présente le « principe algébrique » sur lequel repose la méthode du minimum, puis il généralise en introduisant d'autres points singuliers – points d'annulation de la différentielle – d'une fonction numérique de n variables réelles indépendantes que les minimums (locaux) :

The algebraic minimum principle upon which the criteria for the orbits of minimum type may be based is the following :

MINIMUM PRINCIPLE. If an analytic function J is defined throughout a continuum (in n -dimensional space) and is less than J' at some interior point P_0 , and if along the entire boundary either J exceeds J' or the normal derivative of J toward the interior region is negative, then there exists an interior point \bar{P} at which J has a relative minimum $\bar{J} < J'$; and such that a point P may vary continuously from P_0 to \bar{P} within the continuum while J remains less than J' .

(...) *Another type of points at which all the directional derivatives of a function J vanish is defined as follows : If J_0 is the value of J at a point P_0 and if the inequality $J < J_0 - \varepsilon$ where ε is small and positive defines more than one region near the point P_0 , then P_0 will be called a point of minimax. If the inequality defines k regions in the neighborhood of P_0 , that point will be said to be of multiplicity $k-1$.*

(...) MINIMAX PRINCIPLE. Let a function J be analytic within and continuous throughout a continuum (in n -dimensional space) possessing m -fold linear connectivity, and let there exist l points of minimum $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_l$ in the continuum. If, whenever a point P is varied from a point \bar{P}_i to a point \bar{P}_j IN the continuum with $J \leq J'$, it is possible to continuously modify the path of P into another path from \bar{P}_i to \bar{P}_j WITHIN the continuum along which we have $J \leq J'$, there exist at least $m+l-1$ points of minimax within the continuum. [Birkhoff 1917 229]

Le couple « *in / within* » renvoie ici au continuum (i.e. partie n -dimensionnelle connexe, ici implicitement bornée) bord inclus ou bord exclus ; l'hypothèse faisant jouer ce couple dans l'énoncé du principe du minimax est l'analogue des hypothèses sur le comportement au bord dans le principe maximum, elle sert à garantir que les points remarquables ne se trouvent pas au bord. On voit que le principe du minimum est un principe de minimisation continue sous contrainte (ici J inférieur à une valeur fixée), le principe du minimax va beaucoup plus loin : il

établit un résultat énumératif, liant le nombre des points de minimax à la topologie de la région. Le principe du minimax est établi en quelques lignes en étudiant la topologie des régions du type $J \leq C$ où C est une constante que l'on fait croître progressivement. Pour C assez petit le domaine est vide, puis des îlots isolés se dessinent autour des minimums relatifs ; lorsque C augmente, des îlots se rejoignent et les points de jonction sont justement les points de minimax. Ce mode de démonstration permet de comprendre rétrospectivement la définition topologique et non analytique des points de minimax, définition topologique locale puisque reposant sur le nombre de composantes connexes des domaines du type $J \leq J(P_0)$ au voisinage d'un point P_0 . C'est seulement après la démonstration du principe du minimax que Birkhoff aborde la question sous l'angle analytique :

It is interesting to determine the characteristic property which distinguishes points of minimax from other points at which all the directional derivatives vanish. At any point where these derivatives vanish, the function J may generally be expanded in the form

$$J = \rho \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2 + \dots,$$

where x_1, x_2, \dots, x_n are properly chosen variables. (...) Let us suppose that the first k coefficients are negative and the others positive. (...) the case $k = 1$ is the only case which can yield a minimax. [Birkhoff 1917 241]

La présence des pointillés après x_n^2 montre qu'il ne s'agit que d'un développement de Taylor et non du lemme de Morse, Birkhoff parle d'ailleurs toujours de surface quadrique approximant la surface de niveau près d'un point. Le principe du minimax est utilisé dans les paragraphes suivants, après définition des orbites de type minimax. Le lien entre les principes établis pour les fonctions numériques de n variables et la longueur des courbes sur une surface – au sens bidimensionnel usuel – est fait par un procédé classique, repris plus tard par Morse, consistant à partager chacune des courbes d'un type donné en des arcs de même longueur au moyen de n points intermédiaires, puis à remplacer chacun des arcs reliant deux points successifs par un arc de longueur minimale, ce qui est possible pour n assez grand. La fonctionnelle à étudier sur un espace d'arcs (ici d'orbites) est alors remplacée par une fonction des n points [Birkhoff 1917 243].

2. La théorie de Morse en dimension finie.

Nous présentons ici des éléments de la théorie proposée par Morse la première fois à l'*American Mathematical Society* en 1923, publiée en 1925 dans l'article *Relations Between*

the Critical Points of a Real Function of n Independent Variables [Morse 1925] puis légèrement raffinée en 1927 dans la communication *The Analysis and Analysis Situs of Regular n-spreads in (n+r)-space* [Morse 1927]. L'exposé initial part d'une lecture du principe du minimax de Birkhoff; par exemple pour une fonction f de deux variables indépendantes dans un domaine de « connectivité linéaire » R_1 (les connectivités de Morse sont les nombre de Betti), si M_0 désigne le nombre de points où f a un minimum relatif et M_1 celui des points critiques hyperboliques, Birkhoff a montré l'inégalité $M_1 \geq M_0 + R_1 - 2$ (inégalité (b)). Morse fait remarquer que, si M_2 désigne le nombre de points où un maximum local est atteint, on a même une égalité $M_0 - M_1 + M_2 = 2 - R_1$; ce résultat, nous dit Morse, se trouve dans le premier Mémoire de Poincaré sur les courbes définies par une équation différentielle. Dans le cas n -dimensionnel, Morse commente :

Upon reading Birkhoff's paper it occurred to the author that inasmuch as there are $n+1$ different types of the critical points (in a sense to be defined later) there ought to be relations analogous to (b) involving the number of the critical points of all kinds and not simply of just two kinds. [Morse 1925 78]

Il annonce donc une série d'inégalités généralisant l'inégalité du minimax en faisant intervenir tous les types de points singuliers et tous les ordres de connexion – s'appuyant sur l'*Analysis situs* de Veblen pour les notions topologiques – et établissant l'égalité pour la dimension maximale entre la somme alternée des nombres de points correspondants aux différents types de points singuliers et la somme alternée des ordres de connexion. On voit donc le travail se présenter sous un double parrainage, celui, proche, de Birkhoff, celui plus lointain de Poincaré et de sa théorie qualitative des équations différentielles. Peu de commentaire de niveau *méta*; ni les termes associés au local et au global, ni le terme de « qualitatif » ne sont utilisés dans cette introduction.

On connaît le déroulement de l'exposé. Morse ne travaille pas sur une variété abstraite ni sur une sous-variété m -dimensionnelle de \mathbf{R}^n (avec $m < n$) mais dans ce que Birkhoff appelait un « continuum ». Le décor est ainsi planté :

Let (x_1, x_2, \dots, x_n) be the coördinates of any point (X) in a euclidean space of n dimensions. In a finite part of this space let there be given an n -dimensional region Σ . The set of interior points of Σ will be denoted by R . At every point of R let there be defined a real, single-valued, continuous function of the x 's, namely $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Suppose further that in R the function possesses continuous partial derivatives with respect to the x 's of at least the first and second orders.

A point of R at which all of the first partial derivatives vanish will be called a critical point of f. Any other point of R will be called an ordinary point of f. The value of f at a critical point will be termed a critical value [Morse 1925 79]

Supposons le point critique à l'origine, le développement de Taylor l'écrit $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(0) + \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i x_j + r(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Morse montre en quelques lignes, en utilisant la « *theory of implicit functions* » que si la forme quadratique est non dégénérée – i.e. si le déterminant $|\alpha_{ij}|$ n'est pas nul – le point critique est isolé : « *in a sufficiently small neighborhood of any critical point there is no other critical point* » [Morse 1925 80]. Le « *Weierstrass cluster point theorem* » permet de conclure : « *in any closed region S all of whose points are points of R, there are at most a finite number of critical points of the given function.* » [Morse 1925 80]. En quelques pages est démontré ce que nous nommons depuis le Lemme de Morse :

Lemma 4. If $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ takes on the value c at a critical point $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = (X_0)$ then there exists a real transformation of the form

$$y_i = \sum_j c_{ij} (x_j - x_j^0), \quad |c_{ij}| \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

under which

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - c \equiv -y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2$$

where each c_{ij} is a continuous function of the x 's provided with continuous first partial derivatives in a sufficiently small neighborhood of (X_0) , and where k is some integer from 0 to n , inclusive. [Morse 1925 86]

Le caractère local du résultat provient de la nécessité, dans une démonstration consistant essentiellement à reproduire les réécritures usuelles dans le cas algébrique, de ne pas diviser par zéro ; la non nullité du déterminant des dérivées secondes en l'origine permet que chaque étape soit valide sur un voisinage de l'origine, car on a supposé f deux fois continûment dérivable. Le théorème des fonctions implicites garantit que la transformation $y = y(x)$ est bi-univoque au voisinage du point critique. L'entier k est appelé le type du point critique. Avant de passer à l'étude topologique des parties de R de la forme $f \leq c$ (c désignant une constante), Morse doit faire quelques hypothèses qu'il va appeler des conditions au bord, tout en reconnaissant que toutes n'en sont pas, au sens strict :

The boundary conditions α will be considered as fulfilled if among the $(n-1)$ -dimensional spreads

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.}$$

There exist one, say A, with the following properties :

I. *A is a closed manifold*

- II. *A forms the complete boundary of a portion of space, S, including A, all of whose points are points of R ;*
- III. *Each critical point of f is an interior point of S ;*
- IV. *The value of f on A is greater than the value of f at any interior point of S.*

[Morse 1925 86]

Après un Lemme sur le paramétrage des courbes intégrales du champ de gradient – courbes orthogonales aux surfaces de niveau – viennent les lemmes fondamentaux sur la comparaison entre les domaines délimités dans S par les inéquations du type $f \leq c$. Tout d’abord, lorsque c varie sans passer par une valeur critique, il ne se passe rien du point de vue topologique :

Lemma 6. Let a and b ($a < b$) be two ordinary values of f in S such that the interval between a and b contains only ordinary values of f; then the set of points in S satisfying $f \leq a$ can be put in one-to-one continuous correspondence with the set of points of S satisfying $f \leq b$. [Morse 1925 90]

Le cas d’un franchissement de valeur critique est étudié dans le cas des minimums relatifs, puis la méthode générale est décrite ainsi (on suppose que chaque valeur critique c n’est prise qu’en un point critique) :

It is the aim of this chapter to determine the difference between the connectivity numbers of the complex of points (X) satisfying

$$(52) \quad f \leq c - e^2$$

and the complex of points (X) satisfying

$$(53) \quad f \leq c + e^2.$$

To accomplish this we will first show that the complex (52) can be put into one-to-one correspondence with the complex (53) provided we exclude a properly chosen neighborhood of the given critical point. (...) The problem will then be resolved into one of determining the difference between connectivities of the complex (53) and of the complex (53) with the neighborhood excluded. [Morse 1925 94]

Si l’on parle de recollement plutôt que d’exclusion de voisinages, on peut étudier en quoi chaque type de point singulier correspond à un mode différent d’attachement de cellule au complexe $f \leq c - e^2$. On aboutit trente pages plus loin au

Theorem 8. Under the boundary conditions α the following relations exist between the set of numbers M_i , where M_i is the number of critical points of the i th type of f in S, and the set of connectivity numbers R_j of S ($i, j = 0, 1, \dots, n$) :

$$1 \leq (M_0 - R_0 + 1),$$

$$\begin{aligned}
I &\geq (M_0 - R_0 + 1) - (M_1 - R_1 + 1), \\
I &\leq (M_0 - R_0 + 1) - (M_1 - R_1 + 1) + (M_2 - R_2 + 1), \\
I &\geq (M_0 - R_0 + 1) - (M_1 - R_1 + 1) + (M_2 - R_2 + 1) - (M_3 - R_3 + 1), \\
&\dots\dots\dots \\
I &\leq [(M_0 - R_0 + 1) - + \dots + (-1)^{n-1} (M_{n-1} - R_{n-1} + 1)] (-1)^{n-1}, \\
I &= (M_0 - R_0 + 1) - + \dots + (-1)^n (M_n - R_n + 1). \quad [\text{Morse 1925 124}]
\end{aligned}$$

annoncé dans l'introduction.

Avant de passer en dimension infinie en considérant des espaces de courbes, mentionnons l'usage par Morse de sa théorie dans un cadre plus purement topologique. On trouve ainsi des résultats donnés sans démonstration dans un exposé de 1927, qui ont une saveur de topologie différentielle. Le cadre n'est plus celui des continus de \mathbf{R}^n mais des domaines à bord sur une variété sans bord. Encore Morse ne travaille-t-il pas dans un cadre de variétés abstraites mais dans celui des « *regular n-spreads* » :

We shall deal with n-spreads defined as follows. Let $(y) = (y_1, \dots, y_{n+r})$ be rectangular coördinates in an euclidean $(n+r)$ -space. $n > 1, r > 0$. Let $(u) = (u_1, \dots, u_n)$ be rectangular coördinates in an auxillary n -space. By an element of an n -spread in our $(n+r)$ -space will be meant a set of points homeomorphic with a set of points (u) within an $(n-1)$ sphere in the space (u) . By an n -spread Σ_n without boundary will be meant a closed set of points (y) , each one of which is at least one of a finite set of elements and all points of which neighboring a given point of Σ_n can be included in a single element of Σ_n .

An element will be said to be of class C^n if the y 's as functions of the u 's are of class C^n (...). An element will be called regular if it is of at least class C^n , and at least one of the jacobian of n of the y 's with respect to the u 's is not zero, while Σ_n will be called regular if capable of a representation by regular elements.

(...) By a regular region C_n on Σ_n will be meant a set of points on Σ_n closed in out $(n+r)$ -space and bounded on Σ_n by a set of regular $(n-1)$ spreads B. [Morse 1927 129]

La travail de fixation du vocabulaire est bien plus important qu'il n'était dans la thèse ou le premier article de 1917. En toute rigueur, les *n-spreads* ne sont pas nécessairement des sous-variétés de \mathbf{R}^{n+r} , des variétés immergées mais non plongées satisfont encore à la définition, bien qu'elles ne soient sans doute pas ce que Morse visait. Ce cadre nouveau permet à Morse de poursuivre le travail sur les points critiques non dégénérés d'une fonction numérique en mettant cette fois en avant le lien entre une région C_n et son bord B, en aboutissant à des relations purement topologiques entre les connectivités de C_n et celles de B : les relations

entre points critiques d'une fonction f sur C_n et sa restriction à B jouent un rôle d'intermédiaire. Citons à titre d'exemple le dernier corollaire, concernant les connectivités R_i et R_i' de deux régions C_n et C_n' complémentaires dans un n -spread ayant les connectivités de la n -sphère :

If $C_n + C_n' = \Sigma_n$ and Σ_n has the connectivities of an n -sphere, then

$$R_i = R_{n-i-1}' \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad [\text{Morse 1927 133}]$$

Le lien avec le théorème de dualité d'Alexander est mentionné.

3. L'héritage du calcul des variations *in the small*.

L'article de Morse intitulé *The Foundations of a theory in the Calculus of Variations in the Large* [Morse 1928], premier d'une longue série dont nous n'aborderons que les premiers moments, s'ouvre sur une critique qui sera récurrente :

The conventional object in a paper on the calculus of variations is the investigation of the conditions under which a maximum or a minimum of a given integral occurs.

[Morse 1928 134]

Il montre ensuite sur un exemple combien une recherche « conventionnelle » limitée aux extremums (locaux) passe à côté de trajectoires fondamentales, par exemple les solutions périodiques lorsqu'on cherche à minimiser l'intégrale de Jacobi. On retrouve cette alliance entre un « *in the large* » mis en avant comme le trait spécifique de la nouvelle théorie et la critique d'une conception classique dans une conférence faite par Morse en 1929 sur l'état de ses travaux ; après avoir rappelé l'exemple des solutions périodiques de l'équation d'Euler, il change de niveau de commentaire :

However, the real feeling of the author is that the classical calculus of variations is both logically and esthetically incomplete. [Morse 1929 211]

Avant d'entrer dans la théorie proposée par Morse, jetons un œil sur la théorie « classique » qu'il souhaite dépasser.

i. Le cours de Bolza.

Nous nous appuyons essentiellement sur les cours de calcul des variations d'Oskar Bolza (1857-1942), dont une première version, *Lectures on the Calculus of Variations*², paraît aux

² *Lectures on the Calculus of Variations*, The University of Chicago Press, 1904.

Presses Universitaires de Chicago en 1904 et une traduction allemande très retravaillée, *Vorlesungen über Variationsrechnung*³, paraît chez Teubner en 1909. La raison du choix de ce point de comparaison est double. Premièrement, cet ouvrage (dans sa version allemande) est la principale référence à laquelle Morse renvoie, dans ses articles sur le calcul des variations *in the large*, mais aussi dès ses premiers travaux sur les géodésiques. Deuxièmement, le parcours d'Oskar Bolza permet de rencontrer, après Osgood, une nouvelle figure des liens entre monde mathématique allemand et émergence d'une mathématique pure aux Etats-Unis. Allemand, Oskar Bolza étudie d'abord la physique à Berlin en suivant les cours de Helmholtz et Kirchhoff, puis les mathématiques dans la période 1878-1881, entre autres auprès de Schwarz à Göttingen et de Weierstrass à Berlin, dont il suit le cours de calcul des variations. Après quelques hésitations entre une carrière universitaire ou dans le secondaire, il soutient en 1886 une thèse dirigée par Klein sur les réduction des intégrales hyperelliptiques. Désireux de partir pour les Etats-Unis, il est finalement appelé à Chicago par Eliakim Moore en 1892, pour s'intégrer à l'équipe du tout nouveau département de mathématiques. Sur la période 1892-1910, passent par Chicago des étudiants tels Oswald Veblen et Georges Birkhoff – ce dernier ayant aussi étudié, on s'en souvient, à Harvard auprès d'Osgood et Bôcher. L'oeuvre scientifique de Bolza est entièrement consacrée au calcul des variations, ses cours demeurant des classiques réédités jusque dans les années 1960. Après une rapide mise en place d'éléments simples de vocabulaire relatifs à la topologie ensembliste⁴ et à la notion générale de fonction (univoque), Bolza consacre un paragraphe à la « *general formulation of the problem* » :

(...) *the simplest problem of the Calculus of variations may be formulated in the most general way as follows :*

There is given :

³ *Vorlesungen über Variationsrechnung*, Teubner, Leipzig, 1909.

⁴ Bolza nous donne un petit dictionnaire bilingue Anglais-Allemand relatif à certaines désignations de lieu, en renvoyant ponctuellement à l'*Encyclopädie* :

« *The « vicinity (δ) of a point $x_1=a_1, x_2=a_2, \dots, x_n=a_n$ » is the totality of points x_1, x_2, \dots, x_n satisfying the inequalities : $|x_1-a_1| < \delta, |x_2-a_2| < \delta, \dots, |x_n-a_n| < \delta$. The word « domain » will be used in the same sense as the German Bereich, i.e. synonymous with « sets of points » (compare E.IIA, p.44). The word « region » will be used : (a) for a « continuum », i.e., a set of points which is « connected » and made up exclusively of « inner » points ; in this case the boundary does not belong to the region (« open » region) ; (b) for a continuum together with its boundary (« closed » region) ; (c) for a continuum together with part of its boundary. The region may be finite or infinite ; it may also comprise the whole n -dimensional space. When we say : a curve lies « in » a region, we mean : each one of its points is a point of the region, not necessarily an inner point. » [Bolza 1904 5] Un peu plus loin : « *We shall say : a function has a certain property IN (or with more emphasis, « throughout ») a domain S of the independent variables, if it has the property in question at all points of the domain S , no matter whether they are interior or boundary points. A function of x_1, x_2, \dots, x_n has a certain property in the vicinity of a point $x_1=a_1, x_2=a_2, \dots, x_n=a_n$, if there exists a positive quantity δ such that the function has the property in the**

1. A well-defined infinitude M of curves, representable in the form $y=f(x)$, $x_0 \leq x \leq x_1$; the end points and their abscissae x_0, x_1 may vary from curve to curve. We shall refer to these curves as « admissible curves ».
2. A function $F(x,y,p)$ of three independent variables such that for every admissible curve C , the definite integral

$$J_C = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

has a determinate finite value.

The set of values J_C thus defined has always a lower limit, K , and an upper limit, G (finite or infinite). If the lower (upper) limit is finite, and if there exists an admissible curve C such that $J_C = K$, ($J_C = G$), the curve is said to furnish the absolute minimum (maximum) for the integral J (with respect to M).

(...) As in the theory of ordinary maxima and minima, the problem of the absolute extremum, which is the ultimate aim of the Calculus of Variations, is reducible to another problem which can be more easily attacked, viz., the problem of the relative extremum :

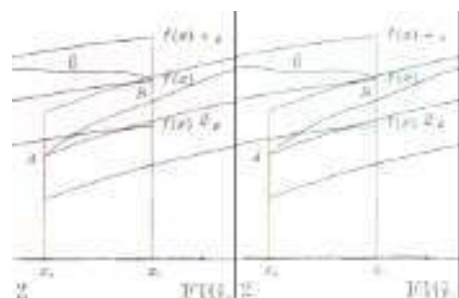
An admissible curve C is said to furnish a relative minimum (maximum) if there exist a « neighborhood U of the curve C », however small, such that the curve C furnishes an absolute minimum with respect to the totality M_1 of those curves of M which lie in this neighborhood. [Bolza 1904 9]

Après avoir stipulé que dans tout l'ouvrage « minimum » signifiera « minimum relatif », Bolza précise quelques pages plus loin cette notion de voisinage d'une courbe :

An admissible curve $C : y = f(x)$ minimizes the integral J , if there exists a positive quantity ρ such that $J_{\bar{C}} \geq J$ for every admissible curve $\bar{C} : \bar{y} = \bar{f}(x)$ which satisfies the inequality

$$|\bar{y} - y| < \rho \quad \text{for } x_0 \leq x \leq x_1.$$

This means geometrically that the curve \bar{C} lies in the interior of the strip of the x,y -plane between the two curves $y = f(x) + \rho$, $y = f(x) - \rho$ on the one hand, and the two lines $x = x_0$, $x = x_1$ on the other hand. This strip we shall call



vicinity (δ) of the point a_1, a_2, \dots, a_n . » [Bolza 1904 6]. Un peu plus loin : « By « set » we translate the German Punktmenge, the French ensemble. » [Bolza 1904 10]

« the neighborhood (ρ) of the curve C , » the points A and B being included, the rest of the boundary excluded. » [Bolza 1904 12]

Deux points de vocabulaire doivent encore être introduits avant de pouvoir lire Morse. La recherche de conditions nécessaires pour qu'une courbe admissible réalise un minimum (local) conduit à l'annulation de la variation première puis, après une intégration par parties, à l'équation d'Euler (ou Euler-Lagrange) :

Fundamental Theorem I : Every function y which minimizes or maximizes the integral

$$J_C = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

must satisfy the differential equation

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad [\text{Bolza 1904 22}]$$

Bolza, puis Morse, adoptent la terminologie introduite par Adolf Kneser⁵ – autre élève de Weierstrass – en appelant « *extremal* » toute solution de l'équation d'Euler, toute fonction annulant la variation première donc, qu'elle représente ou non un extremum relatif. La recherche des extremums parmi les extrémales conduit à étudier le signe de la seconde variation. L'examen du critère de Jacobi conduit à introduire la notion de points conjugués, notion que nous présentons ici dans son cadre géométrique⁶. Soit $C_0 : y = \phi(x, \gamma_0)$ une extrémale passant par (x_0, y_0) , le paramètre γ pouvant être vu comme une mesure de l'angle de la tangente en ce point ; on peut considérer la famille des extrémales de la forme $C_\gamma : y = \phi(x, \gamma)$ pour γ proche de γ_0 : si chacune (pour γ assez petit) recoupe la courbe initiale C_0 , le point conjugué de (x_0, y_0) sur C_0 est le premier point d'intersection de C_0 et de l'enveloppe des C_γ . Ce point joue le rôle suivant : si un arc d'extrémale relie deux points P et Q sans contenir le conjugué de P , alors la seconde variation sur cet arc est positive si $F_{yy'}$ l'est. Cette positivité n'est ni nécessaire ni suffisante pour que l'extrémale soit un minimum, mais on obtient des séries de conditions nécessaires dont (celle-ci importe à Morse) : si l'extrémité Q d'une extrémale se trouve au delà du point conjugué à son origine P , alors l'extrémale n'est ni un maximum ni un minimum [Bolza 1904 67]. On peut prendre l'exemple très parlant des géodésiques de la sphère, l'intégrale à minimiser étant la longueur et l'équation d'Euler étant l'équation caractéristique des géodésiques. Le conjugué d'un point P est le point antipodique P' , on voit que l'arc de grand cercle $PP'Q$ n'est pas le chemin minimal de P à Q .

⁵ [Kneser 1900]

⁶ Nous suivons la présentation de Bolza [Bolza 1909 60 et suiv.]

On peut s'arrêter un instant sur l'usage des termes *im Kleinen* / *im Grossen* chez Bolza. Ces termes ne sont pas d'emploi courant dans l'ouvrage de 1904 et de nombreux théorèmes locaux, ainsi le théorème des fonctions implicites ou le théorème d'existence pour les équations différentielles ordinaires sont cités avec beaucoup de soin lors de leur première utilisation, sans que le caractère local ne soit mentionné. Un théorème, cependant, est nommé par Bolza « *Existence of a minimum « im Kleinen* » », où l'on voit que, comme Osgood, il utilise le terme allemand. Il s'agit du théorème dont la présentation informelle est la suivante :

We add here an important theorem which has been used, without proof, by several authors in various investigations of the Calculus of Variations, viz., the theorem that under certain conditions two points can always be joined by a minimizing extremal, provided only that the two points are sufficiently near to each other. [Bolza 1904 146]

Ici « *minimizing* » a, comme dans tout le traité, le sens de minimum local dans l'espace des chemins, le *im Kleinen* qualifiant le théorème renvoie par contre au local *dans le plan* sur lequel sont tracées les courbes (Bolza ne travaille pas sur une surface quelconque). L'énoncé précis affirme l'existence, pour un point P_1 fixé, d'un nombre strictement positif ρ tel que tout point P_2 du cercle (P_1, ρ) lui est relié par une unique extrémale ;

This unique extremal P_1P_2 furnishes for the integral J a smaller value than any other ordinary curve \bar{C} which can be drawn from P_1 to P_2 and which lies entirely in the circle (P_1, ρ) . [Bolza 1904 147]

Si l'on lit l'index de ce cours, on voit que ce théorème y est référencé sous la rubrique « *existence theorem* » et appelé, comme dans le texte même, « *existence theorem « im Kleinen* » » ; l'index contient dans la même rubrique un « *existence theorem « im Grossen* » » [Bolza 1904 269]. Ce théorème n'est pas désigné comme tel dans le texte : Bolza entend par là les résultats récents de Hilbert⁷ sur l'existence de minimum absolu [Bolza 1904 245], des résultats globaux dans l'espace des chemins donc. Ce balancement entre *im Kleinen* et *im Grossen* a peut-être semblé naturel à l'auteur au moment de la rédaction de l'index sans s'être toutefois imposé avant ; il avait en effet été à plusieurs reprises question des résultats de Hilbert, sans qu'ils soient jamais qualifiés de *im Grossen*.

⁷ Hilbert *Über das Dirichlet'schen Prinzip*, Jahresbericht der D.M.V. vol. 8, 1899, p.184-188

ii. Le voisinage d'une fonction.

Ce bref éclairage sur le calcul des variations nous permet d'ouvrir une piste pour compléter le travail commencé dans la deuxième partie sur l'évolution de la notion de voisinage. On doit mentionner le travail critique mené par Ludwig Scheeffer dans un article *Über die Bedeutung der Begriffe « Maximum und Minimum » in der Variationsrechnung*, qui paraît en 1886 dans les *Mathematische Annalen* [Scheeffer 1886]. La critique ne porte pas sur le caractère local des extrémums cherchés par le calcul des variations et à aucun moment Scheeffer n'indique la direction d'un travail global. Il critique l'utilisation usuelle de la seconde variation pour établir que, parmi les chemins du plan reliant deux points donnés, un chemin annulant la première variation réalise un extremum. L'article s'ouvre sur l'exposé de la justification courante du critère donné par la variation seconde :

On pose $\Delta y = \kappa \eta$, où κ est une constante. Le développement de ΔJ devient alors $\kappa^2 \gamma_2 + \kappa^3 \gamma_3 + \dots$ (...). Lorsqu'une fonction déterminée η est choisie et qu'on continue à diminuer la constante κ , ΔJ finit toujours par prendre le signe de γ_2 ; donc si γ_2 est négatif, ΔJ finit aussi par l'être, autrement dit l'intégrale

$$\int_x^1 F(x, y + \kappa \eta, y' + \kappa \eta') dx,$$

considérée comme fonction du seul κ , possède en $\kappa = 0$ un maximum ; [Scheeffer 1886 198] ⁸

Le passage de la fonction $y(x)$ à une fonction proche en considérant $y(x) + \kappa \eta(x)$, où κ est une constante réelle et η une fonction s'annulant en x_0 et x_1 , traduit l'idée informelle de proximité par celle de variation unidimensionnelle dans l'espace fonctionnel, variation dépendant de l'unique paramètre κ . On retrouve la conception unidimensionnelle de la variation que relevait Jean Dieudonné, cette fois dans un espace abstrait ; c'est cela que critique Scheeffer :

Appelons une « η -famille » la multiplicité simplement infinie de toutes les courbes $y + \Delta y$ qui ne diffèrent que par la valeur de la constante κ ; on peut alors dire que la courbe y amène l'intégrale J à un minimum ou un maximum « à l'intérieur de la η -famille particulière » (...). On a l'habitude de poursuivre le raisonnement ainsi : si γ_2 est négatif pour une certaine fonction η alors il ne se présente pas dans cette η -famille

⁸ « Man setzt $\Delta y = \kappa \eta$, wo κ eine Constante ist. Dann geht die Entwicklung ΔJ über in die Entwicklung $\kappa^2 \gamma_2 + \kappa^3 \gamma_3 + \dots$ (...). Bei einer bestimmten Annahme der Function η und fortgesetzter Verkleinerung der Constante κ erhält dann ΔJ schliesslich immer das Vorzeichen von γ_2 ; ist also γ_2 negativ, so wird auch ΔJ schliesslich negativ, d.h. das Integral (...), betrachtet als Function von κ allein, hat für $\kappa=0$ ein Maximum ; »

particulière de minimum en y (...); si par contre γ_2 est positif pour toute fonction η alors il se présente dans chaque η -famille un minimum pour la courbe y , il doit donc aussi se présenter tout simplement un minimum, car une quelconque courbe peut être intégrée à une η -famille.

Mais la dernière partie de ce raisonnement, sur laquelle on fonde couramment le critère du minimum, contient une conclusion erronée, dont la mise au jour rend dans un premier temps très douteuse l'exactitude de ce critère. En effet, de ce qu'un minimum se présente à l'intérieur de chaque η -famille particulière, on ne peut déduire qu'il se présente un minimum, bien qu'il soit incontestable qu'une courbe quelconque donnée puisse être intégrée à une η -famille. [Scheffer 1886 198]⁹

Scheffer montre la fausseté du raisonnement au moyen d'un contre-exemple. L'objectif de l'article est de proposer une condition suffisante d'existence d'un minimum et s'appuyant toujours sur le signe de la seconde variation; il formule son critère en redéfinissant la notion de minimum :

C'est sur cette proposition qu'on doit fonder la définition précise de la notion de minimum en calcul des variations : « *Il existe un minimum si l'on peut déterminer deux grandeurs g et g' de telle sorte que l'intégrale J prenne par la fonction y une valeur plus petite qu'en toute les autres fonctions $y+\Delta y$ soumises aux restrictions $|\Delta y| < g$, $|\Delta y'| < g'$; ou – pour le dire géométriquement – l'intégrale est plus petite pour la courbe y que pour toutes les autres entièrement contenues dans une bande (déterminée par la grandeur g) contenant la courbe et faisant partout au plus un certain angle (déterminé par g') avec cette courbe.* » [Scheffer 1886 200]¹⁰

⁹ « Nennt man die einfach unendliche Mannigfaltigkeit aller derjenigen Curven $y+\Delta y$, welche sich von einander nur durch die Werthe der Constanten κ unterscheiden, eine « η -Schaar », so kann man sagen, die Curve y macht das Integral J zu einem Minimum oder Maximum « innerhalb der einzelnen η -Schaar » (...). Nun pflegt man weiter so zu überlegen : Ist γ_2 für irgend eine Function η negativ, so tritt schon innerhalb dieser einzelnen η -Schaar für die Curve y kein Minimum (...); wird dagegen γ_2 für alle Functionen η positiv, so ist die Curve y eine Minimum innerhalb jeder η -Schaar vorhanden, es muss daher, weil jede beliebige Curve sich einer η -Schaar einreihen lässt, auch ein Minimum überhaupt stattfinden. Der letzte Theil dieser Ueberlegung, auf welche man das Kriterium des Minimums zu gründen pflegt, enthält nun einen Fehlschluss, dessen Ausdeckung es zunächst sehr zweifelhaft macht, ob jenes Kriterium überhaupt richtig ist. Daraus nämlich, dass ein Minimum innerhalb jeder einzelnen η -Schaar stattfindet, folgt noch nicht, dass auch ein Minimum überhaupt eintritt, obschon es unbestreitbar ist, dass jede willkürlich gegebene Curve sich einer gewissen η -Schaar einreihen lässt.»

¹⁰ « Auf diesen Satz ist alsdann die präzise Definition des Begriffes Minimum für die Variationsrechnung zu gründen : « Ein Minimum ist vorhanden, wenn zwei Grössen g und g' so bestimmbar sind, dass das Integral J durch die Function y einen kleineren Werth erhält als durch alle Functionen $y+\Delta y$, welche den Beschränkungen $|\Delta y| < g$, $|\Delta y'| < g'$ unterliegen; oder wenn – geometrisch zu reden – das Integral J für die Curve y kleiner wird als für alle anderen, welche ganz in einem jene Curve enthaltenden (durch die Grösse g bestimmten) Flächenstreifen und zugleich überall Höchstens einen gewissen (durch g' bestimmten) Winkel mit jener Curve bilden. » »

Le terme de voisinage ne se présente pas sous la plume de Scheffer dans cet article. A terme, toutefois, ces réflexions conduisent à une évolution de la notion de voisinage d'une courbe donnée. Ainsi dans le cours de calcul des variations professé par Hadamard au Collège de France, publié en 1910 à partir de notes de Fréchet¹¹, on trouve une définition du voisinage plus raffinée que celle du manuel de Bolza :

Si la question qui nous occupe n'a pas reçu tout d'abord de solution satisfaisante, c'est avant tout, comme nous allons le voir, parce que cette question était mal posée et qu'avant d'y répondre, il est indispensable d'en préciser le sens.

S'il s'agissait d'extremum *absolu*, la difficulté ne se présenterait pas. (...) Mais, nous l'avons dit, les méthodes du calcul des variations ne nous permettront de reconnaître que l'extremum *relatif*: nous pouvons seulement nous proposer de rechercher si $y = \psi(x)$ donne à l'intégrale I une valeur plus petite ou plus grande que toute autre fonction *y suffisamment voisine de la première*.

Seulement, qu'entendons-nous par une fonction *voisine* d'une autre ?

(...) Nous sommes ainsi amenés à distinguer, avec Weierstrass, divers modes de voisinage et à introduire la définition plus générale suivante :

On dit que deux fonctions $\psi(x)$ et $\Psi(x)$ ont entre elles (dans l'intervalle où on les considère) un voisinage d'ordre p défini par le nombre positif ε , si l'on peut établir une correspondance univoque et réciproque entre les deux nombres x' , x'' variables, telle que l'on ait :

$$|\psi(x') - \Psi(x'')| < \varepsilon \quad , \quad \left| \frac{d\psi(x')}{dx'} - \frac{d\Psi(x'')}{dx''} \right| < \varepsilon \quad , \quad \dots \quad \left| \frac{d^p \psi(x')}{dx'^p} - \frac{d^p \Psi(x'')}{dx''^p} \right| < \varepsilon$$

avec

$$|x' - x''| < \varepsilon. \quad \text{[Hadamard 1910a 48]}$$

Le minimum tel que le définit Scheffer, relatif au voisinage d'ordre 1, est alors appelé minimum faible. Il ne semble pas nécessaire de souligner le lien avec le développement de la notion d'espace abstrait chez Fréchet.

Ce survol va nous permettre de mieux comprendre la spécificité de la démarche de Morse en calcul des variations. S'il va dépasser un questionnement traditionnel portant sur les extremums locaux – à la fois en passant au global et en étudiant d'autres points critiques que ceux correspondant aux extremums – il hérite d'une tradition de recherche dans laquelle les

¹¹ J. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations*, tome I, Hermann et fils, Paris, 1910.

aspects locaux ont été progressivement explicités dans le passage d'une notion naïve à des notions élaborées de voisinage.

4. *Calculus of variations in the large.*

Nous utilisons ici l'article *The Critical Points of Functions and the Calculus of Variations in the Large* [Morse 1929] qui reprend une conférence de 1928 dans laquelle Morse présente, sans démonstration, l'esprit et les résultats de sa nouvelle ligne de recherche. La recherche des extremums absolus – à la Hilbert – est bien une recherche *im Grossen* sur l'espace des chemins vérifiant certaines conditions au bord, mais c'est dans une autre direction que se développe la théorie de Morse. Elle est *in the large*, doublement, au sens où elle établit des liens entre la topologie de la variété sur laquelle sont tracés les chemins et la totalité des courbes vérifiant certaines conditions au bord. Comme dans le travail qualitatif et global de Poincaré sur les singularités d'équations différentielles ordinaires, le travail global fait apparaître des liens entre le système de toutes les singularités et la topologie de l'espace sur lequel se déploient les chemins. Au lieu de passer de la recherche – classique – des minimums relatifs à celle des minimums absolus, Morse prend en considération les extrémales ne réalisant pas de minimum relatif. Sur l'espace des chemins (suffisamment dérivables, par morceaux) vérifiant des conditions au bord, l'intégrale J est une fonction numérique : les extrémales sont l'analogie des points critiques de la théorie des fonctions numériques sur une variété compacte. Nous ferons référence à cette première théorie en parlant de théorie en dimension finie, par opposition à la théorie sur les espaces de chemins : la première fournit le modèle pour la seconde et l'on peut décrire le travail de Morse comme une recherche systématique de passerelles entre les deux situations.

Pour suivre l'analogie avec le cas fini, il faut savoir distinguer les extrémales représentant des points critiques dégénérés, et associer aux autres un indice. Si l'on se limite aux cas de courbes reliant deux extrémités fixées P et Q , le cas dégénéré est représenté par les extrémales dont les extrémités sont conjuguées. En repartant de la définition analytique des points conjugués, Morse leur associe un *ordre*, ordre d'annulation d'une fonction analytique. Lorsque les extrémités P et Q ne sont pas conjuguées, l'indice associé est égal à la somme des ordres des points conjugués de P sur l'extrémale [Morse 1929 214]. Cet indice est aussi caractérisé de manière géométrique en étudiant les déformations continues des courbes voisines de l'extrémale et sur lesquelles J est strictement moindre que J_0 (valeur sur l'extrémale) : si l'ordre de l'extrémale est k alors toute famille à moins de $k-1$ paramètres de

courbes reliant P et Q (avec toujours $J < J_0$) est déformable en l'un de ses éléments, mais au moins une famille à $k-1$ paramètres ne l'est pas [Morse 1929 215]. Ces notions sont à adapter lorsque d'autres conditions au bord sont imposées ; par exemple lorsqu'on fixe l'une des extrémités mais qu'on laisse l'autre libre de varier dans une sous-variété (en imposant que le chemin y arrive transversalement), la notion de point conjugué est à remplacer par celle de point focal. Une fois les notions locales mises en place, la poursuite de l'analogie avec le cas en dimension finie pose encore de nombreux problèmes techniques, ne serait-ce que parce qu'il peut se présenter des points critiques non dégénérés de tous types, et pour chacun un nombre infini de chemins ; les extrémales d'un type ne sont pas non plus nécessairement isolées mais peuvent se présenter sous forme de familles continûment paramétrées ; Morse utilise ici aussi la notion de déformation. Les inégalités cherchées porteront donc sur la « suite des nombres conjugués » (« *conjugate number sequence* ») M_0, M_1, M_k où M_i est le nombre (éventuellement infini) d'extrémales (ou de familles continues d'extrémales) de type i . Le pont entre la théorie finie et la théorie infinie est fait en utilisant l'artifice technique déjà signalé chez Birkhoff et consistant à intercaler des points suffisamment proches pour que leur segment en contienne pas plus d'un point conjugué, puis à considérer J comme fonction de ces points [Morse 1929 211]. Comme exemple de théorème *in the large*, Morse établit des inégalités relatives à la suite des nombres conjugués reliant deux points donnés (en position générique) dans région homéomorphe à une boule et convexe pour les extrémales [Morse 1929 216]. Il reprend ensuite la même question pour une région homéomorphe à l'espace compris entre deux $n-1$ sphères de l'espace n -dimensionnel et souligne la différence avec les résultats obtenus pour la boule : « *This theorem shows that both the region and the dimension notably affect the results.* » [Morse 1929 220]. Dans le cas des extrémales reliant transversalement un point donné à une sous-variété (dont il n'est pas un point focal), les inégalités relient la suite des nombres conjugués de la fonction J et les nombres de Betti de la sous-variété [Morse 1929 225], la théorie étant ici plus proche de la théorie en dimension finie des fonctions sur les « *n-spreads* » que ne l'est celle des extrémales reliant deux points fixes ou celle des extrémales librement homotopes à une courbe fermée donnée.

Si l'on se penche sur l'usage des termes *in the large* et *in the small*, on remarque tout d'abord qu'ils ne sont jamais définis ni même caractérisés ; le contexte en fait assez comprendre le sens. Nous citons plus haut la première ligne du premier article de la série [Morse 1928], où Morse décrit un calcul des variations « classique » dont l'objet est la recherche des extremums – implicitement locaux. Cela suffit à rendre compréhensible la première utilisation de *in the large* :

A second reason for the study of extremal segments and periodic extremals which do not furnish an extremum for the integral is that if the ultimate object sought is an extremum, the existence of such extrema is tied up « in the large » with the existence of extremals which do not furnish extrema. [Morse 1928 134]

On notera que dans cet article, *in the large* et *in the small* sont systématiquement entre guillemets, signe de l'emprunt métaphorique, de l'excursion dans un champ lexical non mathématique ; les guillemets disparaissent dans les articles suivants : l'intégration dans le vocabulaire mathématique de Morse est ainsi sanctionnée. On peut rapidement distinguer deux usages du couple *in the small / in the large* dans cette série d'articles de Morse. La première est, nous l'avons vu, de préciser ce qui distingue le point de vue de Morse en calcul des variations du point de vue «classique» local ; le couple permet de positionner globalement la nouvelle théorie par rapport à l'ancienne, de la positionner aussi avec une autre théorie, sans lien jusqu'ici avec le calcul des variations, l'*Analysis situs* : «*No theory in the large can well escape analysis situs*» [Morse 1929 211]. Au delà de cet usage dans le positionnement général de la théorie au sein des mathématiques, le couple sert à distinguer les niveaux de problèmes, à classer les théorèmes ... usage *méta* des plus classiques. Ainsi :

The theory is brought to a head in two applications, one « in the large » giving relations between different types of extremals, and one « in the small, » showing how the type of a given extremal may be characterized in a third way, in terms of the possibility or impossibility of deformation of m -parameter families of neighboring extremals into families of lower dimensionality. (...) It is believed that this deformation theory will serve as a basis for an even more extended theory « in the large ». [Morse 1928 135]

Comme variante du même usage, le couple sert à commenter la transposabilité de certaines parties de la théorie, ou le rôle d'hypothèses simplificatrices dans le passage du local au global. Par exemple :

The case $m=2$ is essentially general in so far as deformations in the small are concerned so that the deformation theory given in the paper on the case $m=2$ needs practically no change to hold for the general case. (...) In the case $m=2$ it appeared desirable in a first paper, in that part which dealt with the theory in the large, to assume that the region was covered by a proper field of extremals and to assume the extremals reversible. This had as a consequence that there were at most a finite set of extremals in S joining two points, but what was more important it reduced the

essential passage from the small to the large to a matter of about three pages. [Morse 1929 222]¹²

Rien dans ces usages *méta* ne surprend ; c'est la présence même de ces termes dans cette seconde série de travaux qui appelle commentaire. Les travaux précédents sur les géodésiques ou sur les points critiques d'une fonction dans \mathbf{R}^n ou sur une sous-variété de \mathbf{R}^n n'étaient pas moins globaux que le *calculus of variations in the large*, pourtant le couple *in the small / in the large* n'y était pas utilisé. Ils s'inscrivaient toutefois dans la continuité de travaux de Poincaré, Hadamard ou Birkhoff dans lesquels les termes *local / global* (ou général), *im Kleinen / im Grossen* ou *in the small / in the large* n'étaient pas non plus utilisés. Ce n'est pas le travail global qui appelle, à lui seul, la qualification ; c'est la rupture – au moins un radical changement de point de vue – par rapport à une problématique purement locale dont Morse hérite en calcul des variations qui le pousse à baptiser sa théorie *calculus of variations in the large*.

Signalons un développement ultérieur. Jusqu'en 1930 Morse utilisait le cours d'*Analysis situs* de Veblen comme référence, à partir de 1930 c'est *Topology* de Lefschetz qui lui succède. Avant même sa parution, Morse lui emprunte la notion d'homologie relative pour étendre sa propre théorie, d'abord en dimension finie : elle lui permet d'associer des invariants topologiques aux lieux des points critiques dégénérés. On le voit dans cette communication de 1930, où g désigne un tel lieu critique de la fonction f :

Let N and N^1 be two open neighborhoods of g of which N^1 is interior to N . By \overline{N} and $\overline{N^1}$ we shall mean those points of N and N^1 at which $f < 0$. In the analytic case, and much more generally the following sets of cycles exist for an N^1 sufficiently near g .

(α) A complete set $(a)_k$ of k -cycles on $\overline{N^1}$, independent on \overline{N} , dependent on N^1 .

(β) A complete set $(c)_k$ of k -cycles on N^1 independent on N of the k -cycles on \overline{N} .

(...) We define the k -th type number M_k of a critical set g to be the number of cycles in sets $(a)_{k-1}$ and $(c)_1$. [Morse 1930a 280]

Cet usage, déjà hautement non trivial, de l'homologie relative permet de définir des invariants topologiques locaux, enrichissant et brouillant à la fois le lien classique et exclusif entre *Analysis situs* et saisie du global. Quelques années plus tard, on voit Alexandroff faire le

¹² On observe le même usage dans l'introduction du *Second Paper* de 1929 : « *The first paper by the author dealt with the fixed end point problem in the small, and with the problem with one end point variable in general. The latter problem could be readily studied in the large because it corresponds to the problem of finding the critical points of a function whose critical points are in general isolated. Such is not the case in the fixed end point problem.* » [Morse 1930b 283]

même usage local de l'homologie relative, par exemple dans un article de 1935 intitulé *On local properties of closed sets*¹³.

II. Autour de Blaschke.

Toward the end of my graduate years, i.e., around 1934, I began to realize the importance of global differential geometry, called differential geometry in the large at the time. It was generally considered to be a difficult subject, both in the mathematical breadth required and in the depth of the problems. My main inspiration came from Wilhelm Blaschke's books on differential geometry. » [Chern 1992 3]

Ce souvenir d'apprentissage de Shiing-Shen Chern (1911-2004) nous invite, avant d'entrer avec Cartan et Weyl dans des questions et des chronologies plus précises, à considérer quelques exposés généraux qui, dans les années 1920, proposent une vue d'ensemble de la géométrie différentielle. La lecture du traité de Blaschke (1885-1962) montrera une prise de conscience de l'importance des problèmes globaux qui est loin d'être universellement partagée par ses confrères géomètres, une prise de conscience qui marque une certaine rupture avec la conception classique de la géométrie différentielle. Ce traité présente aussi une forme de passage au global qui n'est pas celle de Weyl ou Cartan, non plus que celle passant, dans les années 1930, par la mise en place de structures générales de variété et de variété fibrée sur une autre. Avant d'aborder le cas de Blaschke, nous présenterons quelques éléments de contextes illustrant la variété des images de la géométrie différentielle dans les années 20 et la grande variabilité de la prise en compte du couple local/global dans cette branche. Nous considérerons successivement un article de Struik sur l'histoire de la géométrie différentielle, les articles de l'*Encyclopädie* consacrés à la géométrie différentielle, enfin les traités d'Eisenhart. Après la lecture de Blaschke, nous terminerons sur les travaux de Hopf et Rinow sur le couplage entre propriétés riemanniennes (vues comme des données locales) et topologie globale : héritiers du cadre forgé par Blaschke, ils montrent un cas éminent de recherche entièrement construite autour du couple local/global.

¹³ L'article s'ouvre sur : « *The purpose of this paper is to give some applications of a fundamental notion introduced by Lefschetz in Analysis Situs – the notion of relative cycle. There is no branch in Topology in which this notion has not shown itself as one of the most fruitful. I believe, in particular, that relative cycles govern the whole theory of local invariants of point-sets (...).* » [Alexandroff 1935 1]

1. Des perspectives globales marginales dans une discipline en renouvellement.

i. Struik 1933.

La prise en compte d'aspects globaux et l'utilisation de descripteurs *méta* du type local/global sont très inégalement répartis dans les années 1920 dans les ouvrages généraux – manuels, exposés historiques – de géométrie différentielle. Pour mieux cerner la spécificité de Blaschke, prenons quelques points de repère montrant la diversité des approches dans une discipline très renouvelée par l'émergence des connexions et le lien avec la relativité générale. Un point de repère tardif mais intéressant est fourni par la série de conférences de Dirk Struik (1894-2000) sur l'histoire de la géométrie différentielle, prononcée au M.I.T. puis publiée sous la forme de deux articles dans la revue I.S.I.S., en 1933. L'article n'ambitionne pas de caractérisation générale de la discipline et les travaux sont présentés dans l'ordre chronologique, depuis le 17^e siècle jusqu'à la fin du 19^e siècle où l'exposé s'arrête. Dans la dernière partie, consacrée à un panorama de la période 1870-1900, la géométrie différentielle *in the large* est présentée comme l'une des théories contribuant au renouvellement de la discipline, aux côtés de la théorie des groupes de Lie et de la simplification de la géométrie n -dimensionnelle par le calcul différentiel absolu de Ricci-Curbastro et Levi-Civita. Pour la géométrie *in the large*, c'est sur Poincaré que s'appuie Struik :

An entire new field is represented by the work of Poincaré (1854-1912). In a series of papers under the title : Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, published in the Journal de Mathématiques from 1881-1886, the great physicist, astronomer and analyst undertook the study of the properties of integral curves of ordinary differential equations, their singular points and their behavior in the large. [Struik 1933b 188]

Après avoir présenté les différents types de points singuliers et la relation numérique les reliant au genre :

Analysis situs becomes definitely connected with differential geometry. Differential geometry in the large, so far appearing only in isolated remarks of Euler, Gauss, Jacobi, Minding, turns into an important and difficult science of its own. [Struik 1933b 188]

On trouve les éléments dont Chern a le souvenir : une branche nouvelle, difficile, liée à l'*Analysis situs*. Une branche si nouvelle que pour en donner un exemple avant 1900 Struik est obligé de prendre un travail qui n'aurait sans doute pas été considéré par son auteur ou ses

contemporains comme relevant de la géométrie différentielle ! Certes il s'agit de courbes sur les surfaces – un des sujets les plus classiques de la géométrie différentielle – mais la famille de problèmes dans laquelle le travail de Poincaré s'insère – au sens où les auteurs font explicitement référence aux travaux des autres – ne relève pas de la géométrie différentielle, même en 1933 : on pense aux travaux sur l'indice de Kronecker et sur la dégénérescence des champs de vecteurs, à des auteurs tels Hadamard, Brouwer, plus tard Hopf et Morse ; le lien avec ce qui s'appelle géométrie différentielle et s'enseigne sous ce nom est de cousinage et non d'appartenance. Si en 1933 le rôle des considérations d'*Analysis situs* dans des problèmes d'Analyse n'est plus à établir – du moins pour un élève de Schouten enseignant au M.I.T. – le choix de Struik d'arrêter son exposé en 1900 ne nous permet pas de savoir quels travaux récents il aurait considéré comme illustrant cette nouvelle direction de la géométrie différentielle ; on pourra sur ce point s'appuyer sur Blaschke. Notons que dans l'exposé de Struik, la géométrie différentielle *in the large* est juxtaposée aux autres directions nouvelles – en particulier celles données par les travaux de Lie ou de Levi-Civita – sans leur être liée ; une direction nouvelle oui, pas encore les origines d'une mathématique à la fois structurale et globale au sein de laquelle groupes de Lie, connexions et topologie des variétés se répondent. On verra que l'analyse de Struik relève clairement du cadre de lecture que les mathématiciens ont de l'évolution de leur discipline au début des années 1920, cadre auquel Weyl et Cartan s'arrachent progressivement. Indépendamment de la lecture que Struik fait de Poincaré ou de l'organisation des types de recherches en géométrie différentielle, notons que le terme de géométrie différentielle *in the large* est aussi utilisé comme outil de lecture historique. Ainsi, non seulement le travail de Gauss est présenté – et cette lecture est déjà classique dans le dernier tiers du 19^e siècle – comme fondateur d'une « *intrinsic differential geometry* » [Struik 1933b 161], mais le théorème sur la sommes des angles d'un triangle géodésique est aussi qualifié de « *one of the first examples of the so-called differential geometry in the large (...)* » [Struik 1933b 163]. De même, Struik écrit que, dans son travail sur le lieu des points conjugués d'un point donné, Jacobi « *touches on differential geometry in the large* ». On retrouve enfin le lien privilégié avec la topologie : « *Riemann's introduction of the connectivity of a manifold plays an important role in later differential geometry in the large.* » [Struik 1933b 176]. Comme le remarquait Morse dans la conférence de 1967 [Morse 1967], le sens de « *in the large* » se transmet par des exemples. Quant à l'objet dont la géométrie différentielle fait l'étude, l'exposé historique de Struik ne cherche pas à le caractériser : on voit successivement apparaître les courbes (planes ou gauches), les surfaces (dans l'espace), enfin la « *géométrie n-dimensionnelle* », à laquelle Struik associe bien classiquement les noms

de Riemann et de Grassmann : « *Riemann is certainly the originator of more-dimensional differential geometry, Grassmann however of the symbolical methods introduced for the study of this geometry.* » [Struik 1933b 177].

ii. L'*Encyclopädie*.

Cette identification d'une nouvelle direction de recherche en géométrie différentielle – qui n'est d'ailleurs qu'un point assez marginal de l'exposé de Struik – contraste nettement avec l'image de cette discipline telle qu'elle se dégage du volume III.3 de l'*Encyclopädie* qui lui est consacré. Le couple local/global ne joue de rôle ni central ni même marginal dans les quelque huit cents pages, ni dans les articles de la première vague rédigés dans les années 1902-1903, ni dans ceux de la deuxième vague (1921-1923), quelles que soient les différences d'esprit entre ces deux groupes d'articles. Le premier groupe traite, bien classiquement, des courbes planes ou gauches, des courbes sur une surface, de familles de courbes remarquables, de surfaces remarquables, du problème de l'application des surfaces ; un article de 1914 traite de la théorie géométrique des équations différentielles, très inspiré des travaux de Poincaré. En l'absence de toute organisation autour de local/global, il ne reste qu'à examiner certains points de contrôle, par exemple sur la définition des objets, la prise en compte explicite du caractère local des résultats, ou l'inscription thématique des recherches. L'article inaugural, rédigé par Mangoldt en 1902 s'ouvre sur une définition des courbes et surfaces (de l'espace usuel), définies soit implicitement soit par des paramétrisations ; l'objectif est ici simplement de distinguer les courbes et surfaces dont s'occupe la géométrie différentielle de ceux qui font l'objet des travaux des topologues en théorie des *Punktmannigfaltigkeiten* ou des ensembles de points : c'est sur le caractère suffisamment différentiable des fonctions intervenant dans les définitions qu'insiste Mangoldt, loin des situations pathologiques mises au jour par les topologues. Une caractérisation un peu plus précise de ces objets comme sous-variétés de \mathbf{R}^3 intervient ensuite lorsqu'il s'agit de distinguer les points singuliers des points ordinaires ; ainsi pour une courbe :

Un point P_0 d'une courbe l rapportée à un système de coordonnées parallèles $x, y, [z]$ du plan [de l'espace] est dit *ordinaire* lorsqu'on peut représenter tous les points de l d'un certain voisinage [*Nähe*] de P_0 par deux [trois] équations de la forme :

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t) \quad [, z = \psi(t)]$$

de sorte que :

- 1) au point P_0 ne correspond qu'une seule valeur t_0 de la variable auxiliaire t ;

- 2) les fonctions $\varphi(t)$, $\chi(t)$ [, $\psi(t)$] ont en t_0 le caractère des fonctions entières ;
- 3) les dérivées $\varphi'(t_0)$, $\chi'(t_0)$ [, $\psi'(t_0)$] ne sont pas simultanément nulles. [Mangoldt 1902 5]¹⁴

On voit que Mangoldt demande jusqu'à l'analyticité (caractère des fonctions entières). Les contre-exemples montrant l'insuffisance de ces critères pour éliminer des points doubles ne semblent pas connus et il est possible que la mention du caractère local du paramétrage soit déclenchée par la référence à une fonction analytique, donc à un rayon de convergence. L'objectif du passage est essentiellement terminologique, Mangoldt faisant état, conformément à l'esprit de l'*Encyclopädie*, de l'origine des appellations « point singulier », « point ordinaire », et de la variété des définitions. Il concède d'ailleurs que sa définition n'a pas à être suivie et que des points ordinaires selon sa définition peuvent légitimement être considérés comme singuliers dans certaines circonstances. Une centaine de pages plus loin, dans l'article de Lilienthal consacré aux courbes sur une surface, il est noté que Darboux a établi que les géodésiques d'une surface issues d'un point sont les lignes les plus courtes, du moins dans un certain domaine entourant le point (« *innerhalb eines gewissen den Punkt umgebenden Bereich* » [Lilienthal 1902 139]). On voit qu'aucun terme *méta* ne vient qualifier ce type de propriété, et la distinction entre local et global n'intervient pas non plus lorsque des travaux globaux sur les géodésiques, tels ceux de Hadamard, sont évoqués. On en trouve un écho et, dans une certaine mesure, une explication, dans l'article de Liebmann, de 1914, consacré à la théorie géométrique des équations différentielles. Les travaux de Poincaré sur les courbes définies par une équation différentielle ainsi que les travaux de Hadamard et Poincaré sur les géodésiques – respectivement des surfaces à courbure négative et des ellipsoïdes – sont réunis sous le thème de l'étude qualitative (« *qualitative Untersuchung* » [Liebmann 1914 504]). Le deuxième groupe d'articles, d'après-guerre, montre une évolution sensible des centres d'intérêt des géomètres : les articles de Weitzenböck et Berwald sont consacrés aux invariants algébriques et différentiels, respectivement. Rédigés une vingtaine d'années après l'introduction par Ricci-Curbastro et Levi-Civita de la dérivation covariante, quelques années après l'introduction par Schouten et Levi-Civita du transport parallèle et sa généralisation par Weyl par la notion de connexion affine – nous y reviendrons en détail –, ces articles prennent acte du rapprochement entre la géométrie différentielle classique et la

¹⁴ « Ein Punkt P_0 einer auf ein ebenes [räumliches] System von Parallelkoordinaten $x, y [z]$ bezogenen Linie l heisst gewöhnlich, wenn man die Gesamtheit aller in einer gewissen Nähe von P_0 gelegene Punkte von l durch zwei [drei] Gleichungen von der Form : (...) so darstellen kann, dass : 1) dem Punkt P_0 nur ein Wert t_0 der Hülfsveränderlichen t entspricht; 2) die Funktionen (...) an der Stelle t_0 den Charakter ganzer Funktionen haben; 3) die Ableitungen (...) nicht sämtlich gleich null sind. »

théorie des invariants différentiels qui s'étaient jusque là développées parallèlement ¹⁵. La construction de l'article de Berwald (1923) fait bien comprendre l'esprit de ces nouvelles questions : la première partie concerne les invariants des groupes continus usuels (invariants métriques, relatifs aux géométries non euclidiennes, affines (i.e. linéaires), projectifs, conformes) et se réclame du Programme d'Erlangen ; la deuxième partie, plus abstraite, reprend pour l'essentiel les travaux sur les connexions, en particulier la *Mathematische Analyse des Raumproblems* de Weyl [Weyl 1923]. On trouve dans cette deuxième partie une caractérisation des variétés riemanniennes générales » dont on fait l'étude :

Concept de variété riemannienne. (...) Une *multiplicité n-fois étendue* peut être caractérisée par ceci que chacun de ses éléments (« points ») peut être fixé par la donnée de n grandeurs continûment variables (« coordonnées ») x_1, x_2, \dots, x_n ($a_\lambda \leq x_\lambda \leq b_\lambda$; $\lambda = 1, 2, \dots, n$). n grandeurs $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ fournissent une détermination également valide si elles sont fonctions inversiblement continues des x_1, x_2, \dots, x_n . Le passage d'un système de coordonnées x à un autre x^* est par conséquent fourni par les équations (continûment inversibles)

$$(1) \quad x_\lambda = f_\lambda(x_1^*, \dots, x_n^*) .$$

Il est nécessaire dans ce qui suit que les f_λ soient des fonctions réelles (au moins) une fois continûment différentiables, dont le déterminant fonctionnel $\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$ ne s'annule pas dans le domaine considéré. Il s'agit donc ici de l'invariance par transformations ponctuelles arbitraires, continues, inversiblement univoques et différentiables, et cette invariance, en vertu de la dernière hypothèse, fonde l'invariance dans l'infiniment petit envers les transformations linéaires homogènes ou affinités. [Berwald 1923 126] ¹⁶

Le but de cette définition n'est pas de présenter la notion de carte locale, encore moins les règles de transition entre deux cartes d'un atlas ; il est de préciser le « groupe » dont on étudie

¹⁵ Nous nous appuyons sur [Scholz 1999b].

¹⁶ « Begriff einer Riemannschen Mannigfaltigkeit : (...) Ein n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit läßt sich charakterisieren, daß das einzelne zu ihn gehörige Element („Punkt“) durch Angabe von n stetig veränderlichen Größen („Koordinaten“) x_1, x_2, \dots, x_n ($a_\lambda \leq x_\lambda \leq b_\lambda$; $\lambda = 1, 2, \dots, n$) festgelegt werden kann. Als gleichberechtigte Bestimmungstücke gelten n Größen $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$, welche umkehrbar stetige Funktionen der x_1, x_2, \dots, x_n sind. Der Übergang von einem Koordinatensystem x zu einem anderen x^* wird demnach durch die (stetige umkehrbare) Gleichungen (1) $x_\lambda = f_\lambda(x_1^*, \dots, x_n^*)$ ($\lambda = 1, 2, \dots, n$) vermittelt. Für das foldende ist es erforderlich, daß die f_λ (mindestens) einmal stetig differenzierbare reelle Funktionen sind, deren funktionaldeterminante $\partial(f_1, f_2, \dots, f_n) / \partial(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ im betrachteten Bereich von Null verschieden ist. Es handelt sich hier somit um die Invarianz gegenüber stetigen umkehrbar-eindeutigen und differenzierbaren Punkttransformationen, und dieses Invarianz begründet vermöge der letzten Voraussetzungen im Unendlichkleinen die Invarianz gegenüber den homogenen linearen Transformationen oder Affinität. »

les invariants, conformément à la philosophie générale tirée du Programme d'Erlangen. Le travail sera un travail purement local, la non nullité du déterminant jacobien suffit donc. Le « groupe » est ici le pseudo-groupe (ainsi que le nommeront Veblen et Whitehead en 1932) des difféomorphismes locaux, c'est sur lui que repose la théorie classique des invariants différentiels aussi bien que la théorie de Lie. Berwald accompagne toutefois sa définition d'une note infrapaginale parfaitement explicite: « multiplicité n -fois étendue » renvoie à

A vrai dire seulement un morceau d'une telle multiplicité. Nous n'abordons pas la connexion [Zusammenhang] im Großen. [Berwald 1923 126]¹⁷

Comme chez Struik dix ans plus tard, les travaux de Riemann et Grassmann sont cités comme les deux origines de cette notion abstraite de multiplicité n -fois étendue.

iii. Le cours de Eisenhart.

Cette perspective locale demeure, en moins explicite toutefois, dans le manuel *Riemannian Geometry* de Luther Eisenhart (1876-1965), qui paraît en 1926. La carrière scientifique d'Eisenhart commence sous le signe de Darboux, dont la *Théorie des surfaces* lui suggère le thème de sa thèse, la déformation des surfaces. En poste à Princeton à partir de 1900, il publie en 1909 *A Treatise in the Differential Geometry of Curves and Surfaces* dans lequel il reprend de Darboux la méthode du trièdre mobile. Après une série de conférences en 1925 comme *Colloquium Lecturer* de l'A.M.S. sur les développements récents en géométrie différentielle, il publie son cours de géométrie riemannienne (au sens large : la forme quadratique n'a pas à être positive, englobant ainsi le cas qui se présente en relativité¹⁸) puis un cours de géométrie non-riemannienne l'année suivante. Le projet est présenté dans la préface :

The recent physical interpretation of intrinsic differential geometry of space has stimulated the study of the subject. Riemann proposed the generalization, to space of any orders, of the theory of surfaces, as developed by Gauss, and introduced certain fundamental ideas in this general theory. From time to time important contributions to the theory were made by Bianchi, Beltrami, Christoffel, Schur, Voss and others, and Ricci coördinated and extended the theory with the use of tensor analysis and his Absolute Calculus. Recently there has been an extensive study of Riemannian Geometry, and this book aims to present the existing theory. [Eisenhart 1926 iii]

¹⁷ « *Eigentlich ein Stück einer solchen. Auf des Zusammenhang der Mannigfaltigkeit im Großen gehen wir nicht ein.* »

¹⁸ Dans tout notre travail, sauf mention du contraire, « relativité » renvoie à la relativité générale.

L'intrinsèque, le calcul différentiel absolu, la relativité : telles sont les références explicites (nul ne peut ignorer de quelle « *recent physical interpretation* » il est question !). Mais peut-être l'évocation des « *fundamental ideas* » introduites par Riemann est-elle une allusion à l'*Analysis situs* ? La lecture de l'ouvrage montre que non : la perspective dans laquelle écrit Eisenhart est certes n -dimensionnelle, mais son attention se porte entièrement sur le formalisme tensoriel et le calcul différentiel absolu. Une autre des directions « modernes » relevées par Struik n'est pas pointée dans la préface d'Eisenhart, celle relative aux groupes de Lie. Celle-ci trouve toutefois sa place dans le cours d'Eisenhart, qui consacre le dernier chapitre aux « *groups of motions* » : il y expose les rudiments de la théorie de Lie, la notion de sous-variété invariante sous l'action d'un groupe ainsi que des travaux de Killing sur les groupes des variétés à courbure constante. Ainsi, parmi les trois directions « modernes » pointées par Struik, seule manque la géométrie différentielle *in the large* et son lien avec l'*Analysis situs*. A aucun moment dans l'ouvrage des termes comme *in the small* ou *in the large* ne viennent d'ailleurs sous la plume de Eisenhart. C'est qu'en dépit des innovations techniques et conceptuelles nombreuses qu'il intègre à sa présentation de l'état « moderne » de la géométrie différentielle – aspects n -dimensionnels, tenseurs et calcul différentiel absolu, métriques non nécessairement positives, groupes continus de transformations et leurs transformations infinitésimales –, Eisenhart écrit encore la géométrie différentielle dans le style de Darboux, un style universellement et implicitement local. L'étude porte sur les « espaces » et « sous-espaces » (« *spaces* », « *sub-spaces* »), « *space* » désignant moins une structure ou un objet qu'une façon de voir :

Any n independent variables x^i , where i takes the values 1 to n , may be thought of as the coördinates of an n -dimensional space V_n in the sense that each set of values of the variables defines a point V_n . [Eisenhart 1926 1]

On ne voit d'ailleurs guère ce qui pousserait Eisenhart à aller plus loin puisque la théorie qu'il développe est entièrement – et implicitement – locale. La notion première est celle de changement de coordonnées :

Suppose that we have n independent real functions ϕ^j of the variables x^1, x^2, \dots, x^n . A necessary and sufficient condition that the functions may be independent is that the Jacobian does not vanish identically ; that is (...). If we put

$$(1.2) \quad x^i = \phi^i(x^1, \dots, x^n) \quad (i=1, \dots, n),$$

the quantities x^i are another set of coördinates of the space (...). This the equations (1.2) define a transformation of coördinates of the space V_n . In consequence of the assumption (1.1) the x 's are expressible in terms of the x 's. [Eisenhart 1926 1]

Ces premières lignes ne diffèrent guère de celles du traité de Lie sur les groupes de transformations, à ceci près que ce dernier – nous y reviendrons – était parfaitement explicite sur le caractère local de l'énoncé et les précautions techniques nécessaires à la composition de ces « transformations ». L'objectif d'Eisenhart est d'introduire les notions de tenseurs co- et contravariants, la dérivation covariante et les formes différentielles quadratiques non dégénérées : sa notion de transformation lui suffit. L'énoncé du théorème de redressement des champs de vecteurs contravariants prend la même forme ; après avoir écrit le système différentiel, il énonce :

When a contravariant vector is given, a system of coördinates can be chosen in terms of which all the components but one of the vector are equal to zero. [Eisenhart 1926 5]

On trouve dans l'ouvrage de rares mentions de restriction d'un domaine d'étude mais, bien classiquement, le contexte est l'utilisation d'un développement en série entière ; par exemple pour établir l'existence d'une géodésique passant par un point donné avec un vecteur vitesse donné (ξ^i) :

The domain of convergence of these series depends evidently upon the expression for g_{ij} and the value of ξ^i . However for sufficiently small values of s they define an integral curve (...). [Eisenhart 1926 52]

Le travail sur les isométries n'utilise que les notions de condition d'intégrabilité – faisant apparaître le tenseur de courbure – et le dénombrement des paramètres dont dépend la solution, les familles continûment paramétrées d'isométries étant appelées des « mouvements » (« *motions* ») et non simplement des transformations isométriques. Ces éléments structurent aussi l'univers théorique au sein duquel Eisenhart poursuit des recherches plus personnelles. Si l'on quitte un instant son manuel de géométrie riemannienne « moderne » pour lire ses articles de recherche de la même période, on le voit développer, avec Veblen, la « *geometry of paths* », qu'ils introduisent ainsi dans un article de 1922 :

One of the simplest way of generalizing Euclidean Geometry is to start by assuming (1) that the space considered is an n -dimensional manifold in the sense of Analysis Situs, and (2) that in this space there exists a system of curves called paths which, like the straight lines in a Euclidean space, serve as means of finding one's way about. These paths are defined as the solutions of a system of differential equations,

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad , \quad (1.1)$$

in which the Γ_{jk}^i are analytic functions of (x^1, x^2, \dots, x^n) (...). [Eisenhart, Veblen 1922 19]

L'un des objectifs de cette théorie est de déterminer les conditions sur les Γ_{jk}^i pour que les « *paths* » soient les géodésiques d'une structure riemannienne (au sens large). L'expression « *manifold in the sense of Analysis Situs* » pourrait faire penser à une approche globale, d'autant plus que l'article est co-rédigé par Veblen, l'année même où il publie ses *Colloquium Lectures* sur la topologie. La lecture de l'article montre qu'il n'en est rien, cette allusion à l'*Analysis Situs* étant directement reprise au Weyl de *Raum, Zeit, Materie*, cité dans l'article, et ne renvoie qu'à la notion locale (ou plutôt : en deçà du local / global) de multiplicité n -dimensionnelle réelle munie de la topologie usuelle. Cette orientation purement locale est aussi manifeste dans une note de 1922, au titre pourtant prometteur : *Condition that a Tensor be the Curl of a Vector*. Le théorème démontré est :

A necessary and sufficient condition that a covariant skew-symmetric tensor A_{ij} in a space of any order n be expressible in terms of n functions φ_i in the form

$$(1) \quad A_{ij} = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}$$

is that

$$(2) \quad \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial A_{ki}}{\partial x^j} = 0 \quad (i, j, k=1, \dots, n). \quad [\text{Eisenhart}$$

1922 425]

Le résultat est démontré par récurrence sur la dimension, après avoir remarqué qu'à trois dimensions les conditions (2) sont les conditions d'intégrabilité.

Notre but dans cette brève présentation n'est bien sûr pas de nier l'intérêt de la géométrie de différentielle locale ! Ce qui nous frappe chez Eisenhart c'est moins le caractère local du travail que son caractère *implicitement* local, chez un mathématicien – peut-être pas le plus brillant de sa génération – côtoyant et parfois travaillant avec Veblen ou Birkhoff, lecteur assidu de Weyl ; chez un mathématicien qui, bon connaisseur de la géométrie différentielle classique représentée par les traités des années 1880-90 de Darboux et Bianchi, intègre un grand nombre des développements récents : calcul tensoriel, dérivation covariante et transport parallèle dans des cadres non nécessairement riemanniens, groupes de transformations continus ; dans un manuel que nous n'avons pas choisi pour son caractère exceptionnellement

pauvre et sa position marginale : il est au contraire souvent cité comme le manuel de référence sur ces questions dans les années 1930. La géométrie différentielle d'Eisenhart est certes n -dimensionnelle, intrinsèque et non nécessairement métrique, mais un point n'a pas varié dans l'image de la discipline telle qu'on la trouvait dans la préface du premier tome des *Leçons de Darboux sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal* [Darboux 1887] : le charme de la géométrie différentielle réside dans l'interaction entre la théorie des équations aux dérivées partielles et des familles de problèmes et propriétés géométriques [Darboux 1887 v]. Le traitement universellement et implicitement locale non seulement s'inscrit dans la forme de questionnement léguée par la géométrie différentielle au 19^e siècle, mais s'appuie aussi sur une certaine conception de l'Analyse. Il est significatif que le traité d'Analyse auquel Eisenhart renvoie systématiquement, en particulier pour les théorèmes d'existence, soit le manuel de Goursat. Une raison contingente est sans doute sa disponibilité en langue anglaise, Osgood en ayant fait faire une traduction pour l'usage dans les universités américaines [Goursat 1904]. Le théorème des fonctions implicites y est ainsi énoncé : soit une relation (1) $F(x,y,z) = 0$

Let $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ be a set of values which satisfy the equation (1), and let us suppose that the function F , together with its first derivatives, is continuous in the neighborhood of this set of values. If the derivative F_z does not vanish for $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, there exists one and only one continuous function of the independent variables x and y which satisfies the equation (1), and which assumes the value z_0 when x and y assume the values x_0 and y_0 respectively. [Goursat 1904 35]

Les considérations locales n'apparaissent que dans la démonstration, parfaitement rigoureuse, n'utilisant pas d'hypothèse d'analyticité, conforme en tout point à ce qu'on trouvait dans le cours de Dini en 1878. L'accessibilité en langue anglaise ne guide pas seule Eisenhart vers Goursat ; ainsi c'est aux *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* [Goursat 1891] qu'il renvoie ses lecteurs, par exemple lorsqu'il énonce au moyen des crochets de Poisson la condition d'intégrabilité d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaire du premier ordre [Eisenhart 1926 70]. Les énoncés dans ce dernier ouvrage sont explicitement locaux, du moins pour les théorèmes d'existence, car seules les solutions analytiques sont recherchées : sans surprise, la recherche d'une boule de convergence déclenche l'apparition du mot « voisinage ». Après la démonstration du théorème général d'existence, une amorce de problématique globale est suggérée :

Le théorème général, que nous venons de démontrer, ne prouve l'existence de l'intégrale que dans un domaine limité environnant le point a_1, a_2, \dots, a_n . Mais, d'après

ce que l'on sait sur fonctions analytiques, on pourra, en général, en choisissant dans le domaine de a_1, a_2, \dots, a_n , un autre point a_1', a_2', \dots, a_n' , démontrer l'existence de l'intégrale dans un nouveau domaine entourant le point a_1', a_2', \dots, a_n' , et non contenu *tout entier* dans le précédent, et, en continuant de la sorte, on pourra, *en général*, atteindre tel point donné à l'avance que l'on voudra $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. [Goursat 1891 16]

Mais ce cours introductif – destiné aux agrégatifs – ne s'engage pas dans cette voie. Il n'est pas inintéressant d'observer que le lien entre cours d'Analyse et cours de géométrie différentielle est, chez Eisenhart, presque inverse de celui qui s'imposera après 1945. Certes, en choisissant Goursat, Eisenhart ne prend pas le cours d'Analyse dans lequel les problèmes globaux sont les plus mis en avant – c'est un euphémisme –, mais le caractère local des résultats y est toutefois assez explicite, sinon toujours dans les énoncés, du moins dans les démonstrations. Mais Eisenhart ne reprend dans son manuel que les résultats, il renvoie à Goursat pour les démonstrations : ce jeu de renvoi fait disparaître du cours de géométrie différentielle toute allusion au caractère local des énoncés ! C'est un jeu inverse de celui qui se met en place, on le verra dans la partie suivante, dans les manuels d'introduction à la géométrie différentielle qui partent de la notion abstraite et globale de variété : on y rappelle souvent les quelques grands théorèmes d'Analyse qui seront utilisés – théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale, théorèmes d'existence pour les équations différentielles ordinaires et parfois aux dérivées partielles –, en insistant sur leur caractère local que la géométrie différentielle cherche « évidemment » à dépasser.

2. Blaschke : une structuration didactique par *im Kleinen / im Grossen*

i. Le Traité de géométrie différentielle.

La manuel de Blaschke (1885-1962) est en un sens moins « moderne » que celui d'Eisenhart, du moins pour les trois tomes publiés : dans la collection de monographies de références de Springer, *Der Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, paraissent au début des années 20 les *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen der Relativitätstheorie* ; le tome I, *Elementare Differentialgeometrie*, en 1921 ; le tome II, *Affine Differentialgeometrie*, en 1923 ; *Differentialgeometrie des Kreise und Kugeln*, en 1929 ; un quatrième tome devait être consacré aux conceptions de Riemann et Weyl et aux fondements géométriques de la théorie de la relativité, il ne paraîtra pas. Laissons Blaschke présenter lui-même son projet, dans la préface du premier volume :

Ce traité doit comprendre trois petits volumes. Le premier donne une introduction succincte à la géométrie différentielle « élémentaire », c'est-à-dire aux invariants de déplacements, le second à la géométrie différentielle *affine*. Le troisième sera consacré aux métriques [*Maßbestimmungen*] de Riemann et Weyl, intimement liées à la théorie de la gravité d'Einstein. [Blaschke 1924 vii] ¹⁹

On voit que le projet initial ne comprenait pas le tome consacré à la sphère et au cercle. Les trois tomes finalement publiés sont donc construits autour de la notion d'invariant d'un groupe de transformation, ce que Blaschke revendique avec un certain lyrisme dès la préface de la première édition du premier tome : le Programme d'Erlangen le guidera comme un « phare » [Blaschke 1924 vii]. Cet aspect rapproche le traité de Blaschke de l'exposé que Berwald donne en 1923 pour l'*Encyclopädie* sur les *Differentialinvarianten in der Geometrie – Riemannsche Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen*. Cette organisation par les groupes apparaît clairement dans le tome II, consacré à la géométrie différentielle « affine » : en suivant le plan du premier tome, Blaschke reprend les notions usuelles (dépendant du groupe des déplacements) et s'attache à définir des notions analogues invariantes sous l'action du groupe spécial linéaire $SL(3, \mathbf{R})$. La suite de la préface de Blaschke aborde un autre thème :

La géométrie différentielle étudie les propriétés des lignes et surfaces courbes dans l'infiniment petit [*im unendlich Kleinen*]. Les différents facettes du concept de « courbure » sont ainsi au premier plan, de sorte qu'on parle aussi de « théorie de la courbure ». En géométrie algébrique, au contraire, on considère d'emblée les figures dans toute leur extension [*in ihrer Gesamterstreckung*]. Mais la géométrie différentielle ne renonce pas absolument à étudier, elle aussi, la géométrie des figures dans leur totalité [*im ganzen*], et les questions de « géométrie différentielle *im großen* », qui relie les propriétés microscopiques aux macroscopiques, font partie des questions les plus attirantes mais aussi les plus difficiles de notre science. [Blaschke 1924 vii] ²⁰

¹⁹ « Dieses Lehrbuch soll drei Bändchen umfassen. Der erste bringt eine knappe Darstellung der „elementaren“, das heißt bewegungsinvarianten, das zweite die affine Differentialgeometrie. Das dritte soll den Maßbestimmungen von Riemann und Weyl gewidmet sein, die auf innigste mit Einsteins Theorie der Schwere zusammenhängen. »

²⁰ « Die Differentialgeometrie untersucht die Eigenschaften der krummen Linien und Flächen im unendlich Kleinen. Die verschiedene Wendungen des Begriffs „Krümmung“ stehen dabei im Vordergrund, so daß man auch von „Krümmungstheorie“ spricht. Im Gegensatz dazu betrachtet man in der algebraischen Geometrie die geometrischen Gebilde von vorneherein in ihrer Gesamterstreckung. Indessen verzichtet auch die Differentialgeometrie durchaus nicht auf das Studium der geometrischen Figuren im ganzen und die Fragen der „Differentialgeometrie im großen“, die die mikroskopischen mit den makroskopischen Eigenschaften verknüpfen, gehören zu den reizvollsten, allerdings auch zu den schwierigsten Fragen unsrer Wissenschaft. »

Le traité de Blaschke se présente certes comme modeste et peu « moderne », sinon par sa référence au programme d'Erlangen : il y est question des courbes et surfaces – notions qu'on ne cherche pas à définir - de l'espace à trois dimensions, nul calcul tensoriel n'intervient, pas plus que la théorie des équations aux dérivées partielles. Mais il organise systématiquement un corpus classique autour d'un couple *im Kleinen / im Großen*, où d'ailleurs *im Kleinen* renvoie, on le voit clairement dès la préface, à l'infinitésimal et non au local. Il n'est pas indifférent que dans la préface au traité de Darboux la théorie des surfaces soit mise en relation – presque ancillaire – avec la théorie des équations aux dérivées partielles alors que dans la préface de Blaschke ce soit la géométrie algébrique qui serve de point de comparaison. Le goût et la culture de Blaschke le portent à des perspectives différentes sur la géométrie différentielle : fils d'un professeur de Géométrie, il étudie l'architecture à la *Technische Hochschule* de Graz avant de se consacrer aux mathématiques ; son manuel de géométrie différentielle est dédié à son maître Study, dont il partage l'intérêt pour la théorie des invariants *algébriques* et les démarches énumératives en géométrie algébrique, s'écartant nettement du traitement par les invariants différentiels promu par les successeurs de Lie.

On ne peut se dispenser d'un petit relevé des apparitions que *im Kleinen / im Großen* dans les deux premiers tomes. L'usage *méta* est particulièrement frappant dans l'introduction à la théorie classique « affine » des courbes planes : comme dans le *Lehrbuch* d'Osgood un balancement est marqué dans le titre même des chapitres, le tome II s'ouvrant ainsi sur un premier chapitre intitulé *Ebene Kurven im Kleinen* puis poursuivant par un chapitre sur les *Ebene Kurven im Großen* ; *im Kleinen* a clairement ici un sens infinitésimal. Nous nous en tenons dans la suite de notre lecture au seul tome I, le tome II étant construit sur le même plan. Le premier résultat *im Großen* se présente en théorie des courbes planes, dès la page 15, comme une application de la version plane des formules de Frenet (formules (85)) :

Nous voulons donner une application des formules (85) pour démontrer pour la première fois un théorème de *géométrie différentielle* « *im großen* ». Soit $\mathbf{r}(s)$ une courbe fermée plane, dont l'image tangente est un cercle parcouru une seule fois toujours dans le même sens. Une telle courbe, pour laquelle on doit avoir $1:\rho > 0$, et qui n'est coupée par une droite qu'en au plus deux points, sera appelée un *ovale* ou un *œuf* [« *Eilinie* » oder « *Oval* »]. L'ellipse en est un exemple. Un point de la courbe où la courbure $\kappa = 1:\rho$ a sa dérivée qui s'annule ($\kappa' = 0$) doit être appelée un « sommet » [« *Scheitel* »]. (...)

Nous allons maintenant montrer :

(**Théorème des quatre sommets**). Le nombre minimum de sommets d'un ovale est quatre. [Blaschke 1924 15] ²¹

Le chapitre sur les courbes se termine sur une liste d'exercices et problèmes qui, dans la première édition, ne sont pas explicitement classés ; dans la seconde édition ils sont par contre regroupés en trois familles, la troisième étant « résultats sur les *courbes im großen* : ces huit exercices portent soit sur les ovales soit sur des généralisations partielles à d'autres courbes fermées du théorème des quatre sommets. Le deuxième chapitre est consacré à une série de problèmes de calculs des variations (« *Extreme bei Kurven* ») dont le paradigme est la réponse par le cercle au problème isopérimétrique. Ces problèmes de courbes extrémales ou, en fin d'ouvrage, de surface extrémales – surfaces minimales s'appuyant sur un contour donné, surface d'aire donnée bordant un domaine de volume maximal – ne sont pas qualifiés de *im großen*. Les trois chapitres centraux sont organisés autour des deux couples intrinsèque/extrinsèque et *im Kleinen / im Großen* : le chapitre III, intitulé « premiers éléments de théorie des surfaces » (« *Anfangsgründe der Flächentheorie* ») est consacré à la théorie extrinsèque ; le chapitre IV porte sur la « géométrie sur une surface » (« *Geometrie auf einer Fläche* ») ; le chapitre V présente des « questions de théorie *im großen* des surfaces » (« *Fragen der Flächentheorie im großen* »). Ce chapitre V présente une série de problèmes qui, sans toujours s'enchaîner strictement, possèdent un net air de famille. Le premier est celui de la rigidité de la sphère, introduit de manière à en faire comprendre la caractère global :

Un morceau suffisamment petit de surface admet toujours des déformations conservant les longueurs [*längentreu*]. Il en va autrement pour les surfaces dans toute leur extension, du moins dès que nous nous en tenons à hypothèses de régularité faites plus haut. En 1838 déjà F. Minding a formulé la conjecture selon laquelle la sphère vue comme un tout est « rigide ». Ce n'est qu'en 1899 que Liebmann a pu asseoir cette supposition. (...) Comme, d'après Gauss, la courbure est conservée par application isométrique, on peut formuler ainsi la proposition de Liebmann :

La seule surface fermée de courbure gaussienne constante est la sphère. [Blaschke 1924 127] ²²

²¹ « Wir wollen von den Formeln (85) eine Anwendung machen und zum erstenmal einen Lehrsatz aus der Differentialgeometrie „im großen“ beweisen. Es sei $r(s)$ eine geschlossene ebene Kurve, deren Tangentenbild ein einmals stets im gleichen Sinn umlaufender Kreis ist. Eine solche Kurve, für die $1:\rho$ etwa >0 sein soll, und die von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten wird, nennt man eine „Eilinie“ oder „Oval“. Eine Beispiel einer Eilinie ist die Ellipse. Ein Punkt der Kurve, in dem die Krümmung $\kappa = 1:\rho$ verschwindende Ableitung ($\kappa' = 0$) hat, soll ein „Scheitel“ genannt werden. (...) Es soll nun gezeigt werden : (**Vierscheitelsatz**). Die Mindestzahl der Scheitel einer Eilinie ist vier. »

Blaschke montre tout de suite que la démonstration n'a en fait à porter que sur les cas à courbure constante positive, les cas $K = 0$ et $K < 0$ étant incompatibles avec l'hypothèse de « fermeture » (i.e. compacité). Il reprend quelques pages plus loin les mêmes calculs pour établir le résultat de Hilbert selon lequel il n'existe pas de surface sans bord et partout régulière de courbure constante -1 [Blaschke 1924 130]. La plupart des résultats de ce chapitre concerne l'analogie bidimensionnel des ovales, les ellipsoïdes ou « surfaces ovales » (« *Eiflächen* »), surfaces analytiques fermées, convexes, de courbure partout strictement positive. Sont établis la caractérisation de la sphère parmi les ellipsoïdes par la constance de la courbure moyenne, la rigidité des ellipsoïdes ; plusieurs questions relatives aux géodésiques des ellipsoïdes sont abordées, s'appuyant sur les travaux de Poincaré²³ et Herglotz (qui montre que tout ellipsoïde admet au moins trois géodésiques fermées) ; Blaschke fait enfin allusion aux liens avec les équations de la Dynamique dans les travaux de Birkhoff.

Il pourrait par ailleurs sembler que Blaschke demeure dans un point de vue implicitement local lorsqu'il ne travaille pas explicitement dans le global, qu'il utilise donc un couple infinitésimal / local à l'exclusion de local / global. C'est l'impression laissée, par exemple, par le premier passage utilisant le critère jacobien d'inversion, au moment de la définition de la notion de transformation conforme [Blaschke 1924 65]. Cet exemple est toutefois isolé, et Blaschke se montre dans l'ensemble attentif aux distinctions entre l'infinitésimal, le local et le global. Si l'on regarde, par exemple, son traitement de l'isométrie des surfaces à courbure constante, le caractère local est explicite alors qu'il était complètement implicite chez Eisenhart ; après avoir mis, dans un système de coordonnées adaptées, le ds^2 d'un espace à courbure gaussienne constante sous forme canonique – montré, donc, qu'il n'y a essentiellement qu'un ds^2 pour un espace de courbure constante donnée –, il conclut :

Les résultats ainsi obtenus contiennent : *deux morceaux suffisamment petits de deux surface de même courbure gaussienne constante sont toujours applicables l'un sur l'autre en conservant les longueurs.* [Blaschke 1924 101]²⁴

Il signale immédiatement que ce n'est plus vrai pour les surfaces considérées dans toute leur étendue et renvoie aux résultats de rigidité démontrés au chapitre suivant. De même note-t-il,

²² « Ein genügend kleines Flächenstück läßt stets längentreue Formänderungen zu. Anders ist es bei Flächen in ihrer Gesamterstreckung, wenigstens, sobald wir an unseren früheren Regularitätsvoraussetzungen festhalten. So hat schon 1838 F. Minding als Vermutung ausgesprochen daß die Kugelfläche als Ganzes „starr“ ist. Aber erst 1899 hat H. Liebmann diese Behauptung begründen können. (...) Da nach Gauß bei längentreuen Abbildungen das Krümmungsmaß erhalten bleibt, läßt sich der Satz Liebmanns so fassen : Die einzige geschlossene Fläche mit festem Gaußischen Krümmungsmaß ist die Kugel. »

²³ H. Poincaré *Sur les géodésiques des surfaces convexes*, Am. Trans. 6 (1905), p.237-274

²⁴ « In den damit gewonnenen Ergebnissen ist festhalten : Zwei genügend kleine Stücke zweier Flächen mit demselben festen Gaußischen Krümmungsmaß sind stets aufeinander längentreu abbildbar. »

après avoir démontré la formule de Gauss sur les angles d'un triangle géodésique, que ce résultat est intimement lié aux géométries non-euclidiennes, qui sont des géométries « réalisées, du moins *im Kleinen*, sur des surfaces de courbure constante »²⁵ [Blaschke 1924 109]. Ici, exceptionnellement, *im Kleinen* a un sens local et non infinitésimal. Si en des endroits pertinents le caractère local d'un résultat est mentionné, c'est en évoquant un « morceau suffisamment petit », ni (sauf exception) *im Kleinen* au sens local ni aucun des termes de la série « *Umgebung* », « *Nähe* », « *Nachbarschaft* » n'apparaissent sous la plume de Blaschke dans ce traité. Chaque fois que le caractère local est signalé, l'auteur renvoie à l'un des points étudiés dans le chapitre consacré aux questions globales (applicabilité des surfaces à courbure constante p.101, prolongement des champs de géodésiques p. 95); on voit par là que ce chapitre, qui pourrait être vu de prime abord comme une collection de résultats assez particuliers sur les ellipsoïdes, sert aussi de réservoir de contre-exemples permettant, dans tout l'ouvrage, de faire sentir ce qui distingue un résultat local d'un résultat global. L'opposition entre local et global est une opposition pour laquelle il n'y a pas de terme chez Blaschke – *im Kleinen* renvoyant aux aspects infinitésimaux classiques en géométrie différentielle ; le caractère local des résultats usuels semble moins découler du caractère local des théorèmes d'existence fonctionnels sur lesquels ils reposent – Blaschke est, on l'a signalé, bien discret sur ce point – que de l'existence des travaux établissant leur non validité globale dans des cas particuliers.

On pourrait s'étonner de voir l'*Analysis situs* ne jouer aucun rôle dans le traité de Blaschke, tant l'association entre propriété d'*Analysis situs* et propriété *im Großen* semble une évidence du temps – du moins pour qui s'intéresse aux aspects globaux. Si l'on exclut l'hypothèse usuelle de fermeture-compacité, relevant de la topologie ensembliste, on trouve des aspects topologiques en deux points. Ainsi observe-t-on un travail, plus précis que de coutume, de référence au domaine de validité à l'occasion de l'adaptation aux surfaces de la formule de Green, habituellement donnée dans le plan. Blaschke commence par définir les deux opérateurs ∇ et Δ de Beltrami, fidèle à un souci de travail intrinsèque ; il les utilise ensuite pour établir l'analogue de la formule de Green dans un domaine *simplement connexe* d'une surface courbe [Blaschke 1924 115]. L'autre passage faisant une allusion à la topologie traite des conséquences du théorème de Gauss-Bonnet. Après avoir établi le lien, pour un domaine simplement connexe bordé par une courbe analytique par morceau, entre intégrale curviligne de la courbure géodésique et intégrale de surface de la courbure gaussienne, Blaschke en

²⁵ « die wenigstens im Kleinen auf den Flächen festen Krümmungsmaßes verwirklicht werden (...) »

déduit la courbure totale d'une sphère et d'un tore triangulés en triangles géodésiques. Le lien entre surface au sens topologique (considérée à homéomorphisme près) et surface munie d'une métrique riemannienne est fait clairement mais sans introduire de termes comme « topologie », *Analysis situs* ou « homéomorphisme » :

Prenons comme premier exemple une surface « ayant la connexion de la sphère », qui est donc l'image univoque et continue de la sphère. [Blaschke 1924 110] ²⁶

Après traitement rapide de la sphère puis du tore, le paragraphe se termine un peu allusivement :

De manière entièrement similaire, grâce au « découpage canonique », on trouve pour une surface fermée, qu'on peut se représenter comme une sphère à p « anses »

$$\int K.d\sigma = 4\pi(1-p).$$

L'entier p est appelé d'après Riemann (1857) le « genre » de la surface. [Blaschke 1924 111] ²⁷

Pas plus que le lien entre la géométrie différentielle et l'*Analysis situs*, l'appartenance de ce résultat à la famille des résultats *im Großen* n'est notée par Blaschke. Tout au plus voit-on, très ponctuellement, la formule de Gauss-Bonnet être utilisée comme outil dans les problèmes *im Großen* du chapitre V.

ii. De « nouveaux courants ».

Quelques années après ce traité, Blaschke rédige pour l'Union des Mathématiciens Allemands deux rapports, le premier sur les *Questions topologiques en géométrie différentielle* [Blaschke 1929a], le second sur les *Nouveaux courants en géométrie différentielle* [Blaschke 1931]. Dès l'introduction du deuxième article, Blaschke reconnaît qu'on y trouvera pas ce que le titre semble promettre :

D'après le titre de ma contribution vous allez supposer que je vais décrire les développements connus par la géométrie différentielle dans les dernières décennies, ravivée sous l'impulsion de la théorie de la relativité, développements qui ont conduit à une meilleure connaissance et une profonde généralisation de la géométrie de

²⁶ « Nehmen wir als erstes Beispiel eine Fläche „vom Zusammenhang der Kugel“, die also ein eindeutiges und stetiges Abbild der Kugeloberfläche ist. »

²⁷ « Ganz entsprechend findet man für eine geschlossene Fläche, die man sich als eine Kugel mit p „Henkeln“ denken kann, durch die „kanonische Zerschneidung“ $\int K.d\sigma = 4\pi(1-p)$. Die ganze Zahl p nennt man nach Riemann (1857) das „Geschlecht“ der Fläche. »

Riemann par l'étude du « parallélisme », ainsi qu'à un renouveau de l'étude des groupes continus de Lie. Je crois qu'il serait présomptueux de ma part de vouloir faire un rapport sur ces progrès, surtout en la présence de quelqu'un de bien plus compétent, Monsieur E. Cartan. [Blaschke 1931 1] ²⁸

Les deux articles présentent en effet les travaux menés à Hambourg autour de Blaschke lui-même sur sa géométrie des « tissus » (« *Gewebe* »), ses « mathématiques des textiles » (« *Textilmathematik* » [Blaschke 1931 2]). Du point de vue technique, l'objet principal d'étude est la famille de courbes (« *Kurvenschar* ») : l'image biunivoque et bicontinue d'un faisceau de droites parallèles dans le plan est une famille de courbes (ou 1-famille), pour deux familles on obtient un réseau de courbes (« *Kurvennetz* »), pour trois familles un tissu. Si tout réseau est équivalent à tout autre, il n'en va pas de même des tissus, et la théorie cherche les invariants associés. Lorsqu'on ajoute des hypothèses de différentiabilité on peut faire le lien avec la « *geometry of paths* » de Veblen, Eisenhart et Weyl ; on peut aussi associer une transformation infinitésimale à chacune des trois familles du tissu et faire ainsi le lien avec la théorie des groupes de Lie. Nous nous intéressons moins ici au contenu de ces travaux qu'à la manière dont Blaschke les décrit et les insère dans le champ de la géométrie différentielle. Le principe fondamental d'organisation est toujours celui hérité de Klein :

Depuis environ une décennie et demie, je cherche à appliquer à la géométrie différentielle les principes ordonnateurs de la théorie des groupes tirés du Programme d'Erlangen de Felix Klein. Ce chemin m'amène finalement à la « géométrie différentielle topologique », c'est-à-dire à considérer les propriétés de géométrie infinitésimale qui sont invariantes par ces transformations ponctuelles qu'on dit « arbitraires ». [Blaschke 1929a 193] ²⁹

Cette notion de transformation ponctuelle arbitraire recouvre très explicitement chez Blaschke celle d'homéomorphisme local :

Par « *application topologique* » on entend une transformation ponctuelle qui est, ainsi que son inverse, univoque et continue. Il n'est question dans tout ce qui suit, je

²⁸ « Nach dem Titel meines Vortrages werden Sie vermuten, daß ich Ihnen die Entwicklung schildern will, die die Differentialgeometrie in den letzten Jahrzehnten erfahren hat, neubelebt durch den Anstoß der Relativitätstheorie, eine Entwicklung, die zu einer vertieften Kenntnis und weitgehenden Verallgemeinerung der Geometrie Riemanns durch das Studium des „Parallelismus“ und zur Neuerforschung der stetigen Gruppen Lies geführt hat. Ich glaube, es wäre anmaßend von mir, wenn ich Ihnen über diese Fortschritte berichten wollte, zumal in Gegenwart eines dazu viel Berufeneren, des Herrn E. Cartan. »

²⁹ « Seit etwa anderthalb Jahrzehnten versuche ich, auf die Differentialgeometrie die ordnenden gruppentheoretischen Prinzipien aus Felix Kleins Erlanger Programm anzuwenden. Auf diesem Wege bin ich schließlich dazu gekommen, „topologische Differentialgeometrie“ zu treiben, die gegenüber sogenannten „beliebigen“ Punkttransformationen invariant sind. »

souhaite le souligner une fois pour toute, que de « *géométrie im Kleinen* ». [Blaschke 1929a 194]³⁰

Le sens de cette dernière expression est précisé quelques lignes plus loin en évoquant un voisinage suffisamment petit de chaque point [Blaschke 1929a 195]. On trouve une caractérisation un peu plus précise dans le deuxième article : après avoir défini la notion de *n*-famille de courbes (dans un disque ou un domaine convexe pour les familles)

Nous voulons à présent étudier les propriétés topologiques des *n*-tissus, en l'occurrence les propriétés « *im Kleinen* », celles qui demeurent par réduction arbitraire du domaine pour peu que demeure conservée la convexité. [Blaschke 1931 3]³¹

On voit Blaschke toujours explicite, au niveau *méta* d'ailleurs plus qu'au niveau technique, sur le niveau infinitésimal, local ou global du type de recherche qu'il mène ; toujours en décalage aussi par rapport aux grandes tendances. Ainsi dans le voyait-on, dès 1921, insister sur l'importance des recherches globales en géométrie différentielle élémentaire des courbes et surfaces de l'espace et découper rétrospectivement un corpus de questions et de résultats *im Großen* dans la géométrie différentielle du 19^e siècle, au moment même où un univers de tenseurs et de connexions envahit la géométrie différentielle, sans souci du global. Pour ce qui est du lien entre géométrie différentielle et topologie, on voit Blaschke, avec sa géométrie des tissus, orienter paradoxalement le questionnement topologique vers le local. Il le note en 1931, au détour d'une justification terminologique :

La désignation de « géométrie différentielle » n'est d'ailleurs justifiée qu'en ceci que les figures ne sont considérées qu'en un sens « local » [*lokal*] – en un sens précisé plus loin (§2) –, « *im Kleinen* » donc, alors que la topologie usuelle traite des propriétés « intégrales », donc des figures « *im Großen* ». [Blaschke 1931 2]³²

Ce travail topologique local emprunte des voies bien différentes de celles de Morse. Ce dernier se saisissait de la toute nouvelle homologie relative pour associer des invariants purement topologiques à des points singuliers ; la veine dans laquelle s'inscrit ce travail de Blaschke est plus classique, cherchant à articuler le niveau infinitésimal (car des hypothèses

³⁰ « Unter einer „topologischen Abbildung“ versteht man eine Punkttransformation, die mit ihrer Umkehrung eindeutig und stetig ist. Dabei wird sich alles Folgendes, wie ich ein für allemal hervorheben möchte, auf „Geometrie im Kleinen“ beziehen. »

³¹ « Wir wollen nun topologische Eigenschaften dieser *n*-Gewebe aufsuchen, und zwar Eigenschaften „im Kleinen“, die nämlich bei beliebiger Verkleinerung des Gebiets unter Aufrechterhaltung seiner Konvexität bewahrt bleiben. »

de différentiabilité sont vite nécessaires) au local. L'idée selon laquelle, dans l'emboîtement des groupes définissant la hiérarchie des géométries, le niveau le plus général, celui des transformations « arbitraires », est représenté par des applications qu'on ne suppose d'abord être que des homéomorphismes locaux, puis assez rapidement des difféomorphismes locaux, est exactement celle de Felix Klein en 1872... comme Blaschke l'écrit lui-même. Ce cheminement particulier de Blaschke l'amène identifier, dans le corpus d'une géométrie différentielle d'*avant* les questions de tenseurs et connexions, des séries de problèmes auxquels il apporte une contribution originale. Dans ce travail de sélection et de reformulation de problèmes, de relecture et de réorganisation active d'un corpus, le couple *im Kleinen / im Großen* est, avec la notion de groupe mais à un niveau non technique, le principal outil. Notons que l'articulation local/global continue de jouer un rôle fondamental dans les recherches de Blaschke dans les années 1930 où, après les travaux de géométrie textile, il renoue avec son intérêt de jeunesse (1916) pour les problèmes isopérimétriques et contribue à fonder la géométrie intégrale.

3. Topologie et métrique chez Hopf et Rinow (1925-1932).

Après des exemples allant de l'absence complète du couple local/global – ainsi chez Eisenhart – jusqu'à la réorganisation systématique d'un corpus assez classique autour de ce couple – ainsi chez Blaschke –, nous voulons compléter l'éventail des possibilités en évoquant les travaux de Heinz Hopf (1894-1971) et de son élève Willi Rinow, sur la période qui sépare la thèse du premier *Sur des liens entre topologie et métrique des variétés*³³ (1925) de celle du second *Sur des liens entre géométries différentielles im Großen et im Kleinen*³⁴ (1932, dirigée par Hopf). Outre cette complétion de l'éventail – dans une présentation qui, mécaniquement, met l'accent sur les travaux qui prennent en compte le couple local/global –, il nous faut présenter ces travaux qui joueront dans les années 1930 un rôle dans l'émergence de la structure de fibré.

³² « Dabei wird die Bezeichnung „Differentialgeometrie“ nur soweit gerechtfertigt sein, als wir die Figuren in später (§2) näher zu erörterndem Sinne nur „lokal“, also „im Kleinen“ betrachten werden, während sich die übliche Topologie auf die „integralen“ Eigenschaften, also auf die Figuren „im Großen“ bezieht. »

³³ H. Hopf, *Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik von Mannigfaltigkeiten*, thèse, Friedrich-Wilhelms Universität, 1925.

³⁴ W. Rinow, *Über Zusammenhänge zwischen der Differentialgeometrie im Großen und im Kleinen*, Berlin, 1932.

i. La thèse de Hopf (1925).

Le thème général de ces recherches est présenté ainsi dès l'introduction de la thèse de Hopf : alors qu'en général dans les recherches topologiques on cherche à ne pas utiliser les propriétés métriques (entendre : riemanniennes), cette séparation est souvent, nous dit Hopf, non seulement inappropriée mais aussi impossible ; les propriétés métriques dépendent en effet des propriétés topologiques, et réciproquement. Dans l'étude de ces relations se posent deux questions fondamentales :

« A partir de propriétés d'une métrique connues *im Kleinen*, à quelles conclusions peut-on aboutir sur la structure topologique [*auf den topologischen Bau*] de la variété porteuse de cette géométrie ? » et :

« Quelles sont les métriques non-singulières possibles dans une variété de topologie donnée ? » [Hopf 1926a 1]³⁵

La formulation des questions reprend les cadres posés par Blaschke, au manuel duquel Hopf renvoie rapidement. Ce cadre permet de formuler des questions générales dont des cas particuliers sont connus : la première question admet comme cas particulier ce que Killing a baptisé le « problème de l'espace de Clifford-Klein » (*das Clifford-Kleinsche Raumproblem*) ; les questions de courbure totale (pour lesquelles Hopf s'appuie sur Kronecker et Blaschke) illustrent la seconde. La thèse de Hopf et les articles qui en sont la continuation directe étudient ces deux aspects, nous ne suivons ici que le premier (*Raumproblem*), laissant les questions de courbure totale pour notre chapitre sur l'émergence de la structure de fibré. Face à cette question générale, articulée autour des couples métrique/topologie et *im Kleinen/im Grossen*, Hopf utilise la stratégie générale consistant à passer au *revêtement universel*, stratégie qu'il reprend explicitement de l'*Idée de surface de Riemann* de Weyl. Avant d'introduire le revêtement universel, le problème doit toutefois être précisé, ce que Hopf fait de deux manières. Le problème posé par Klein³⁶ est celui de la topologie des variétés *n*-dimensionnelles munies d'une métrique riemannienne (*Maßbestimmung*) de courbure constante, ou ce qui est équivalent, dont chaque point admet un voisinage isométrique à une boule d'un espace sphérique, elliptique ou de l'espace euclidien. Mais si l'on se donne un tel espace, on en fabrique aisément d'autres : retirez un point à un espace de courbure constante

³⁵ „,Was lässt sich aus den im Kleinen bekannten Eigenschaften einer Massbestimmung auf den topologischen Bau der diese Geometrie tragenden Mannigfaltigkeit schliessen ?“ und „,Was für singularitätenfreie Massbestimmungen sind in einer topologisch gegebenen Mannigfaltigkeit möglich ?“ „.

(ou, plus généralement, prenez un ouvert connexe d'un tel espace) et vous formez un espace de courbure constante ayant une topologie différente³⁷. Pour esquiver cette difficulté, Hopf restreint l'ambition classificatrice à la notion plus précise de « forme d'espace de Clifford-Klein » (*Raumformen*) : il s'agit d'une variété riemannienne connexe vérifiant de plus la condition

Depuis chaque point et sur chaque droite (i.e. géodésique) passant par ce point, on peut reporter dans chacune des deux directions un segment pour chaque longueur positive a (sans exiger que des a différents conduisent à des points différents.) [Hopf 1926a 315]³⁸

On voit que la notion d'espace complet est déjà présente. Pour mieux cerner le problème, Hopf apporte une deuxième précision en le comparant au « problème de Killing » ; ce dernier formulait une condition de « libre mobilité d'un corps rigide » (*freie Beweglichkeit eines starren Körpers*) en exigeant l'existence d'une constante positive r telle que tout point de la variété soit le centre d'une boule de rayon r isométrique à une boule de rayon r dans l'espace sphérique, hyperbolique ou euclidien. Hopf établit que cette condition est équivalente à la sienne dans le cas fermé (compact [Hopf 1926a 316]) mais il donne un exemple de forme d'espace de Clifford-Klein non-fermée mais de volume fini, qui n'est donc pas une forme spatiale de Killing [Hopf 1926a 317]. Une fois le problème précisé ce sont les revêtements universels empruntés à Weyl qui entrent en jeu.

Illustrons sur quelques exemples la méthode de passage au revêtement universel. Hopf commence bien sûr par faire remarquer que si M est une forme de Clifford-Klein, la métrique de courbure constante peut être « transférée » à son revêtement universel \overline{M} (« *die Geometrie von M läßt sich auf \overline{M} übertragen* » [Hopf 1926a317]), de sorte que les *Decktransformationen* sont des isométries, plus précisément un groupe d'isométries sans point fixe tel que l'ensemble des images d'un point quelconque n'admet pas de point d'accumulation ; ce groupe est naturellement isomorphe au « groupe de Poincaré de M ». On obtient donc des formes de Clifford-Klein en faisant agir de tels groupes sur l'espace sphérique, hyperbolique ou euclidien mais il reste à établir que toutes les formes s'obtiennent ainsi ; c'est le principal résultat du §1 de l'article de 1926. Hopf fait remarquer qu'il se

³⁶ Rappelons que Klein posait le problème dans le cas compact, et que, bien entendu, il décrit le problème comme celui du lien entre géométrie et topologie de la surface, pas comme un exemple d'étude du lien entre propriétés locales et globales.

³⁷ La question ne se posait pas chez Klein, qui se limite au cas compact.

³⁸ „Von jedem Punkt läßt sich auf jeder durch ihn gehende Geraden, d.h. geodätischen Linie, in jeder der beiden Richtungen derselben jede positive Strecke a abtragen (womit nicht verlangt wird, daß verschiedene a zu verschiedenen Punkten führen).“

distingue pour l'instant de Killing par la formulation en termes de revêtement universel plus qu'en termes de résultats. Le paragraphe suivant est consacré au cas à courbure strictement positive. L'étude des groupes de déplacement permet d'établir que, en dimension paire, la sphère et l'espace elliptique sont les deux seules formes de Clifford-Klein ; l'étude du cas $n = 3$ sera, on le verra, le point de départ des travaux qui conduiront Seifert et Threlfall à leur notion de variété tridimensionnelle fibrée en cercles. Après avoir reformulé et apporté des résultats partiels au problème de formation de tous les espaces de Clifford-Klein, Hopf aborde deux autres questions, annoncées ainsi dans l'introduction :

Dans les deux paragraphes qui suivent alors, il s'agit de tirer des conclusions sur le comportement topologique global [*Schlüsse auf ihr topologisches Verhalten im Großen*] d'une variété dont on sait qu'elle possède une métrique de Clifford-Klein, donc à partir d'une propriété définie par la géométrie différentielle. [Hopf 1926a314]³⁹

Il est établi au §3 qu'une forme spatiale de Clifford-Klein de dimension $n > 2$ est déconnectée par toute sous-variété homéomorphe à la sphère de dimension $n-1$. Il s'agit là d'une généralisation non triviale du théorème de Jordan-Brouwer. En effet, Hopf rappelle que grâce à la notion de produit de deux variété qu'il avait introduite, Steinitz avait pu montrer que toute variété de dimension n peut-être plongée dans une variété de dimension $n+1$ qu'elle ne déconnecte pas : il suffit de considérer le produit de la première variété par un cercle ; la propriété de Jordan-Brouwer n'est donc pas commune à toutes les hypersurfaces sphériques, indépendamment de la variété ambiante. Le ressort de la démonstration de Hopf est le passage au revêtement universel, homéomorphe soit à une sphère soit, pour les géométries euclidiennes et hyperboliques, à un \mathbf{R}^n . Autre problème *im Grossen* : le paragraphe 4 reprend la problématique brouwerienne d'étude des classes d'homotopie des applications continues d'une variété dans elle-même. L'utilisation du revêtement universel ici aussi est originale – cette fois par rapport à Brouwer. Soit M une variété quelconque, de revêtement universel \overline{M} et de groupe des *Deckbewegungen* G . Hopf commence par montrer comment associer à toute application f continue de M dans elle-même une application continue \overline{f} de \overline{M} dans elle-même ; l'application obtenue dépend du choix d'un point au dessus d'un point donné de M : elle n'est donc définie qu'à conjugaison selon G près [Hopf 1926a 334]. Cette construction permet d'obtenir des propriétés ne dépendant que de la classe d'homotopie de f : par exemple, on sait avec Brouwer qu'une condition nécessaire pour que f soit homotope à

³⁹ „In den beiden nun folgenden Paragraphen handelt es sich darum, aus der Tatsache, daß eine Mannigfaltigkeit eine Clifford-Kleinsche Maßbestimmung gestattet, also aus einer differentialgeometrisch definierten Eigenschaft, Schlüsse auf ihr topologisches Verhalten im Großen zu ziehen.“

l'identité est qu'elle soit de degré 1 ; Hopf montre qu'une autre condition nécessaire est que \bar{f} soit permutable à tout élément de G . Il établit surtout que si M est de Clifford-Klein euclidien ou hyperbolique alors cette dernière condition est suffisante [Hopf 1926a 336]. Le cas des classes d'homotopies d'applications continues entre sphères n -dimensionnelles est traité par Hopf dans un autre article, que nous évoquerons dans la partie consacrée aux champs de vecteurs et fibrés.

ii. La topologie des espaces riemanniens complets.

Les cas à courbure variable sont étudiés dans les travaux de Hopf et Rinow des années 1930-1933, mais nous nous intéressons moins ici aux résultats nouveaux qu'à la maturation de la réflexion sur le lien entre propriétés riemanniennes locales et propriétés topologiques globales. On a vu que Hopf utilisait déjà une hypothèse de complétude dans sa thèse ; une étude beaucoup plus détaillée de cette notion est menée par Hopf et Rinow, par exemple – pour les surfaces – dans un article de 1931 [Hopf, Rinow 1931]. La notion de complétude est d'emblée présentée comme une des façons de concevoir le « global » :

La géométrie différentielle « *im Großen* » traite des propriétés des surfaces « entières » [*mit Eigenschaften « ganzer » Flächen*], i.e. celles qu'on ne peut agrandir en leur adjoignant de nouveaux points ou de nouveaux morceaux de surface. On trouve parmi elles les surfaces fermées. Pour une surface ouverte, sans bord, munie d'une géométrie différentielle intrinsèque partout régulière, se pose en revanche toujours la question de savoir si elle est déjà « complète » [*Vollständig*], de sorte qu'elle est un objet adapté [*geeigneter Gegenstand*] aux considérations « *im Großen* ». [Hopf, Rinow 1931 209] ⁴⁰

Cet article va chercher à donner un sens précis aux notions de « géométrie différentielle intrinsèque » et de surface « complète » : pour ce qui est de « *im Großen* », point n'est besoin de définition (puisque c'est ce dont parle Blaschke !) ; où plutôt : arriver à préciser le concept de surface complète c'est préciser le bon objet pour ce type d'étude. On verra, comme à l'accoutumée, que le sens de *im Großen* se lit dans l'interaction entre une notion précise – ici

⁴⁰ „Die Differentialgeometrie „im Großen“ beschäftigt sich mit Eigenschaften „ganzer“ Flächen, d.h. solcher, die sich nicht durch Hinzufügung neuer Flächenstücke oder Punkte vergrößern lassen. Zu ihnen gehören alle geschlossenen Flächen. Bei einer offenen, unberandeten, mit einer überall regulären inneren Differentialgeometrie versehenen Fläche dagegen erhebt sich stets die Frage, ob sie bereits derart „vollständig“ ist, daß sie ein für die Betrachtung „im Großen“ geeigneter Gegenstand ist.“

celle de variété riemannienne complète comme « objet adapté » à ce type d'étude – et une liste de résultats relevant et illustrant l'étude globale.

Pour ce qui est de la notion précise de « géométrie différentielle intrinsèque », Hopf et Rinow ne peuvent s'appuyer ni sur Blaschke – dont le traitement est extrinsèque – ni sur aucun traité de référence en 1931 ; ils donnent donc eux-mêmes une rapide série de définitions préliminaires. Après avoir rappelé la définition d'une surface au sens topologique (inspirée de Hausdorff), ils définissent donc les notions de structure différentiable puis riemannienne sur une telle surface : la surface topologique possède localement des coordonnées numériques (par hypothèse), on impose aux changements de coordonnées associées aux intersections d'ouverts de coordonnées les conditions qu'on imagine [Hopf, Rinow 1921 210]. Ce sont les surfaces munies d'une métrique riemannienne qui sont nommées « surfaces géométriques ». Après cette rapide mise en place, c'est à la notion de surface « entière » qu'est consacré l'article ; Hopf et Rinow examinent successivement différents sens précis qu'on pourrait mettre sous cette appellation informelle, et les comparent. Le résultat fondamental est le suivant : il existe deux notions non équivalentes, l'une de surface non-prolongeable (*nicht-fortsetzbar*, i.e. non globalement équivalente à une partie stricte d'une surface géométrique), l'autre de surface complète (*vollständig*) ; cette dernière peut s'exprimer de quatre manières équivalentes : on peut reporter toute longueur de segment géodésique à partir de tout point et dans toute direction (*Abtragbarkeitspostulat*), toute ligne divergente (image continue d'une droite du plan, telle que tout suite divergente de point de la droite initiale a pour image une suite divergente) est de longueur infinie (*Unendlichkeitspostulat*) ; après avoir muni la surface de la distance définie par la borne inférieure des longueurs des chemins reliant deux points, on peut formuler deux autres axiomes équivalents aux précédents : l'espace métrique ainsi défini est complet (*Vollständigkeitspostulat*), toute partie bornée y est compacte (au sens suivant : aucune suite infinie de points de cette partie ne diverge dans l'espace ambiant) (*Kompaktheitspostulat*). Des exemples de surfaces non-prolongeables mais non complètes sont donnés pour les trois cas à courbure constante : on peut considérer les revêtements universels F_0 , F_{-1} et F_{+1} , respectivement du plan euclidien (privé d'un point), du plan hyperbolique (privé d'un point) ou de la sphère (privée de deux points). Des deux notions non équivalentes de non-prolongeabilité et de complétude, Hopf et Rinow expliquent au moyen d'un exemple pourquoi c'est la seconde qui est la bonne. On peut montrer que les seules surfaces complètes, simplement connexes et de courbure constante sont le plan euclidien, le plan hyperbolique et la sphère, la notion de complétude est donc celle qui permet

les classifications aisées et évite les complications représentées, par exemple, par F_0 , F_{-1} et F_{+1} ; plus profondément : cet exemple et quelques autres

(...) montrent assez que l'influence des propriétés de géométrie différentielle « *im Kleinen* » sur la forme « *im Großen* » est essentiellement plus forte pour les surfaces complètes qu'elle n'est en général pour les surfaces non-prolongeables ; [Hopf, Rinow 1931 225]⁴¹

C'est l'étude de ce couplage fort qui fait l'objet des autres articles de la série.

C'est ici encore les notions de revêtement, de revêtement universel et de groupe des *Deckbewegungen* qui sont les outils fondamentaux, par exemple dans l'article de Rinow *Sur des liens entre géométries différentielles im Grossen et im Kleinen* [Rinow 1932]. La formulation de la question centrale est légèrement différente de celle qu'on lisait dans l'article précédent : Rinow définit la notion d'« élément de surface géométrique », cette notion rendant compte de la notion de géométrie *im Kleinen*. Si E est un tel élément, et F une surface géométrique, on dit que F est un prolongement de E s'il existe un point de F où la géométrie de F induit un élément de surface géométrique égal à E . Deux questions se posent alors : tout élément est-il prolongeable par une surface géométrique complète ; dans quelle mesure les propriétés topologiques et géométriques d'une surface complète sont déterminées par l'un de ses éléments⁴². Rinow montre que la réponse à la première question est *non* et étudie des critères plus précis dans certains cas présentant des propriétés de symétrie (tel celui des « éléments de rotation »). Quant à la seconde question, Rinow commence par expliquer en quoi tout revêtement topologique d'une surface géométrique peut être muni d'une unique géométrie la rendant localement équivalente à la surface initiale. Il démontre ensuite que le revêtement universel géométrique d'une surface géométrique complète est complet ; enfin que deux prolongements complets et simplement connexes F et F' d'un même élément sont globalement équivalents (*Eindeutigkeitssatz*) : l'idée est de prolonger (le long des géodésiques) l'identité de E en une application de F dans F' ; le résultat découle à la fois de la complétude (dans son aspect d'*Abtragbarkeit*) et de la simple connexité (garantissant la monodromie du prolongement). Outre ces articles, Hopf fait connaître son travail avec Rinow dans une conférence de 1931 reproduite à la fois dans le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* [Hopf 1932] pour les lecteurs de langue allemande, et dans

⁴¹ „ (...) zeigen zur Genüge, daß bei den vollständigen Flächen der Einfluß der differentialgeometrischen Eigenschaften „im Kleinen“ auf die Gestalt der Fläche „im Großen“ wesentlich stärker ist als im allgemein bei den nicht-fortsetzbaren Flächen.“

l'Enseignement mathématique [Hopf 1931a] pour les francophones ; ce dernier texte est une traduction de de Rham, dans laquelle *im Großen* est traduit par « global », à une époque où, on le verra par exemple chez Elie Cartan, ce terme est encore loin de s'être imposé en français.

On est frappé à la lecture de ces travaux de Hopf puis Hopf et Rinow par les *grandes similitudes* avec les développements que connaît, exactement au même moment, la théorie des groupes de Lie. Hopf du côté de la géométrie différentielle, Otto Schreier du côté des groupes topologiques, formulent en 1925 dans des termes semblables la question du prolongement d'un élément et celle du couplage entre structure globale et structure donnée par un *élément* ; dans les deux cas c'est la notion de revêtement universel qui est l'outil principal ; les techniques de prolongement des applications le long de chemins sont les mêmes, chez eux deux comme chez Elie Cartan. En 1925, on peut en partie attribuer cette similitude au cadre posé par Blaschke : il est une référence centrale pour Hopf, il est le maître du séminaire de Hambourg où travaille Schreier. On ne doit toutefois pas imaginer que ces recherches parallèles sont le fruit de communications directes. Ainsi Cartan aborde-t-il à partir de 1925 les questions globales en théorie des groupes de Lie sans citer Schreier (jusqu'en 1930) et il introduit les revêtements dans l'étude des espaces localement homogènes sans citer Hopf. Dans la conférence de 1931, Hopf signale en note infrapaginale que de Rham vient de lui faire découvrir qu'en France Elie Cartan a obtenu des résultats sur la topologie des groupes de Lie qui ne sont pas sans lien avec les siens [Hopf 1931a 238].

Ces contributions de Schreier et Cartan à la théorie globale des groupes de Lie sont étudiées en détail dans le chapitre 12.

⁴² On trouve une dernière variante de ces questions dans [Hopf, Rinow 1933]. On considère alors deux surfaces géométriques complètes et une isométrie entre un élément de l'une et un élément de l'autre ; la question est alors une question de prolongement d'isométries.

Chapitre 11. Weyl et Cartan : renouvellement des perspectives locales (1918-1925)

I. Géométrie et relativité générale chez H. Weyl : un programme d'infinitésimalisation¹.

On trouve une présentation détaillée de l'évolution des idées mathématiques en théorie de la relativité chez Hermann Weyl sur la période 1917-1925 dans l'article de Erhard Scholz *Weyls Infinitesimalgeometrie* [Scholz 2001b]. Les développements mathématiques y sont étudiés dans leur relation étroite avec les conceptions philosophiques – elles aussi en évolution – de ce que doivent être, pour Weyl, une théorie mathématique et une théorie physique. Dans ce riche tissu nous ne suivons que quelques fils, dans une perspective qui diffère par sa question centrale comme par sa résolution temporelle. Sur ce second aspect, sans traiter cette période entièrement comme un bloc, nous nous appuyerons essentiellement sur la quatrième édition de *Temps, Espace, Matière*² (nous utiliserons l'abréviation *RZM*), de 1921. Cela nous permet d'aborder les deux principaux temps de la pensée de Weyl dans cette période, celui marqué par l'article de 1918 sur la *Géométrie purement infinitésimale*³ et celui du *Problème de l'Espace* en 1922-1923⁴; de lire aussi l'écho des premiers débats cosmologiques. Pour ce qui est de la problématique, c'est l'étape que marque *RZM* que nous cherchons à caractériser, quelques années après le cours de Weyl sur l'idée de surface de Riemann et plus de dix ans avant la formulation moderne de la notion de variété différentiable et la reformulation progressive des questions de géométrie différentielle dans le langage – global – des variétés fibrées.

Le cours sur les surfaces de Riemann s'inscrivait dans une longue lignée de recherches au sein desquelles les questions globales étaient primordiales, conçues dans leur lien avec les aspects locaux et, depuis Osgood au moins, explicitement formulées au moyen du couple *im Kleinen / im Grossen* ; il n'est pas besoin de rappeler ici combien Weyl renouvelle cette tradition en nouant dans sa présentation axiomatique un lien inédit entre local et global, en instaurant le moment du lieu comme primitif et préalable à la question des fonctions associées, ou en dénouant l'alliance classique entre le local et le singulier. En abordant la

¹ Nous proposons ce néologisme, formé sur le modèle de « localisation ».

² [Weyl 1922c]. Cette édition présente malheureusement de nombreuses erreurs dans les formules, des formules insérées au mauvais endroit dans le texte etc.

³ [Weyl 1918]. Nous utilisons la pagination des Œuvres Complètes [Weyl 1968].

⁴ [Weyl 1922b]. Nous n'utilisons pas dans ce chapitre [Weyl 1923].

théorie de la relativité ⁵ Weyl hérite d'un cadre mathématique tout autre, dans lequel les questions globales sont largement absentes. On l'a entrevu chapitre précédent à propos de l'article de Berwald dans l'*Encyclopädie* ou du cours d'Eisenhart, le cadre mathématique est celui de la théorie des invariants différentiels, théorie qui s'inscrit à son tour dans le cadre plus vaste et plus informel de celles reposant, explicitement ou non, sur le pseudo-groupe des difféomorphismes locaux. Si Weyl innove au sein de cette ligne de questionnement ce n'est pas en allant vers les questions globales ou en modifiant le mode d'écriture par l'instauration d'une attention aux tensions entre local et global. C'est au contraire en mettant au premier plan, parmi les éléments issus de cette tradition, le couple infinitésimal / fini qu'il enrichit la structure pseudo-riemannienne usuelle, guidé dans sa démarche par une critique du caractère partiel de processus d'infinitésimalisation qu'il lit dans le passage de la géométrie euclidienne à la géométrie riemannienne ⁶. Développons.

1. Action à distance, loi intégrale, physique « de contact ».

Weyl propose des lectures parallèles du passage de la géométrie euclidienne à la riemannienne et du passage d'une physique de l'action à distance à une physique « de contact » ; on le voit dans le mouvement général qui préside à la construction de l'exposé, ainsi que dans quelques passages très explicites. Ainsi pour l'électrostatique commence-t-il par rappeler les deux formulations des lois de l'électrostatique

$$1^{\text{ère}} \text{ formulation} \quad \mathbf{k} = e\mathbf{e} \quad \mathbf{e} = -\int \frac{\rho \mathbf{r}}{4\pi r^3} dV \quad (\text{loi de Coulomb, \text{éq. (48), (49)})$$

$$\text{ou} \quad \mathbf{e} = \text{grad } \varphi \quad -4\pi\varphi = \int \frac{\rho}{r} dV \quad (\text{\text{éq. (50)})$$

où \mathbf{k} est la force s'exerçant sur une particule de charge e dans un champ électrique stationnaire \mathbf{e} , $-\varphi$ le potentiel dont dérive \mathbf{e} et ρ la densité volumique de charge, et

$$2^{\text{ème}} \text{ formulation} \quad \text{rot } \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad \text{div } \mathbf{e} = \rho \quad (\text{\text{éq. (51)})$$

il commente :

La loi de Coulomb est une *loi d'action à distance* [*Fernwirkungsgesetz*] ; elle exprime que le champ en un point dépend des charges situées en tous les autres points de l'espace, les plus éloignés comme les plus proches. Au contraire, les formules (51),

⁵ Ce terme renverra toujours, sauf mention du contraire, à la relativité générale.

⁶ Nous utilisons dans ce paragraphe de terme « variété riemannienne » ou « géométrie de Riemann » pour toutes les variétés munies d'une forme quadratique non dégénérée, quelle que soit sa signature. Nous suivons en cela l'exposé de Weyl.

beaucoup plus simples d'ailleurs, expriment des lois d'action de contact [*Nahewirkungsgesetze*], puisque pour la détermination de la dérivée d'une fonction en un point, il suffit de connaître l'allure de cette fonction dans un voisinage arbitrairement petit autour de ce point ; les valeurs de ρ et \mathbf{e} en un point et dans un voisinage immédiat sont liées par les équations (51). [Weyl 1922c 55] ⁷

Cette analyse mathématique de la nature comparée de systèmes (50) et (51) débouche sur un commentaire sur un plan nettement épistémologique :

Ces lois d'*action de contact* doivent être considérées comme la vraie expression des dépendances entre les actions qui s'exercent dans la nature ; l'équation (49) ne doit être considérée que comme une conséquence mathématique des équations (51) ; grâce aux équations (51) dont la signification intuitive est si simple, nous croyons *comprendre* d'où vient la loi de Coulomb. Certainement, nous obéissons avant tout à une contrainte d'ordre épistémologique [*erkenntnistheoretisch*] ; Leibnitz déjà, a formulé comme un principe général, la condition de continuité et d'action de contact, et la loi newtonienne d'action à distance pour la gravitation, qui correspond tout à fait à la loi de Coulomb, n'a pu le satisfaire. [Weyl 1922c 55]

Au lieu de ce changement de plan, Weyl aurait pu poursuivre la comparaison des systèmes (50) et (51) en restant sur le plan mathématique pour montrer leur non équivalence pour des topologies globales variées ; ce n'est pas le choix qu'il fait. C'est au contraire parce que les systèmes sont mathématiquement équivalents – le cadre est celui de l'espace ordinaire – que la préférence se fonde sur des motifs épistémologiques. Cette préférence pour les lois de contact a toutefois des conséquences immédiates sur la recherche des bonnes grandeurs physiques et de leur nature mathématique. Ainsi Weyl définit-il, en utilisant la structure métrique de l'espace euclidien, la notion de densité de force pondéromotrice \mathbf{p} du champ électrique \mathbf{e} en faisant le produit scalaire de \mathbf{e} et des vecteurs de base, et montre-t-il qu'elle dérive d'un tenseur du deuxième ordre, symétrique S , la *tension*, dont les composantes ne dépendent que de \mathbf{e} :

Toute les fois qu'une force \mathbf{p} se détermine (...) au moyen d'un tenseur S du 2^{ème} ordre, symétrique, ne dépendant que des valeurs des grandeurs qui déterminent l'état physique au point considéré, nous regardons ces tensions comme des grandeurs primordiales, les actions des forces n'étant que leurs conséquences. La justification mathématique de cette manière de voir provient de ce que la force \mathbf{p} s'obtient par

⁷ Pour les termes allemands, c'est la deuxième édition que nous avons consulté [Weyl 1919b].

différentiation de la tension ; de cette manière là, on n'obtient pas la tension par intégration, ce qui aurait pour désavantage de faire intervenir toutes les valeurs des grandeurs d'état et non pas simplement la valeur au point considéré. [Weyl 1922c 58]

Cette relecture de l'électrostatique, à la fois reformulation dans un formalisme tensoriel et affirmation de priorités épistémologiques, clôt un chapitre 1 consacré à l'étude des tenseurs et champs de tenseurs dans un espace euclidien. L'objectif, triple, est d'accoutumer le lecteur à raisonner en termes de grandeurs invariantes – ici par simple transformation linéaire inversible –, d'apprendre à distinguer ce qui dépend de la métrique de ce qui n'en dépend pas, et de prendre conscience de la nature tensorielle des grandeurs mathématiques et physiques usuelles. Weyl insiste en particulier, en bon pédagogue, sur le fait que tout ce qui dépend linéairement de trois coordonnées réelles n'est pas un vecteur de l'espace : ainsi les forces sont plutôt des formes linéaires (associant, à chaque vecteur-déplacement, un travail), les rotations infinitésimales sont des matrices antisymétriques etc.

2. Une notion de multiplicités n -dimensionnelles indépendante de celle de 1913 ?

Le deuxième chapitre est consacré au passage de la géométrie euclidienne à la géométrie riemannienne, puis au dépassement de cette dernière. La notion de multiplicité n -dimensionnelle est introduite au moyen d'exemples d'espaces de paramètres ; c'est donc, l'aspect de multidimensionalité qui est dans un premier temps mise en avant. Comme dans l'*Idée de surface de Riemann*, Weyl commence par énoncer l'idée fondamentale de manière informelle puis il passe à une définition plus précise. L'idée informelle est ici celle de multidimensionalité et de coordonnées ; de passage, pour reprendre les termes de Riemann, des déterminations de lieu aux déterminations de grandeurs :

Une multiplicité à n dimensions est caractérisée par le fait qu'un élément particulier qui en fait partie (dans nos exemples : les points, les états, les couleurs ou les sons) peut être déterminé par la donnée des valeurs de n grandeurs « les coordonnées » qui sont des fonctions continues à l'intérieur de cette multiplicité. [Weyl 1922c 73]⁸

Weyl ne reprend toutefois pas la suite de la présentation de Riemann ; on se souvient que ce dernier poursuivait le raisonnement autour de cette question de la dimension, dans un parcours que nous disions *en profondeur* : franchissement croissant des dimensions successives engendrées par des variations continues indépendantes, franchissement décroissant par les surfaces de niveaux de fonctions continues du lieu instituant finalement un

système de repérage. Aucun des deux points n'est repris par Weyl, qui précise ainsi l'idée informelle :

Mais il n'est pas nécessaire d'exiger que toute la multiplicité, avec tous ses éléments soit représentée univoquement et réciproquement par les systèmes de valeurs des coordonnées (par exemple, cela est exclu pour la sphère) mais il faut que, si P est un élément de la multiplicité, il existe un voisinage de P qui puisse être représenté univoquement, réciproquement et d'une manière continue, par les systèmes de valeurs de n coordonnées. Si x_i est un système de n coordonnées, x_i^* un autre, les valeurs des coordonnées x_i et x_i^* du même élément sont liées par des relations :

$$(3) \quad x_i = f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

qui sont résolubles par rapport aux x_i^* , et où les f_i sont continues. Tant que nous ne savons rien de plus sur la multiplicité, nous ne sommes pas en état de distinguer un système de coordonnées d'un autre.

Pour l'étude analytique d'une multiplicité continue quelconque, il est nécessaire d'échafauder une théorie de l'invariance vis-à-vis de toutes les transformations de coordonnées de la forme (3). [Weyl 1922c 73]

L'évocation du caractère partiel de la carte n'est pas, on le voit, l'occasion de discuter la coordination des cartes et la nécessaire prise en compte des aspects globaux et topologiques. Ces aspects ne jouent d'ailleurs aucun rôle dans les 170 pages suivantes. Ce n'est pas la coordination des cartes recouvrant un espace qu'il importe à Weyl de souligner mais la non unicité de la carte au voisinage d'un point ; c'est la problématique des invariants qui est ici visée, pas celle de l'étalement *horizontal*.

Si l'on poursuit la comparaison avec l'*Idée de surface de Riemann*, on trouvait dans cet ouvrage, outre la mise au premier plan des contraintes globales, une description précise de l'étagement des structures : un ensemble quelconque muni d'une structure topologique, elle-même sous-jacente à une structure analytique qu'elle est loin de déterminer entièrement. On trouve un écho de l'idée de structuration d'un ensemble dont on choisit de nommer « points » les éléments, dans l'introduction informelle de la notion de multiplicité n -dimensionnelle par des exemples d'espaces de paramètres de situations *a priori* non géométriques (couleurs etc.) ; Weyl suit en cela Riemann. La mise en place de la topologie est beaucoup moins précise, on le comprend dans le contexte d'un ouvrage où l'objectif principal n'est pas, loin de là, la mise en place de résultats globaux ; le travail avec le pseudo-groupe des difféomorphismes locaux de \mathbf{R}^4 ne nécessite pas la notion abstraite d'espace topologique. On ne trouve pas dans le

⁸ Cette phrase est en italique dans le texte original.

paragraphe 11, dont est tirée la citation précédente, d'articulation explicite des structures topologiques et différentielles. Weyl y expose successivement l'idée gaussienne de géométrie intrinsèque, le rôle central du ds^2 et la non-équivalence, soulignée par Riemann, des ds^2 n -dimensionnels : le déroulement mi-conceptuel, mi-chronologique de l'exposé n'a pas la propriété axiomatique de celui de l'*Idée de surface de Riemann*, Weyl se contentant de signaler qu'il suppose que les changements de coordonnées sont suffisamment dérivables. Ce point appelle deux remarques générales.

Premièrement, si l'articulation des niveaux n'est pas d'emblée mise en place avec précision, il n'en demeure pas moins qu'elle est l'un des fils directeurs du raisonnement de Weyl dans ce chapitre II. On y retrouve deux temps : le premier est consacré à la recherche de la bonne description de chaque structure, ainsi Weyl fait-il évoluer la notion de structure métrique en introduisant l'étalonnage⁹ ; il multiplie aussi les modes de saisie de cette même structure, ajoutant à son idée initiale (un ds^2 et un étalonnage) une présentation par les groupes. Le deuxième temps consiste en l'étude de l'interdépendance des structures, en l'occurrence entre la structure métrique (au sens de Weyl) et la structure de transport parallèle donnée par la connexion affine (i.e. linéaire). Quant à savoir si ce mode de questionnement par articulation de structures suit un modèle donné par la théorie des fonctions algébriques d'une variable complexe, la réponse ne peut être que nuancée. La rédaction de l'*Idée de surface de Riemann* a donné à Weyl un *savoir-faire*, une expérience de la mise en place et de l'articulation de structures ; ce mode de questionnement l'amène à introduire dans le champ de la géométrie différentielle – ou, plus précisément, des invariants différentiels – un type d'interrogation inhabituel, caractérisé entre autres par une grande liberté dans l'introduction de structures nouvelles. Il n'est toutefois pas nécessaire de supposer que Weyl transpose explicitement un modèle d'interrogation issu de ses réflexions de 1911-12 sur l'idée de surface de Riemann : les théories qu'il commente et prolonge lui fournissent elles-mêmes des modèles d'interrogation de ce genre. On peut penser à la distinction entre propriétés intrinsèques et extrinsèques en théorie des surfaces de l'espace ordinaire ; on pense surtout au questionnement dont Riemann donne l'exemple dans sa Dissertation de 1854, dans laquelle les structures topologiques et métriques sont distinguées, dans laquelle la pluralité des structures métriques est mise en avant, évaluée grâce à la notion de courbure et voit son origine physico-géométrique interrogée.

⁹ Nous utiliserons indifféremment les termes « étalonnage », « jauge » ou « calibrage » pour traduire « *Eichung* ».

Une deuxième remarque porte sur la nature des exposés dans l'*Idée de surface de Riemann* et dans *RZM*. L'idée de surface de Riemann propose un déroulement original d'une théorie mûre, sur laquelle Weyl jouit de soixante-dix ans de recul et dispose de nombreuses formulations successives et, parfois, concurrentes. S'il lui importe de motiver informellement l'introduction de notions nouvelles, le déroulement général est un enchaînement de définitions et de propositions démontrées, dont le cadre est donné par deux structures définies axiomatiquement. La mise en place des premières notions est certes importante, mais leur validité dépend moins de la capacité qu'a l'auteur de motiver *a priori* de leur introduction que de celle d'obtenir par leur moyen et le plus élégamment possible une partie de la grande moisson de *résultats* obtenus dans cette théorie dans la seconde moitié du 19^e siècle. L'état de maturité de la théorie dont traite *RZM* impose un tout autre traitement, et les deux ouvrages relèvent presque de genres différents. Les notions premières y sont moins le point de départ que le point d'arrivée : il s'agit d'une mise en place du cadre théorique, pas encore de l'exposé démonstratif d'une vaste moisson de résultats obtenus dans ce cadre. Non que tout aspect démonstratif soit absent ; le chapitre II contient en particulier ce que Weyl nomme le théorème central de la géométrie métrique, sur lequel nous reviendrons plus loin ; mais cet aspect n'est pas dominant. Weyl procède en examinant successivement des situations théoriques classiques – géométrie affine, équations de Maxwell, théorie des surfaces chez Gauss, relativité galiléenne etc. – et dans chaque il cas en propose une relecture, sélectionne quelques points qui lui semblent essentiels, critique des aspects moins naturels que d'autres. Moins un enchaînement démonstratif qu'une maturation, une décantation progressive des concepts. Une conséquence importante est qu'à la différence de l'*Idée de surface de Riemann*, les notions ne sont pas indépendantes du contexte immédiat : leur présentation est toujours provisoire ; ainsi la notion de structure métrique n'est pas la même dans le chapitre 1 (espace euclidien ou pseudo-euclidien), dans le paragraphe 11 (ds^2 riemannien) ou le paragraphe 16 (introduction de la jauge). Pour reprendre un vocabulaire commun à la philosophie et aux mathématiques, l'*Idée de surface de Riemann* expose *analytiquement* les propriétés de structures définies axiomatiquement, alors que *RZM* procède par enrichissement *synthétique* des concepts. Cette compréhension de la différence de genre est nécessaire à la comparaison des deux ouvrages dans une histoire du couple local/global. Certes, nous y revenons après cette longue digression, *RZM* n'est pas centré sur des interrogations globales ; mais, quelles qu'elles soient, les interrogations y prennent place dans un exposé qui avance d'un pas différent. Aux articulations très nettes de l'*Idée de surface de Riemann* – théorie globale d'objets donnés et caractérisés par leur structure locale – succèdent dans *RZM* des

développement dépendants, répétons-le, du contexte immédiat. Des questions globales peuvent, ici où là, apparaître, dans un cadre général qui n'a pas à préciser sa nature sur ce point.

3. Les termes d'une saisie infinitésimale.

i. Un programme d'infinitésimalisation.

A la fin du paragraphe 11, Weyl a mis en place assez d'éléments mathématiques et physiques pour pouvoir introduire l'un des *thèmes* principaux – presque au sens musical du terme :

Le passage de la géométrie euclidienne à la géométrie riemannienne repose sur les mêmes principes que la physique des actions de contact. Par l'observation, nous apprenons par exemple, que dans un fil conducteur, l'intensité du courant est proportionnelle à la différence de potentiel à l'origine et à l'extrémité du fil (loi d'Ohm). (...) [les mesures empiriques] nous montrent que la loi d'Ohm est vraie pour un fil *infinitement petit*. (...) De la loi différentielle, on remonte à la loi intégrale, en faisant l'hypothèse que le fil est *homogène* dans toutes ses parties. On procède de même pour la géométrie : le fait essentiel de la géométrie euclidienne est que le carré de la distance de deux points est une forme quadratique des coordonnées relatives des deux points. (*Théorème de Pythagore*). *Si nous regardons ce théorème comme rigoureusement vrai quand les deux points sont infinitement voisins, nous posons ainsi les prémisses de la géométrie riemannienne*. En même temps nous sommes dispensés d'une détermination précise du système des coordonnées, puisque le théorème de Pythagore ainsi énoncé est invariant vis-à-vis de n'importe quelle transformation de coordonnées. On saisit bien ainsi la correspondance qu'il y a entre la physique des actions à *distance* à la physique des actions *de contact* et le passage de la géométrie euclidienne à la géométrie riemannienne ; celle-ci est une géométrie qui procède de proche en proche dans ses investigations, celle-là donne immédiatement les lois globales. [Weyl 1922c 78] ¹⁰

C'est le niveau infinitésimal qui apparaît ici essentiel. Ce n'était pas si tranché dans la comparaison que Weyl faisait des formulations intégrales ou de contact des équations de l'électrostatique : c'est en effet au niveau local qu'il se plaçait lorsqu'il soulignait que la

¹⁰ Le parallèle entre géométrie et physique est encore plus strict dans le texte allemand, la géométrie euclidienne y étant qualifiée de « *Fern-*» et la riemannienne de « *Nahe-geometrie* ».

valeur en un point du champ caractérisé par les équations de contact ne dépend que des valeurs « dans un voisinage arbitrairement petit de ce point ». L'introduction d'un ds^2 riemannien ne garantit toutefois la validité du théorème de Pythagore que dans l'infinitésimal et non, bien entendu, localement ; l'énoncé local n'aurait même guère de sens, la stabilité par « n'importe quelle transformation de coordonnées » n'étant garantie que pour les transformations linéaires – point sur lequel Weyl n'est explicite que plus loin. Ce centrément de l'attention vers l'infinitésimal amène Weyl à souligner dans Riemann non plus le pionnier de l'Analyse globale mais le champion de la saisie – *épistémologiquement juste* – dans l'infinitésimal :

L'idée de comprendre l'univers par son aspect dans l'infiniment petit, est la raison épistémologique qui anime la physique des actions de contact et la géométrie riemannienne, mais c'est aussi l'âme des autres parties de l'œuvre grandiose que Riemann a conçue, principalement sa théorie des fonctions d'une variable complexe.
[Weyl 1922c 79]

Weyl reprend ici la lecture, par exemple, de Klein. C'est la caractérisation des fonctions holomorphes comme similitudes dans les plus petites parties qui est préférée à la saisie, locale, par les éléments de fonction.

ii. Voisinage infinitésimal et espace tangent.

Ce choix de lecture amène toutefois Weyl à préciser les éléments d'une saisie infinitésimale. Ainsi, au début du paragraphe, 13 revient-il sur la notion de multiplicité n -dimensionnelle pour préciser quelques éléments jusque là laissés dans l'implicite. Il demande que les changements de coordonnées – dont le caractère local n'est pas rappelé – soient continûment dérivables :

Cette dernière condition est nécessaire et suffisante, pour que la géométrie affine soit valable dans l'infiniment petit, c'est-à-dire afin qu'il y ait des relations linéaires résolubles entre les différentielles des coordonnées dans les deux systèmes :

$$(18) \quad dx_i = \sum_k \alpha_k^i \overline{dx_k} .$$

(...) Dans chaque cas, la notion de fonction du lieu, continue et dérivable a un sens invariant indépendant du système des coordonnées ; les coordonnées elles-mêmes sont de telles fonctions.

Notion de tenseur.- Les coordonnées relatives dx_i d'un point $P'(x_i+dx_i)$ infiniment voisin d'un point $P(x_i)$ sont les composantes d'un *élément linéaire* en P ou d'une *translation infinitésimale* $\overline{PP'}$. Par passage d'un système de coordonnées à un autre, les formules (18) transforment ces composantes, les α_k^i sont les valeurs des dérivées au point P . (...) Il est essentiel de remarquer que dans le cas qui nous occupe *une translation est liée essentiellement à un point* P ; dire que deux translations en deux points différents sont égales ou différentes n'a aucun sens. [Weyl 1922c 89]

Cette mise en place appelle plusieurs remarques. Premièrement, à aucun moment Weyl ne rapproche les tenseurs (au sens de champs de tenseurs) des différentielles telles qu'elles étaient définies dans l'*Idée de surface de Riemann*. On se souvient que ces dernières étaient mises en place comme des objets admettant une type d'expression relatif à une uniformisante locale et dont l'expression subissait, lors du changement d'uniformisante, un changement qui n'est pas celui subi par les fonctions. La première conséquence était qu'une différentielle, contrairement à une fonction, n'a pas de *valeur* en un point ; en un point où elle est régulière, seule son annulation est intrinsèque. La mise en place des tenseurs sur les multiplicité n -dimensionnelle suit le même chemin – et pour cause – sans que Weyl n'indique le parallélisme. Le fait qu'un tenseur n'a pas réellement de valeurs (numériques) en un point n'est pas souligné¹¹ et n'apparaît qu'en creux dans les affirmations répétées selon lesquelles seules les équations du type « tenseur = 0 » ont un sens intrinsèque. Cette dernière affirmation est d'ailleurs bien usuelle depuis la mise en place du calcul différentiel absolu par Ricci-Curbastro et Levi-Civita (par exemple [Levi-Civita, Ricci-Curbastro 1901]) et donc un *leitmotiv* en relativité générale (par exemple [Einstein 1916 780]). On a donc affaire à deux contextes théoriques disjoints, les différentielles en théorie des courbes algébriques complexes pouvant être rapprochées de la théorie purement algébrique de Dedekind et Weber ; les propriétés des tenseurs sont, elles, bien stabilisées après vingt ans de calcul différentiel absolu. Par plusieurs autres aspects ces deux notions présentent suffisamment peu de points communs pour qu'un rapprochement – moins encore la formulation d'une idée générale d'espace fibré – ne s'impose pas. Ainsi les dx_i (attachés à un point) repèrent-ils un espace vectoriel réel n -dimensionnel étudié au moyen de la géométrie euclidienne (au sens large), ce contexte géométrique étant absent dans l'étude du fibré en droites (complexes) des différentielles d'une courbe analytique complexe. De plus, la structure analytique est donnée

¹¹ On verra dans le prochain chapitre comment la construction des fibrés vectoriels permet, et c'est alors une préoccupation explicite, de faire entrer les champs de tenseurs dans le cadre ensembliste des applications entre ensembles structurés.

en 1913 par les uniformisantes en chaque point – avec, bien sûr, une condition de cohérence¹² locale – alors que la structure de variété différentielle est donnée par des cartes locales ; on déclarait les germes de fonctions analytiques *en chaque point*, on se donne ici un moyen de se repérer dans un *morceau* d'espace. Pour équivalentes que ces formulations puissent être en dernier ressort, elles n'appellent pas immédiatement les mêmes images et les mêmes formulations. On voit donc combien les traditions de recherche, les objectifs et les modes de formulation séparent les différentielles algébriques des tenseurs.

On peut, c'est notre seconde remarque, s'intéresser à ce que Weyl écrit plutôt qu'à ce qu'il n'écrit pas ! Le niveau infinitésimal n'intervenait pas en tant que tel dans l'*Idée de surface de Riemann* : les développements en série entière y donnent l'expression locale (i.e. dans un morceau suffisamment mais pas infiniment petit) de la fonction, ils ne jouent aucun rôle d'approximation, tous les ordres de petitesse sont pris en compte ; la déclaration d'une uniformisante en un point insère directement chaque point dans l'espace au niveau local, par le filtre des voisinages. Le passage de l'analytique au différentiel prive les points de ce mode d'insertion ; il demeure – c'est le point central pour Weyl – l'insertion infinitésimale dans le voisinage « immédiat », dont la structure est celle d'un espace affine centré. C'est, en un sens, parfaitement commun, le cœur même de la saisie différentielle aussi bien dans ses aspects géométriques ou que dans le travail sur les invariants différentiels : des espaces différents entretiennent des relations connues jusqu'à un certain ordre ; la coïncidence jusqu'à un certain ordre de petitesse garantit la transférabilité directe des grandeurs ne dépendant pas des ordres supérieurs ; un vocabulaire commode fait dire que les points ont des voisinages d'ordre 1, d'ordre 2 etc.¹³ L'idée est reprise par Weyl de manière un peu plus explicite dans un texte légèrement postérieur (rédigé en 1925) :

A chaque point P d'une M_f [*Mannigfaltigkeit*] correspond l'espace affine-linéaire centré des vecteurs au point P ; les éléments linéaires rayonnant à partir de P sont les vecteurs infiniment petits. Nous n'exprimons par là que ceci, que dans deux systèmes de coordonnées les différentielles au point P sont liées entre elles par des relations linéaires homogènes. On peut aussi dire que les vecteurs forment l'espace linéaire tangent dont le centre recouvre le point P et dont le voisinage infiniment petit du

¹² Au sens informel comme au sens formel.

¹³ Par exemple [Levi-Civita, Ricci-Curbastro 1901 177] pour le transfert de formules entre des espaces tangents : les auteurs parlent du « domaine (du premier ordre) d'un point donné ».

centre est amené à recouvrir de manière affine le voisinage infiniment petit de P de la Mf donné. [cité dans [Scholz 2001b 61]]¹⁴

On retrouve la juxtaposition usuelle de deux modèles non totalement congruents, l'un intrinsèque, issu de l'analyse et mettant en avant les ordres de coïncidence infinitésimale (ici le premier), l'autre issu de la géométrie extrinsèque des courbes et surfaces de l'espace. Dans le premier modèle, l'espace est centré par nature, alors que dans le second un sous-espace affine (non centré) entretient avec une sous-variété une relation remarquable en un point commun. Dans le premier modèle les éléments sont infiniment petits, ils ne le sont pas dans le second : les rayons vecteurs issus du point de contact entre la sous-variété et le sous-espace affine n'ont pas à être « petits ». On voit d'ailleurs Weyl interpréter les vecteurs infiniment petits comme des éléments linéaires, c'est-à-dire des demi-droites issues du point, éliminant ainsi la question de la taille. Cette non congruence des deux modèles de l'espace tangent en un point permet un certain jeu entre deux points de vue sur un même espace vectoriel, considéré en lui-même ou à multiplication par un scalaire strictement positif¹⁵ près. Les notions d'indépendance linéaire et – lorsqu'on dispose d'un ds^2 – d'angle entre deux vecteurs sont plus fondamentales que la notion de longueur d'un vecteur, disponible dans un seul des deux modèles et heurtant l'idée d'infiniment petit. Dans d'autres textes que la quatrième édition de *RZM* les deux aspects de l'espace tangent en un point, à la fois voisinage infinitésimal formé de points reliés au centre par des translations infinitésimales et ensemble de vecteurs d'un espace affine centré, sont plus distingués. Ainsi dans un article de 1919 [Weyl 1919a 55] Weyl se contente-t-il de l'analogie formelle : les composantes d'un vecteur en P – objet que l'on ne définit pas autrement – se transforment *comme* les composantes dx_i d'une translation infinitésimale depuis P . Dans *Reine Infinitesimalgeometrie* par contre, les deux types de vecteurs en P jouent des rôle fondamentalement différents dans la théorie : le transport parallèle des vecteurs infinitésimaux est soumis à un axiome de commutativité (« *Forderung der Kommutativität* ») :

B. Soient P_1 et P_2 deux points infiniment voisins de P , si par transport parallèle de P à P_2 le vecteur infinitésimal $\overrightarrow{PP_1}$ arrive en $\overrightarrow{P_2P_{21}}$, mais en $\overrightarrow{P_1P_{12}}$ par transport vers P_1 ,

¹⁴ « Zu jedem Punkt P einer Mf gehört der zentrierte affin-lineare Raum der Vektoren im Punkte P ; die von P ausstrahlenden Linienelemente sind die unendlichkleinen Vektoren. Hierdurch bringen wir lediglich zum Ausdruck, daß in zwei Koordinatensysteme die Differentiale an der Stelle P durch homogene lineare Transformationen miteinander zusammenhängen. Die Vektoren bilden, wie man auch sagen kann, den tangendierenden linearen Raum, dessen Zentrum den Punkt P deckt und von welchem die unendlichkleine Umgebung des Zentrums mit des unendlichkleinen Umgebung des Punktes P der gegebenen Mf affin zur Deckung gebracht ist. »

alors P_{12} et P_{21} coïncident. (On obtient un parallélogramme infiniment petit). [Weyl 1918 7]¹⁶

Une telle commutativité dans le transport des vecteurs (ξ_i) n'est bien entendu pas exigée, sans quoi la notion de courbure disparaîtrait. Cet axiome sert, en 1918, à démontrer que la transformation linéaire entre espaces vectoriels attachés à $P(x)$ et $P'(x+dx)$ dépend linéairement de dx . La présentation est sensiblement différente dans *RZM* ; la commutativité est supposée au §13, au détour d'un raisonnement bien antérieur à la mise en place de la connexion affine [Weyl 1922c 92] ; la dépendance linéaire envers le déplacement infinitésimal est déduite au §14 de l'existence, postulée pour chaque point, de coordonnées géodésiques [Weyl 1922c 97]. On voit, au cours de cours de cette démonstration, qu'il est nécessaire de pouvoir considérer les (dx_i) comme des vecteurs (ξ_i) : le jeu des changements de points de vue ne doit pas aller jusqu'à la distinction de nature.

On peut noter que dans *RZM*, si les raisonnements sont d'abord menés en termes d'accroissements infinitésimaux $dx, \delta x \dots$, ils sont souvent ensuite redémontrés sans ces éléments, pour ceux qui « n'aiment pas opérer avec les grandeurs infiniment petites », où pensent que les considérations infinitésimales manquent de « rigueur » [Weyl 1922c 93]. A cette occasion, on voit Weyl expliciter un changement de point de vue qui demeure fondamental en géométrie différentielle – on s'autorisera ici quelques reformulations anachroniques. Lorsque Weyl utilise le symbole « d » il ne faut pas y voir le symbole permettant de passer d'une fonction à sa différentielle, encore moins son prolongement en une dérivation extérieure (dérivation dont Weyl considère les premiers éléments au §13, sans notation spécifique) ; cette interprétation n'est d'ailleurs pas compatible avec le fait que pour lui, comme pour E. Cartan, on peut considérer différents tels symboles d, δ en un même points : ces éléments forment un espace vectoriel n -dimensionnel. Lorsque Weyl ou Cartan utilisent ces symboles $d, \delta \dots$ ils voient dans ces éléments infinitésimaux des opérateurs de dérivation : ils prennent sur l'espace tangent le point de vue qui sera formalisé en construisant intrinsèquement l'espace tangent en un point P d'une variété différentielle comme le \mathbf{R} -espace vectoriel des \mathbf{R} -dérivations dans la \mathbf{R} -algèbre des germes de fonctions différentiables en P . Cette interprétation, postérieure, est compatible à la fois avec l'usage des symboles comme opérateurs de dérivation et avec le lien qu'ils entretiennent avec les vecteurs notés chez Weyl

¹⁵ selon les contextes il s'agit d'un réel strictement positif ou simplement d'un scalaire non nul, auquel cas on passe à l'espace projectif.

¹⁶ « *B. Sind P_1 und P_2 zwei zu P unendlich benachbarten Punkte und geht der infinitesimale Vektor PP_1 durch Parallelverschiebung nach P_2 in P_2P_{21} über, PP_2 aber durch Parallelverschiebung nach P_1 in P_1P_{12} , so fallen P_{12} und P_{21} zusammen. (Es entsteht eine unendlichkleine Parallelogrammfigur). »*

(ξ^i) , qui, eux, n'ont pas à être « petits ». Le lien apparaît dans le passage de l'intrinsèque à l'extrinsèque : lors du choix d'un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) , un opérateur δ associe aux n fonctions particulières que sont les x_i , n nombres qui sont les composantes (finies) du vecteur. Lorsque Weyl reformule ses démonstrations pour en faire disparaître les éléments différentiels d , δ etc., il change de point de vue sur les vecteurs tangents en les décrivant alors comme des début de courbes – on dira, en termes plus techniques, des classes d'équivalences de courbes paramétrées pour la relation de tangence en un point. Les formules liant les d , δ etc. lient alors des vecteurs vitesses [Weyl 1922c 92].

iii. Comparaison avec l'*Idée de surface de Riemann*.

Ce dernier aspect apporte le dernier élément du jeu sur lequel se fonde un mode d'insertion de l'infinitésimal dans le fini qu'on peut comparer au mode d'insertion des points dans une courbe analytique complexe proposé en 1913. Dans le premier chapitre de *RZM*, consacré au fondement de la géométrie euclidienne multidimensionnelle sur les notions vectorielles, les vecteurs étaient au départ définis comme des translations. On voit Weyl reprendre cette interprétation au chapitre II en décrivant les vecteurs infiniment petits issus d'un point d'une multiplicité n -dimensionnelle comme des translations infinitésimales. Le point d'arrivée de cette translation est infiniment proche du point initial, il se trouve à la fois (au premier ordre) dans la multiplicité et dans l'espace tangent. Le retour réel à la multiplicité ne peut se faire que par intervention du calcul intégral, les champs de translations infinitésimales définissant des congruences de courbes intégrales (pour reprendre les termes de l'époque). Si l'on quitte ces aspects classiques pour poursuivre la comparaison avec l'*Idée de surface de Riemann*, on voit que dans le cas des courbes analytiques complexes chaque point est inséré directement dans la courbe (une surface, donc, au sens réel) par le filtre de ses voisinages ; cette insertion naturelle repose sur le prolongement analytique direct, comme le montre le modèle weierstrassien des configurations analytiques ; seule l'étude globale passe par le prolongement le long de chemins, le prolongement direct (dans le disque de convergence d'un élément) n'en dépend pas. Au contraire, l'insertion du point d'une variété n -dimensionnelle dans la variété elle-même au moyen des voisinages (finis) ne joue pas de rôle pertinent dans une théorie locale – reposant sur le pseudo-groupe des difféomorphismes locaux – et l'absence de prolongement analytique prive le point d'un lien direct avec les points environnants. La structure différentielle insère au contraire naturellement chaque point dans

un espace qui n'est pas la multiplicité elle-même mais l'espace tangent associé au point. La question qui se pose est celle de savoir dans quelle mesure la structure différentielle permet l'articulation entre ces espaces tangents ou, pour le dire autrement, comment l'espace des points de la multiplicité peut être reconstitué à partir des voisinages infinitésimaux. Contrairement au cas analytique, les chemins sur la multiplicité interviennent dès le passage de l'infinitésimal au fini. Dans le cas analytique la situation est localement triviale : les petits chemins sont tous équivalents ; de plus, au niveau infinitésimal, si l'on en revient à la caractérisation de Cauchy des fonctions monogènes (1856), les différentes directions issues d'un point sont équivalentes. Dans les variétés n -dimensionnelles au contraire, la situation ne sera triviale qu'infinitésimalement et la théorie se donne d'abord comme objectif la domestication de la non-trivialité locale ; en partant d'un point, les raccordements aux espaces infinitésimaux de points voisins dépend *a priori* de la direction – promesse de chemin – à suivre pour s'y rendre. On voit que la comparaison entre l'*Idée de surface de Riemann* et *RZM* permet de faire ressortir un *parallélisme des problématiques* tout en rendant compte des raisons mathématiques conduisant à mettre en avant dans un cas le couple local/global, dans l'autre le couple infinitésimal/fini : il est dans les deux cas fondamental d'identifier un certain niveau où la situation se donne comme triviale – trivialité locale ici, infinitésimale là – pour bien formuler la question de l'articulation des espaces triviaux au sein d'une totalité spatiale – ici globale, là locale mais finie. Notons qu'il s'agit ici d'une analyse épistémologique et non historique, Weyl ne donnant pas d'éléments explicites de comparaison. On trouverait par ailleurs, en élargissant le corpus des textes étudiés, d'autres pistes riches, en particulier dans les doutes de Weyl sur la conception ensembliste du continu, ou dans l'évolution des références philosophiques sur la question de l'espace ; il peut trouver chez Fichte, par exemple, de quoi nourrir une réflexion sur l'opposition entre espace comme formé de points et espace comme formé de morceaux infiniment petits (d'espace). Ces aspects sont étudiés avec soin par Skúli Sigurdsson et Erhard Scholz ([Scholz 2001a], en particulier p.49, 63).

4. Les connexions.

La reprise par Weyl, jusque dans leurs ambiguïtés, d'éléments théoriques bien usuels en géométrie différentielle classique ou en théorie des invariants différentiels lui permet non seulement de formuler mais aussi de motiver des innovations conceptuelles importantes. La stratégie consiste à définir le transport parallèle indépendamment de toute structure métrique (elle-même redéfinie) pour pouvoir poser dans un cadre plus vaste la question de la

dépendance réciproque de ces deux structures géométriques. Weyl réussit aussi à obtenir des définitions intrinsèques – au prix parfois d’une certaine obscurité d’expression – là où Levi-Civita devait plonger (isométriquement) la variété dans un espace euclidien ambiant pour définir le parallélisme infinitésimal. La notion de connexion affine (i.e. linéaire dans le fibré tangent puis les fibrés tensoriels associés) est réduite à son minimum : on se donne une règle associant (linéairement) à chaque élément linéaire attaché à un point – vu comme la translation reliant, sur la multiplicité le point de référence à un point infiniment voisin – une application linéaire (invertible) entre les espace vectoriels attachés au point de départ et au point d’arrivée. S’il est aujourd’hui difficile de le dire en français sans évoquer la distinction entre transformations et transformations infinitésimales, cette distinction n’apparaît pas explicitement dans les premières formulations de Weyl [Weyl 1922c §14]: si $P'(x+dx)$ est un point infiniment proche de $P(x)$, la connexion transforme linéairement un vecteur (ξ^i) en P en un vecteur $(\xi^i+d\xi^i)$ où ¹⁷

$$d\xi^i = -d\gamma_r^i \xi^r,$$

la dépendance linéaire envers le déplacement $dx = (dx_i)$ s’exprime en demandant que les entrées de la matrice $(d\gamma_r^i)$ soient des formes linéaires sur les translations infinitésimales :

$$d\gamma_r^i = \Gamma_{rs}^i dx_s.$$

Une condition géométrique (infinitésimale) supplémentaire, l’existence de coordonnées géodésiques, conduit à la condition de symétrie des coefficients de Christoffel $\Gamma_{rs}^i = \Gamma_{sr}^i$, que l’on pourra interpréter après Cartan comme l’absence de torsion. Weyl poursuit l’exposé d’une problématique entièrement guidée, au delà des questions usuelles d’intrinsicité et d’invariance, par la question de dépassement de l’infinitésimal vers le fini. Le problème est présenté ainsi :

Soient P et P' , deux points réunis par une courbe ; imaginons en P , un vecteur et déplaçons-le parallèlement à lui-même le long de la courbe de P en P' . Les équations (36) qui donnent les composantes inconnues v^i du vecteur obtenu en P' n’admettent qu’une solution pour des conditions initiales données. *Le transport d’un vecteur, effectué comme il a été dit, n’est donc pas en général intégrable ; c’est-à-dire que le vecteur qu’on obtiendra en P' , dépend du chemin le long duquel s’est fait le déplacement.* [Weyl 1922c 101]

¹⁷ avec les conventions de notation usuelles sur les sommations implicites

Ce passage des déplacements infinitésimaux dx_i aux parcours de chemins reliant deux points n'est en soit ni local ni global. Weyl se ramène au niveau infinitésimal : les « éléments de plan » attachés à un point jouant le rôle de germes¹⁸ de surfaces délimitées par des courbes, tout comme les éléments linéaires sont des germes de courbes ; c'est dans ce cadre bien classique qu'il fait apparaître le tenseur de courbure, dont l'annulation garantit l'intégrabilité. L'équivalence entre l'annulation du tenseur de courbure et le caractère « linéaire euclidien » de la multiplicité reprend un modèle de démonstration donné quelques pages avant, à propos de l'intégrabilité des formes $f_i dx_i$ testée par l'analogue du rotationnel (expression 27) ; Weyl expliquait alors :

Ces relations font penser au *théorème de Stokes*. L'invariant différentiel linéaire $f_i dx_i$ est dit *intégrable* si son intégrale le long d'une courbe fermée (tourbillon intégral) quelconque est nul. (On sait que cela n'est possible que pour une différentielle exacte). Imaginons une surface s'appuyant sur la courbe fermée, et soient $x_i = x_i(s, t)$ sa représentation paramétrique ; décomposons-là en parallélogrammes infiniment petits par les lignes de coordonnées. Le tourbillon le long de la courbe frontière se ramène au tourbillon pris autour de chaque maille du réseau de la surface, et ce tourbillon est donné par l'expression (27) multiplié par $ds dt$. [Weyl 1922c 93]

Le schéma de démonstration est parfaitement classique en physique mathématique et laisse complètement dans l'implicite le fait que tout chemin fermé n'est pas le bord d'une surface. Ce type de raisonnement conduit à caractériser l'espace linéaire usuel par l'annulation de la courbure, ce qui ne va pas sans nécessiter une précision du concept d'espace linéaire. Weyl la donne au début du paragraphe 15, après, rappelons-le, avoir défini l'intégrabilité du transport parallèle par son indépendance envers le chemin :

C'est seulement dans ce cas très particulier, où l'intégrabilité a lieu, que l'on peut parler du *même* vecteur en deux points P et P' (...). Dans ce cas, on dira que la multiplicité est *euclidiennement affine*. (...) Conformément à la suite des développements que nous avons poursuivis au chapitre I (nous renonçons ici à donner la démonstration rigoureuse), il est possible de construire des systèmes de coordonnées « *linéaires* » qui sont caractérisés par la propriété suivante : des mêmes vecteurs en des points différents y possèdent les mêmes composantes. Dans un tel système « linéaire », les composantes de la connexion affine s'évanouissent. La multiplicité est un espace affine au sens du chapitre I : *L'intégrabilité du transport vectoriel est la*

¹⁸ « germe » est dans cette phrase une métaphore et non un terme technique.

propriété géométrique et infinitésimale par laquelle les espaces « linéaires » se distinguent dans l'ensemble des multiplicités à connexion affine. [Weyl 1922c 102]

Le mode d'interrogation, de formation des quantités pertinentes, de démonstration des affirmations conduisent moins à une localisation de la notion d'espace affine – au sens plus *technique* du terme de localisation dans les cas, par exemple, du passage de \mathbf{R}^n à une variété topologique dont \mathbf{R}^n est le modèle local, ou du passage des fonctions intégrables sur \mathbf{R} aux fonctions localement intégrables – qu'à une *lecture* locale des notions mises en place au chapitre 1. Weyl dispose de tous les outils techniques et conceptuels, ainsi que d'un vocabulaire qui n'est plus confidentiel, pour placer un petit commentaire sur la différence entre espace affine *im Großen* et *im Kleinen*, ou sur la localisation induite par le choix d'un travail de dépassement intégral du niveau infinitésimal. Il ne le fait pas.

Avant d'aborder la question du couplage entre la structure de transport affine et la structure métrique, Weyl modifie le sens que cette dernière avait depuis Gauss-Riemann. Cette modification s'appuie sur le parallèle avec le passage d'une physique des actions à distance à une physique des actions de contact et souligne l'imparfaite infinitésimalisation de la géométrie métrique que représente l'étude des ds^2 en coordonnées générales :

Par un examen des principes mathématiques, examen que les conséquences que la théorie d'Einstein rendaient nécessaires, l'auteur du présent livre a fait néanmoins la remarque que la géométrie riemannienne n'a réalisé qu'une partie de l'idéal d'une géométrie infinitésimale parfaite ; il y a encore un dernier élément de géométrie globale à éliminer, qui provient d'ailleurs toujours de son passé euclidien. En effet, Riemann suppose que l'on peut comparer l'une à l'autre les mesures de deux éléments linéaires situés à *deux endroits différents* ; *la possibilité d'une telle comparaison à distance ne peut être conditionnée dans une véritable géométrie infinitésimale* ; il n'y a d'admissible que le principe qui rend possible le transport d'un étalon de longueur d'un point à un point infiniment voisin. [Weyl 1922c 88]

Ainsi la possibilité d'utiliser un ds^2 pour dire, par exemple, que deux vecteurs attachés à des points différents sont tous deux de norme 1, manifeste une réduction imparfaite au niveau purement infinitésimal des notions euclidiennes usuelles. Weyl y remédie en introduisant les changements de jauge et les connexions associées. Premièrement, il ne considère plus seulement les ds^2 mais les classes d'équivalences de ds^2 différant l'un de l'autre par la multiplication par une fonction strictement positive – qu'on peut appeler changement de calibre, d'étalon, ou de jauge : en considérant une telle classe d'équivalence on s'interdit de

comparer les normes de vecteurs attachés à des points différents ¹⁹. Ensuite, ainsi que l'indique la fin de la citation, le modèle du transport parallèle est imité : le premier permet de transporter les directions des vecteurs, une « connexion métrique » relie les calibrages en deux points infiniment voisins P et P' par un facteur dépendant linéairement de la translation infinitésimale $\overline{PP'}$. C'est cet ensemble formé d'une classe de ds^2 et d'une « connexion métrique » que Weyl appelle « la métrique d'une multiplicité » [Weyl 1922c 106]. Un tenseur de « courbure segmentaire » (« *Streckenkrümmung* »²⁰) vient mesurer, au niveau infinitésimal, le défaut d'intégrabilité de la connexion métrique ; sa stabilité par changement de calibrage prouve qu'elle est bien un invariant de la structure métrique, au sens de Weyl. Les espaces de Riemann (i.e. munis d'un ds^2) sont caractérisés parmi les espace métriques au sens de Weyl par l'annulation de la courbure segmentaire ²¹. Après que les deux structures, celle relative au transport des directions et celle relative au transport des longueurs, ont été mises en place parallèlement mais indépendamment, Weyl établit le

(...) *théorème fondamental de la géométrie infinitésimale* ; il amène la construction de l'édifice géométrique à un état d'un achèvement d'une harmonie merveilleuse. Dans un espace métrique, la notion de déplacement parallèle se laisse définir d'une façon et d'une seule, de manière à satisfaire à notre précédente condition : *par le déplacement parallèle d'un vecteur, le segment qu'il détermine doit rester inaltéré*. Le principe géométrique fondamental du transport infinitésimal des segments par des longueurs porte en soi, en même temps le principe de transport des directions ; *un espace métrique a par sa nature même une connexion affine*. [Weyl 1922c 107]

C'est le résultat principal de l'article de 1918 sur la *Reine Infinitesimalgeometrie*.

¹⁹ C'est dans *Reine Infinitesimalgeometrie* que cette introduction du changement de jauge est explicitement rapprochée du passage d'une structure métrique (au sens classique) à une structure conforme, structure conforme dont l'importance dans la conception riemannienne des fonctions d'une variable complexe est rappelée [Weyl 1918 13].

²⁰ « *Strecke* » renvoie dans le texte de Weyl aux segments considérés uniquement dans leur longueur et non dans leur direction. Dans un espace vectoriel, un vecteur détermine donc une direction (parfois identifiée au vecteur lui-même, parfois à sa classe modulo multiplication par un réel strictement positif) et un segment (stable par isométrie pour un choix de structure forme quadratique non-dégénérée).

5. Géométrie et physique.

i. La géométrie purement infinitésimale (1918).

Sur la période 1918-1920, cette poursuite opiniâtre d'un projet d'infinitésimalisation parallèle de la géométrie et de la physique – jusqu'à la non intégrabilité du transport de l'unité de longueur – permet à Weyl d'envisager l'unification de la théorie einsteinienne de la gravitation et de l'électromagnétisme de Maxwell : les degrés de liberté supplémentaires introduits dans la théorie géométrique par la courbure segmentaire sont à lier au potentiel électromagnétique comme la courbure relative au transport est reliée, par les équation d'Einstein, au tenseur d'énergie-impulsion. Cet aspect est présent, par exemple, dans *Reine Infinitesimalgeometrie* en 1918 : si le transport d'unité de longueur est donné par la forme différentielle $d\varphi = \varphi_i dx_i$,

Il résulte de (6) que le tenseur linéaire du second ordre, de composantes

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \text{ est fixé univoquement par la métrique de la multiplicité ; je l'appelle}$$

le *tourbillon métrique*. C'est, je crois, la même chose que ce qu'en physique on appelle le *champ électromagnétique*. [Weyl 1918 16].²²

Cette idée guide toute la construction de l'article, l'enchâssement des structures mathématiques étant mis en parallèle strict avec celui des aspects physiques :

Je souhaite développer dans cette note cette *géométrie purement infinitésimale*²³ qui contient, j'en suis convaincu, le monde physique comme cas particulier. La mise en place d'une géométrie de proximité [*Nahegeometrie*] s'accomplit en trois stades. Au premier stade on trouve le *continuum* au sens de l'*Analysis situs*, nu de toute métrique – le *monde vide*, pour parler le langage de la physique ; au deuxième stade le *continuum à connexion affine* – je nomme ainsi une multiplicité dans laquelle un sens a été donné à la notion de transport parallèle des vecteurs ; en physique, la connexion affine se présente comme *champ de gravitation* ; au troisième stade, finalement, le

²¹ Ce passage est moins problématique que celui, parallèle, sur le transport des directions, les surfaces munies d'un ds^2 ayant dès le départ été traitées localement, ce qui n'est pas le cas des espaces vectoriels (pseudo)-euclidiens.

²² « Aus (6) geht hervor, daß der linearen Tensor 2. Stufe mit dem Komponenten (...) durch die Metrik der Mannigfaltigkeit eindeutig festgelegt ist; ich nenne ihn den metrischen Wirbel. Er ist, wie ich glaube, dasselbe, was in der Physik elektromagnetisches Feld heißt. »

²³ On peut aussi bien traduire par *géométrie infinitésimale pure*.

continuum métrique – en physique : l'« *ether* », dont les états se manifestent dans les phénomènes de la matière et de l'électricité.[Weyl 1918 3]²⁴

Si cette proposition théorique ne rencontre guère d'écho chez les physiciens – chez Einstein le premier – il semble que Weyl l'abandonne progressivement dans le cadre d'une évolution de sa philosophie personnelle vis-à-vis des mathématiques et de la physique [Scholz 2001b 79 et suiv.]. La quatrième édition de *RZM* ne propose plus ce grandiose et strict parallèle entre structures mathématiques et phénomènes physiques ; le théorème fondamental de la géométrie infinitésimale ne fonde plus une théorie électromagnétique de la matière ; la nécessité enfin « fondée en raison » de la quadridimensionnalité du « monde » n'est plus reconnue²⁵.

ii. Le *Raumproblem* (1923).

La recherche plus purement géométrique n'est toutefois pas abandonnée et connaît un nouveau développement fondamental sur la période 1919-1922 ; il nous suffit de montrer ici comment la reformulation de la problématique autour de la notion de groupe de Lie s'inscrit dans un projet d'infinitésimalisation toujours assez indifférent au couple local/global. L'aspect groupe n'avait bien entendu jamais été absent ; le passage de la métrique donnée par un simple ds^2 à la métrique au sens de Weyl était bien décrit dès 1918 comme le passage d'une connexion (de chaque point aux points infiniment voisins) par isométrie (pseudo-euclidienne) à une connexion par similitude. Weyl évolue toutefois en faisant porter la critique non plus sur l'aspect imparfaitement infinitésimal de la conception riemannienne de la métrique, mais plutôt sur la primauté des formes quadratiques, sur l'aspect « pythagoricien » jusqu'ici non soumis à l'examen. Un paragraphe est consacré à cette question dans la quatrième édition de *RZM* :

(...) nous n'avons pas encore précisé notre point de vue sur la métrique elle-même. Qu'elle soit donnée précisément par une forme quadratique différentielle, nous l'avons admis, mais rien n'imposait *a priori* cette représentation. [Weyl 1922c 119]

²⁴ « *In dieser Note möchte ich jene reine Infinitesimalgeometrie entwickeln, die nach meine Überzeugung die physikalische Welt als einen Sonderfall in sich begreift. Der Aufbau der Nahegeometrie vollzieht sich sachgemäß in drei Stufen. Auf der ersten Stufe steht das aller Maßbestimmungbare Kontinuum im Sinne der Analysis situs – physikalisch gesprochen, die leere Welt; auf der zweiten das affin zusammenhängende Kontinuum – so nenne ich eine Mannigfaltigkeit, in welcher der Begriff der infinitesimalen Parallelverschiebung von Vektoren einen Sinn hat; in der Physik erscheint der affine Zusammenhang als Gravitationsfeld -; auf der dritten endlich das metrische Kontinuum – physikalisch : der „Äther“, dessen Zustände in den Erscheinungen der Materie und Elektrizität kundgeben. »*

²⁵ On la trouvait dans la plupart des textes de la période 1918-1920, par exemple dans [Weyl 1919].

Après avoir rappelé la possibilité, envisagée par Riemann en 1854, des métriques dites de Finsler, Weyl place la question dans une nouvelle arène mathématique – ou plutôt fait le lien avec le problème de l'espace tel qu'il est présenté chez Lie et Helmholtz :

Ce qui détermine originellement et généralement la métrique en un point P, c'est le *groupe des rotations* ; les propriétés métriques de la multiplicité au point P sont connues, quand on sait quelles sont parmi les transformations linéaires de l'ensemble des vecteurs en P, celles qui sont des représentations congruentes de cet ensemble.

Il y a autant de sortes de déterminations métriques qu'il y a de groupes essentiellement différents de transformations linéaires (...).[Weyl 1922c 119]

C'est par une analyse à la fois mathématique et épistémologique qu'il reprend la question, en postulant *a priori* ce que doivent vérifier les transformations jouant les rôles des isométries et des similitudes. La notion de transport parallèle par une connexion affine est reprise sans modification, chacune étant codée par la série des coefficients de Γ_{ij}^k (soumis à la seule condition de symétrie par rapport aux indices bas). Précisons le lien entre les deux groupes linéaires, le groupe **G** des « rotations » infinitésimales attachées à chaque point et le groupe des « congruences » transformant l'espace attaché à deux points infiniment voisins²⁶ : si deux bases de l'espace attaché à P sont liées par une rotation, alors les bases transportées par une congruence donnée quelconque doivent aussi être liées par une rotation ; cela revient à demander que pour toute rotation G et toute congruence C , $C^{-1}CC \in \mathbf{G}$, où encore que le groupe des congruences appartienne au normalisateur de **G** dans le groupe linéaire. Aucune autre contrainte ne se présentant, Weyl prend ce normalisateur comme groupe des congruences. Il est aussi demandé que **G** soit un groupe continu connexe, conservant de plus les volumes orientés, un sous-groupe du groupe spécial linéaire donc ; Weyl renoncera plus tard à ce dernier postulat. Les autres postulats sont motivés par une réflexion sur ce que doivent être les rôles respectifs des deux groupes : le groupe des rotations exprime la « forme des phénomènes » ou la « nature de l'espace » [Weyl 1922c 122], alors que le transport par congruence (la « connexion métrique ») doit dépendre du « contenu matériel » du monde uniquement, ce qui conduit à postuler son indétermination au sein de la théorie mathématique

I. La nature de l'espace est compatible avec toutes les connexions métriques possibles. [Weyl 1922c 122]

²⁶ On trouvera une reformulation précise dans le langage des espaces fibrés dans l'article d'Erhard Scholz [Scholz 2001b p.85-95]. Nous restons ici plus fidèle au texte de Weyl y compris dans ses obscurités. Quelques images inspirées de la théorie des espaces fibrés aident toutefois à mieux saisir le texte, ne serait-ce qu'en concevant les rotations comme un groupe agissant verticalement et les congruences comme agissant horizontalement.

Ce postulat un peu vague est explicité en n'imposant aucune contrainte aux coefficients Λ_{ij}^k déterminant la congruence associée à chaque translation infinitésimale. Il manque bien sûr une relation contraignante, le second postulat va reprendre la propriété précédemment établie dans le cadre classique (enrichi par la notion de jauge) comme le « théorème fondamental de la géométrie infinitésimale » :

II. La connexion métrique détermine univoquement la connexion affine.
[Weyl 1922c 123]

Ce postulat conclut la phase que Weyl, fidèle au vocabulaire kantien, décrit lui-même en 1922 comme la phase de « synthèse » [Weyl 1922a 265] du problème ; phase dans laquelle notions mathématiques et contraintes épistémologiques se mêlent inextricablement. En eux-mêmes les aspects mathématiques présentent un certain flou pour le lecteur moderne accoutumé à utiliser de structures dans lesquelles il sait à chaque instant « où ça se passe » et « à quel niveau ça se passe » ; pour ce qui est du « où », Weyl ne s'exprime ici ni plus ni moins clairement que dans sa description de l'espace tangent comme voisinage infinitésimal dont les éléments sont aussi des translations infinitésimales sur la variété : ce système d'assimilations repose sur la pratique du calcul différentiel et se transpose tel quel à la formulation du problème par les groupes. Pour ce qui est du niveau, les formulations de la première partie concernent alternativement et implicitement les transformations et les transformations infinitésimales – on dirait les groupes de Lie et leurs algèbres de Lie. Mais ces aspects sont somme toute compatibles avec l'objectif d'analyse conceptuelle de cette première partie. La mise en place mathématique précise commence ensuite, et elle consiste à traduire en quelques pages le problème de groupe en un problème linéaire portant sur les algèbres de transformations infinitésimales. Ces raisonnements infinitésimaux et linéaires conduisent à une traduction des postulats I et II en trois points, liant en particulier la dimension n de la multiplicité à celle N du groupe des rotations :

Le groupe infinitésimal \mathfrak{g} des rotations possède les propriétés suivantes :

- a) la trace de chaque matrice est nulle.
- b) en dehors de zéro, il n'y a dans \mathfrak{g} aucune matrice double symétrique.
- c) le nombre maximum des dimensions de \mathfrak{g} qui soit compatible avec b) est

$$N = \frac{n(n-1)}{2}. \quad [\text{Weyl 1922c 127}]$$

Dans la quatrième édition de *RZM* Weyl annonce avoir établi pour $n = 2, 3$ qu'une telle algèbre de Lie est celle d'un groupe $O(p, q)$ ²⁷, groupe des transformations linéaires conservant une forme quadratique non dégénérée : le caractère privilégié du cadre « pythagoricien » pour la forme *a priori* des phénomènes est ici justifié. Le lien entre algèbre et groupe avait été rapidement décrit lors de la phase de linéarisation : les matrices du groupe, écrit Weyl, s'obtiennent en calculant les exponentielles des matrices de l'algèbre de Lie [Weyl 1922c 124]. Notons que Weyl n'a pas ici à développer une théorie abstraite des groupes de Lie, puisqu'il travaille avec des sous-groupes du $Gl(n, \mathbf{R})$. Par ailleurs, le passage des groupes de transformations finies aux algèbres de transformations infinitésimales ne relève pas ici de l'objectif, motivé épistémologiquement, d'infinitésimalisation parallèle de la physique et de la géométrie : la formulation initiale en termes de groupes se place déjà dans un univers théorique de connexions, l'infinitésimalisation est déjà réalisée, et elle impose la forme particulière du questionnement. Le passage des transformations (finies) des espaces (infinitésimaux !) associés à chaque point et à deux points distincts quelconques aux transformations infinitésimales est à la fois une conséquence technique de la formulation du problème en terme de transport et la reprise de la stratégie fondamentale de la théorie des groupes de Lie.

6. Une place pour les interrogations globales ?

Il n'est guère besoin d'un bilan pour rappeler combien cette théorie se développe indépendamment du couple local/global, ou plutôt dans une grande indifférence envers lui. Weyl hérite d'un langage, d'outils, de modes de questionnement forgés soit en géométrie différentielle classique soit en théorie des invariants différentiels ; sa maîtrise des deux, son savoir-faire dans l'enchâssement de structures acquis en 1913 et conforté par la lecture de la Dissertation inaugurale de Riemann de 1854 lui permettent de reformuler les acquis de la géométrie différentielle de manière plus intrinsèque, et les acquis de la théorie des invariants différentiels de manière plus géométrique (ainsi pour les courbures, reliées aux transports le long de parallélogrammes infinitésimaux). Sa réflexion ne le conduit pas à rechercher un *dépassement* d'une démarche traditionnelle centrée sur le couple infinitésimal / fini par recentrement sur le couple local / global, mais au contraire un *approfondissement* de l'infinitésimalisation des concepts géométriques ; approfondissement dont il conjecture, dans un premier temps, qu'il conduit à une unification par la géométrie de la gravité et de

²⁷ La notation n'est pas celle de Weyl

l'électromagnétisme. La comparaison entre *RZM* et *Die Idee der Riemannschen Fläche* peut faire apparaître un grand parallélisme du questionnement, bien que cette clé de lecture ne soit pas explicitement fournie par Weyl. *RZM* est bâti sur l'opposition entre trivialité infinitésimale et non trivialité locale, là où *Die Idee* oppose la trivialité locale à la non trivialité globale ; les *structures* décrivent dans un cas l'articulation locale des espaces infinitésimaux, dans l'autre l'articulation globale des voisinages/éléments de fonction. En un mot, les couples infinitésimal/fini et local/global y sont des analogues fonctionnels.

Un lecteur apprenant la géométrie différentielle dans *RZM* ne serait, semble-t-il, guère sensibilisé aux questions globales. On l'a vu, le caractère partiel des cartes locales est à peine évoqué et ne joue aucun rôle dans les développements mathématiques du chapitre II. La question, centrale, de l'intégrabilité des différents transports passe par la seule considération de chemins bordant des morceaux de surface, cette hypothèse demeurant parfaitement implicite. Les notions de courbure ainsi mises en place permettent de mesurer, nous dit-on, de combien l'espace considéré s'écarte d'un espace euclidien – entendre « plat », pour la courbure de transport parallèle – ou d'un espace métrique au sens de Riemann – pour la courbure segmentaire ; le caractère local de l'interprétation de l'annulation de la courbure est implicite lui aussi. L'attention du lecteur n'est guère guidée vers les aspects topologiques globaux par une théorie dans laquelle l'enchâssement des structures différentielles, de connexion affine puis métriques (au sens de Weyl) conduit à décrire le premier niveau, celui de la multiplicité « au sens de l'*analysis situs* », non seulement comme celui de « l'espace vide » au sens de la physique [Weyl 1918 2] mais aussi comme celui de l'espace sans forme du point de vue géométrique, le « continu amorphe » [Weyl 1922c 88] !

Des considérations globales apparaissent toutefois à la fin de *RZM*, lorsqu'après que les équations fondamentales ont été établies on cherche à les résoudre de manière exacte et explicite dans quelques cas simples : répartition de masse simple, symétrie de rotation dans les sections spatiales, modèles statiques dans lesquels la métrique induite dans les sections spatiales ne dépend pas de la coordonnée de temps ($ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2$ où f et les coefficients de σ ne dépendent que des coordonnées d'espace). Dans ce travail de résolution des équations apparaissent des considérations d'un genre nouveau, souvent à l'occasion de la discussion d'une contradiction apparente ; par exemple :

Dans la théorie générale de la relativité, où nous supposons que l'espace n'est pas nécessairement euclidien, il se pourrait très bien que les limites de l'espace, outre les frontières infinies, fussent en partie situées à distance finie ; par exemple, l'espace

serait un espace euclidien à connexion multiple, les points singuliers étant exclus, grâce à des surfaces fermées les entourant ; ces frontières seraient encore des frontières à distance finie (comp. §34) ; *les points singuliers, en effet, n'appartiennent pas au champ* ; mais on pourrait néanmoins en faire le tour. [Weyl 1922c 230]

Cette apparition d'aspects globaux en lien avec les problèmes de conditions aux limites et de singularités acceptables est, en 1921 déjà, le fruit du développement complexe sur la période 1916-1921 des premiers modèles en cosmologie relativiste, développement dont Weyl n'est que l'un des protagonistes. Nous ne pouvons ici aller au delà de la simple mise en contexte de ces passages de Weyl, en nous appuyant sur l'article *Weyl's contribution to cosmology* de H. Goenner [Goenner 2001]. Aiguillonné par un premier travail de De Sitter, Einstein est confronté aux difficultés d'établir les conditions à imposer à l'infini (spatial) pour obtenir une solution statique, dont il pense qu'elle est seule compatible avec les observations astronomiques. Il contourne le problème en modifiant son équation fondamentale en

$$R_{\alpha\beta} - 1/2 Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta}$$

au lieu de

$$R_{\alpha\beta} - 1/2 Rg_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta} ,$$

introduisant la constante cosmologique Λ . Cette équation admet une solution dans laquelle les sections spatiales sont des 3-sphères : le problème des conditions aux limites disparaît avec les frontières ! A la grande surprise d'Einstein, De Sitter trouve en 1917 une solution non triviale à sa nouvelle équation, dans le cas d'un univers vide de matière ($T_{\alpha\beta} = 0$) : cette solution de De Sitter – par son interprétation choquante comme univers dans lequel la gravitation existerait sans matière –, son caractère statique ou non, la topologie de ses sections spatiales, la présence ou non de singularités, va alimenter un débat dans lequel, outre Einstein et de Sitter, Klein, Hilbert et Weyl interviennent. Dans un deuxième article de 1917 [De Sitter 1917], De Sitter attire l'attention sur de nombreux aspects jusque là non pris en compte en théorie de la relativité : possibilité d'images fantômes d'une même étoile dans un univers spatialement clos ; compatibilité de la métrique avec deux modèles topologiquement distincts de sections spatiales, celui de la sphère S^3 et celui de l'« espace elliptique » (l'espace projectif obtenu en identifiant les points diamétralement opposés sur S^3). Il attire aussi l'attention sur le caractère délicat des discussions sur la courbure des sections spatiales ou le caractère statique du modèle : il exhibe ainsi sa solution dans différents systèmes de coordonnées, faisant apparaître des sections spatiales $t = 0$ (mais t n'est bien sûr pas stable par les changements admissibles !) dont la courbure change de signe, ou des ds^2 qui sont parfois « statiques » au

sens de Weyl, parfois non. On voit que ce débat lancé par des questions de conditions aux limites met en lumière deux autres types de problèmes ; les premiers sont liés à la non unicité des cartes locales et à la difficulté (l'impossibilité) d'interpréter intrinsèquement des formules explicites contenant d'autres grandeurs que les grandeurs tensorielles intrinsèques de la théorie ; les secondes sont liées à l'impossibilité de décrire tout le modèle par une seule carte, en particulier l'impossibilité de définir globalement un partage en lignes temporelles et hypersurfaces spatiales. Un exemple de maladresse est donné semble-t-il par Weyl, qui écrit le ds^2 de De Sitter dans un système de coordonnées dans lequel le ds^2 devient infini sur une hypersurface (l'« équateur ») : il interprète ce résultat comme la preuve que la solution de De Sitter ne correspond pas à un espace sans matière, que les singularités masquent la présence de matière. Il propose à cette occasion un intéressant modèle mixte entre celui d'Einstein (univers rempli uniformément d'un fluide) et le modèle « vide » de De Sitter en recollant de manière lisse la solution de De Sitter pour le monde loin de l'équateur, et une bande équatoriale remplie uniformément. Klein intervient à ce propos. La simplification technique que représente la formulation par De Sitter [De Sitter 1917] de son modèle au moyen d'une hypersurface²⁸ d'un espace \mathbf{R}^4 muni d'une métrique de Minkowski au sens de la relativité restreinte permet à Klein d'intervenir dans le débat, pour signaler tout d'abord que tout le contenu mathématique nécessaire au traitement de la question était déjà disponible dans ses travaux de 1871-72 sur les modèles projectifs des géométries non-euclidiennes, le programme d'Erlangen et plus généralement la géométrie des espaces de courbure constante. Outre l'ancienneté de ses travaux sur l'espace elliptique, il relève avec justesse que

Par la donnée du $d\sigma^2$ n'est en effet pas encore déterminée la « connexion » [Zusammenhang] que présente la forme spatiale [Raumform] im Großen associée. Même dans la littérature contemporaine on n'y prête souvent pas attention. [Klein 1918 406]²⁹

Cette remarque lui permet de renvoyer à ses propres travaux et ceux de Killing du début des années 1890 sur le problème de l'espace. Ce cadre familier lui permet d'affirmer qu'il n'y a pas d'incohérence dans le modèle de De Sitter ; en particulier, l'hypersurface de singularité dans laquelle Weyl croit discerner la présence de matière n'est qu'une singularité due au mauvais choix de paramétrage et nullement une singularité réelle du modèle de De Sitter. Il

²⁸ L'hyperboloïde $a^2+b^2+c^2+d^2-e^2 = \text{const.}$

²⁹ « Mit der Angabe der $d\sigma^2$ ist in der Tat der „Zusammenhang“, den die zugehörige Raumform im Großen zeigt, noch nicht bestimmt. Auch dieses wird in der zeitgenössischen Literatur immer noch nicht beachtet. »

montre aussi que les différents paramétrages utilisés ne couvrent pas tous la même zone dans l'hyperboloïde de De Sitter.

On trouve l'écho de ces débats cosmologiques dès la première édition de *RZM* en 1918, dans un paragraphe consacré à la « topologie de l'univers » ; le contenu en est remanié d'édition en édition et il reste dans la quatrième édition un paragraphe, fort intéressant, qui présente moins une théorie qu'il ne fait état des incertitudes de l'auteur et de l'enchevêtrement des questions. Du moins une source des incertitudes est-elle identifiée :

La théorie de la relativité générale laisse de côté la question de savoir si les points de l'univers peuvent être représentés d'une manière continue, univoque par les valeurs de quatre coordonnées x .

Elle suppose simplement que le *voisinage* de chaque point d'univers peut être représenté d'une manière continue, réciproque et univoque sur un domaine de l'espace numérique à quatre dimensions (...); elle ne fait aucune hypothèse sur la configuration générale de l'univers [*über den Zusammenhang der Welt im Ganzen*]. [Weyl 1922c 239]

Notons que ce paragraphe est le seul dans *RZM* où « voisinage » ait le sens qu'il a acquis depuis Weierstrass ; il n'est question dans le reste du texte que de voisinage infinitésimal ou de voisinage immédiat³⁰. Vient ensuite dans le texte une petite introduction informelle à l'*Analysis situs*, au moyen d'exemples de propriétés qui en relèvent : présence ou non de bord, distinction entre la sphère et le tore mise en évidence en découpant le long de courbes fermées, non orientabilité de la bande de Möbius... autant d'exemples tirés d'un répertoire déjà bien classique. La mise en place conceptuelle est réduite au strict minimum : le couple *im Kleinen / im Grossen* n'est pas mis au centre ; aucune allusion n'est faite aux travaux sur le lien entre topologie et courbure (travaux disponibles au moins dans le cas à courbure constante), ou entre topologie et singularités des équations différentielles. Weyl passe sans transition, et sans chercher particulièrement à faire le lien, de ses exemples de propriétés topologiques à des incongruités du type de celles proposées par De Sitter :

De chaque point part le double cône du passé passif et de l'avenir actif. Alors que dans la théorie restreinte ces deux cônes sont nettement séparés par un domaine

³⁰ Le vocabulaire de Weyl est donc non ambigu dans sa désignation respective des niveaux locaux et infinitésimaux. Ce vocabulaire n'est pas exactement le même que chez Einstein, par exemple dans [Einstein 1916] : l'expression $ds^2 = -dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2$ est dite relative à un repère « *unendlich klein („örtlich“)* » [Einstein 1916 777] ; ce repérage dans l'infiniment petit, relatif à un point particulier (le *örtlich* est ici proche de l'*Ortsuniformisierende* de Weyl en 1913) est qualifié quelques lignes plus bas de travail « *in dem „lokalen“ Koordinatensystem* » [Einstein 1916 777]. Cette description est reprise à la fin du texte, le terme „*lokal*“ étant encore entre guillemets [Einstein 1916 819].

intermédiaire, il se pourrait très bien ici qu'ils empiétassent l'un sur l'autre ; il peut arriver donc que je constate maintenant un événement qui résulte en partie de mes faits et gestes à venir. Il n'est pas exclu non plus qu'une ligne d'univers repasse dans le voisinage immédiat [*in die Nähe*] d'un point où elle a déjà passé, malgré qu'elle eût toujours une direction temporelle ; [Weyl 1922c 241]

Il aborde ensuite la question des conditions aux limites en se plaçant au centre la question de la causalité. Après avoir évoqué la solution d'Einstein consistant à éliminer ces conditions en supposant les sections spatiales sans bord (qu'il qualifie de considérations « *über den Zusammenhang der Welt im Großen* ») :

(...) je ne trouve, à cette manière de voir, aucune force démonstrative, puisque les équations différentielles expriment complètement les lois de la nature sans indétermination et sans recours aux conditions aux limites. [Weyl 1922c 243]

Au raisonnement d'Einstein il oppose un raisonnement local : au voisinage d'un point P de l'univers on peut choisir un système de géodésiques temporelles orthogonales à tous les points d'un voisinage de P dans une section spatiale ; en utilisant le temps propre mesuré par ces géodésiques on obtient localement un système de coordonnées dans lequel

(...) nous avons atteint le but visé, qui était d'avoir des équations différentielles donnant les dérivées par rapport au temps x_0 en fonction des autres grandeurs et de leurs dérivées spatiales. [Weyl 1922c 243]

Le caractère à la fois local et non unique de ce système de coordonnées (le choix du systèmes des géodésiques de type temps n'étant pas unique) ne remet pas en cause pour Weyl l'idée qu'un système d'équations sous cette forme montre le caractère déterministe de la théorie, au sens où l'avenir immédiat est entièrement déterminé par le passé immédiat, sans que des conditions aux limites de l'univers soient nécessaires. En un autre passage, Weyl revient sur la notion de modèle « statique » en introduisant la notion, plus large, de modèle « stationnaire », d'ailleurs due à Klein [Goenner 2001 115].

On voit que le rôle des aspects globaux topologiques est loin d'être la seule source de complexité de la théorie : si la topologie n'intervient dans *RZM* que dans ce paragraphe consacré aux questions cosmologiques, c'est parce qu'il est le seul où elles jouent un rôle et non parce que les difficultés de la théorie cosmologique sont toutes de nature topologique. Ce paragraphe tranche par son style comme par son contenu : au déroulement conceptuel majestueux guidé par l'idée d'infinitésimalisation parallèle de la géométrie et de la physique et permettant d'établir les équations fondamentales d'une théorie unifiée, succède la moisson de problèmes et de perplexités issus des premières tentatives de résolution de ces équations.

Le mouvement général innovait sur le plan technique comme sur le plan conceptuel, en mettant au centre l'infinitésimalisation au moins autant que la recherche d'intrinséquerité ; il reprenait toutefois le langage et le cadre théorique cohérent de la théorie des invariants différentiels, langage et cadre utilisés par Einstein. Un langage et un cadre qui ne réservaient pas à proprement parler de *place* pour les questions globales. La recherche et l'interprétation de solutions des équations fondamentales présente une phase moins mûre du développement théorique – euphémisme – dans laquelle on voit chacun puiser dans sa culture mathématique personnelle – et celle de Klein n'est pas celle d'Einstein, qui n'est pas celle de Weyl ... – pour bricoler une réponse *ad hoc* à des propositions plus ou moins convaincantes, plus ou moins bien formulées, plus ou moins bien comprises. Les questions globales font, parmi d'autres, irruption à l'occasion de la discussion des conditions aux limites, puis des conséquences physiques – en particulier sur les notions de temps et de causalité – de la multiplicité des topologies possibles.

III. Le renouveau de la géométrie différentielle selon Elie Cartan (1922-1925).

Entre 1922 et 1925, les réflexions d'Elie Cartan sur la relativité générale et les travaux de Hermann Weyl l'amènent à proposer une généralisation de la notion de connexion affine. Nous voulons présenter ces travaux dans un esprit de comparaison systématique avec ceux de Weyl, en particulier sur les points suivants : cadre épistémologique et projet d'infinitésimalisation, conception des espaces mathématiques impliqués (dans la perspective d'une histoire des origines de la notion d'espace fibré), présence ou non des interrogations globales à côté des questions de passage de l'infinitésimal au fini. Nous verrons que, comme chez Weyl mais par d'autres voies, c'est un recentrement de la problématique autour de questions de groupes qui conduira à l'émergence puis le passage au premier plan des problématiques globales, mais uniquement après 1925.

Nous nous appuyons principalement sur les textes suivants : cinq notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (entre février et avril 1922)³¹, la série d'articles *Sur les variétés à connexion affine et la relativité généralisée* (1923-25)³², la conférence *La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielle* [Cartan 1925b] et le cours sur *La géométrie des espaces de Riemann* [Cartan 1925a].

³¹ [Cartan 1922b-f]. Sauf mention du contraire, la pagination est celle des *Œuvres Complètes*.

³² [Cartan 1923], [Cartan 1924b] et [Cartan 1925e].

1. Une pédagogie de l' « exclusivement local ».

Les termes dans lesquels Cartan présente la nouvelle conception de la physique, plus précisément de la Mécanique, et la nécessaire évolution du cadre géométrique accompagnant cette nouvelle Mécanique sont proches de ceux de Weyl ou d'Einstein. Ainsi dans la première note aux C.R.A.S. lit-on en introduction :

On sait que dans la théorie de la relativité généralisée, le tenseur qui caractérise complètement l'état de la matière au voisinage d'un point d'Univers est identifié à un tenseur faisant intervenir uniquement les propriétés *géométriques* de l'univers au voisinage de ce point. **[note 1 p.613]**

Cette dépendance des grandeurs envers leur seul voisinage permet d'écrire, par exemple les équations dans une région vide de matière :

C'est ce tenseur [d'énergie] qui, égalé à zéro, donne les lois de la gravitation dans toute région vide de matière. [Cartan 1922c 616]

La nature locale des dépendances n'est que la conséquence d'une formulation infinitésimale des problèmes et des structures, le « voisinage » étant vite remplacé par un « voisinage immédiat » au sens clairement infinitésimal :

Imaginons un espace qui, au voisinage immédiat de chaque point, ait tous les caractères de l'espace euclidien. Les habitants de cet espace sauront, par exemple, repérer les points infiniment voisins d'un point A au moyen d'un trièdre trirectangle ayant ce point A pour origine ; mais nous supposerons en outre qu'ils ont une loi leur permettant de repérer par rapport au trièdre d'origine A, tout trièdre de référence ayant son origine A' voisine de A. (...) En définitive, *un tel espace sera défini par la loi de repérage mutuel (de nature euclidienne) de deux trièdres d'origines infiniment voisines.* [Cartan 1922c 616]

Le problème même des connexions, ainsi présenté par un Cartan très proche ici de Weyl, est celui du lien entre morceaux d'espace infiniment petits et non assez petits. Le vocabulaire est un peu moins strict que chez Weyl, qui n'employait jamais *Umgebung* ou *im Kleinen* pour désigner le niveau infinitésimal : chez Cartan, « voisinage » et « voisinage immédiat » s'échangent sans autre forme de procès, et le terme « infiniment » peut disparaître dans le cas de l'origine « A' voisine de A », là où Weyl ne l'aurait pas omis. Que le problème se présente au niveau des morceaux infiniment petits d'espace, Cartan le fait sentir dans son article sur les *Variétés à connexion affine et la relativité généralisée* en des termes non ambigus. Après avoir présenté la théorie classique de la gravitation, il introduit :

Le point de vue de la relativité généralisée. Nous avons supposé jusqu'ici l'existence effective de systèmes de référence de Galilée permettant de repérer *tout* l'espace-temps. Au point où nous sommes arrivés, on voit comment on peut se passer de cette hypothèse. Il suffit en effet pour que l'on puisse formuler les lois de la physique, que les deux conditions suivantes soient réalisées :

1° On dispose, pour mesurer les grandeurs d'état physiques, d'un système de référence susceptible, pour le petit morceau d'espace-temps où se trouve l'observateur, de jouer le rôle d'un vrai système de Galilée ;

2° On connaît la connexion affine de l'espace-temps, c'est-à-dire on sait comment doivent être comparés les observations faites par rapport à deux systèmes de référence de Galilée d'origine infiniment voisines. [Cartan 1923 692]

Comme chez Weyl, ce changement de vue sur la géométrie invitant à la mise en place d'une nouvelle structure, la connexion, est préparé par une relecture de la physique classique. Ainsi, si X,Y,Z désignent les composantes du champ de gravitation \mathbf{E} , les équations $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ (relations (1))³³ et

(...) l'équation fondamentale de Poisson

$$(2) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -4\pi\rho ,$$

qui, avec les précédentes, fournit les lois complètes de la gravitation newtonnienne, montre que *la densité de matière d'un milieu continu est la manifestation physique d'une propriété géométrique locale de l'espace-temps.* [Cartan 1923 669]

Là où Weyl choisissait de comparer les formulations intégrales et « de contact » (*Nahewirkung*) de l'électromagnétisme selon Maxwell, Cartan reprend la théorie de la gravitation newtonnienne. Le double objectif est le même, à la fois montrer combien des énoncés jusqu'ici considérés comme relevant de la physique peuvent être lus comme des énoncés géométriques et formuler les lois usuelles physiques sous leur forme « locale » au sens que les physiciens donnent à ce terme, par opposition aux formulations faisant intervenir des actions à distance ou des lois intégrales. Le modèle de la mécanique des milieux continus, utilisé chez Weyl pour introduire les notions de tenseur, est aussi fondamental chez Cartan qui, quelques lignes après le précédent passage, poursuit :

(...) il importe de remarquer que le point de vue nouveau auquel nous nous sommes placé nous oblige à énoncer les lois de la Mécanique sous une forme *exclusivement locale*, c'est-à-dire à tout ramener à la Mécanique des milieux continus ; nous ne

savons pas, en effet, ce que sont deux systèmes de référence équipollents, lorsque leurs origines ne sont pas infiniment voisines. [Cartan 1922c 671]

2. Des choix techniques différents de ceux de Weyl.

Si le mouvement de la pensée conduisant de la reformulation des lois de la Mécanique par la relativité générale à la nécessaire mise en place d'une nouvelle structure géométrique connectant les structures infinitésimales classiques valides en chaque point est décrit dans des termes très proches chez Weyl et Cartan – avec toutefois une attention stricte aux termes séparant les niveaux infinitésimaux et locaux chez Weyl qu'on ne retrouve pas chez Cartan –, les outils techniques utilisés pour décrire les connexions ne sont pas les mêmes chez nos deux auteurs. Présentons dans ce paragraphe une première série de conséquences avant, dans le paragraphe suivant, de voir en quoi ces outils permettent à Cartan de multiplier les structures d'espace en jouant sur la multiplicité des algèbres de Lie.

On est frappé, en lisant en parallèle *RZM* et *Les variétés à connexion affine*, par l'absence chez Cartan d'outils qui semblaient essentiels chez Einstein et Weyl. Certes Weyl introduisait des éléments de calcul sur les formes différentielles sur les variétés abstraites et signalait son indépendance envers une éventuelle structure métrique. Ces éléments ne jouaient toutefois ni un rôle central ni un rôle bien spécifiquement caractérisé dans l'architecture de la théorie. Les notions de tenseur et le calcul différentiel absolu tenaient, elles, le premier rôle. De son côté, Cartan annonce dès son introduction :

La lecture du Mémoire ne suppose pas la connaissance du calcul différentiel absolu : en revanche, elle suppose connues les règles fondamentales du calcul des intégrales multiples, en particulier celles qui font passer d'une intégrale étendue à un domaine fermé à l'intégrale étendue au domaine à une dimension de plus limité par le premier. Au fond, les lois de la Dynamique des milieux continus et celles de l'Electromagnétisme s'expriment par des équations analogues à la formule de Stokes où à cette formule généralisée. [Cartan 1923 663]

Cartan rompt ici non seulement avec Weyl mais aussi avec l'esprit original des formulations einsteiniennes, qui trouvaient leur source directe dans les travaux de Levi-Civita et Ricci-Curbastro. Bien plus que le calcul différentiel absolu, ce sont les théories des groupes selon

³³ Cette notation n'est pas chez Cartan.

Lie, des surfaces selon Darboux et des invariants intégraux selon Poincaré³⁴ qui forment l'arrière plan de ce travail de Cartan. Si passionnante que soit la présentation de Weyl, quelle que soit l'unité que lui donne la poursuite systématique de l'objectif d'infinitésimalisation, sa présentation est en partie rendue complexe par le mode même d'exposition consistant à formuler avec soin les différentes étapes de la théorie, à peser sur les plans mathématiques et épistémologiques leur degré de nécessité et l'intimité de leurs liaisons les unes aux autres ; d'où une profusion de formulations et d'outils, dont la validité est parfois provisoire ; d'où aussi une certaine difficulté à discerner chez ce mathématicien-philosophe, dans ces étapes et ces allers-retours, ce qui relève de la nécessité mathématique stricte de ce qui relève de l'analyse épistémologique. Cette richesse est d'ailleurs visible dans l'évolution des concepts et des formulations sur la période 1918-1923. En comparaison, le style de Cartan surprend par son caractère direct et l'unité de ses moyens : le calcul sur les formes différentielles – le produit extérieur, la dérivation extérieure et son interprétation géométrique par la formule de Stokes – et la formulation en termes de repère mobile sont les seuls outils ; tout semble découler naturellement de leur usage. Le schéma de présentation se conserve sur la période 1922-1925, retenons-en les grands traits. Cartan commence par présenter le formalisme du repère mobile en géométrie affine :

Imaginons que l'on fasse correspondre à chaque point \mathbf{m} de l'espace un système de référence cartésien³⁵ d'origine \mathbf{m} ; soient $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ les trois vecteurs qui définissent, avec \mathbf{m} , ce système de référence. Nous pourrions même imaginer qu'à chaque point corresponde une infinité de tels systèmes de référence. Nous aurons ainsi un ensemble de systèmes de référence dépendant d'un nombre de paramètres pouvant aller jusqu'à 12 ; nous appellerons u_i ces paramètres.

Lorsqu'on fait varier infiniment peu les paramètres, le point \mathbf{m} et les vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ subissent des variations infiniment petites, qui sont des vecteurs, et qui sont par suite exprimables linéairement au moyen de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Soit

$$(1) \quad \begin{cases} d\mathbf{m} = \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_1 = \omega_1^1 \mathbf{e}_1 + \omega_1^2 \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_2 = \omega_2^1 \mathbf{e}_1 + \omega_2^2 \mathbf{e}_2 + \omega_2^3 \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_3 = \omega_3^1 \mathbf{e}_1 + \omega_3^2 \mathbf{e}_2 + \omega_3^3 \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

³⁴ Par exemple dans *Sur les résidus des intégrales doubles* [Poincaré 1887] ou dans le tome III des *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste* [Poincaré 1899b]. Ces travaux forment le point de départ des *Leçons sur les invariants intégraux* professées par Cartan [Cartan 1922a].

³⁵ Cartan explique quelques lignes plus que dans le cadre affine, on ne peut entendre par repère cartésien que la donnée d'un point et de trois vecteurs non coplanaires.

Les ω^i et ω_j sont linéaires par rapport aux différentielles du_i ; ces douze formes de Pfaff permettent en somme de repérer le système de référence d'origine $\mathbf{m} + d\mathbf{m}$ par rapport au système de référence d'origine \mathbf{m} . On peut dire aussi qu'elles définissent le petit déplacement affine qui permet de passer de celui-ci à celui-là. [Cartan 1923 694]

Cartan fait ensuite remarquer que les intégrales de ces différentielles sont nulles sur un chemin fermé, pour justifier que leurs dérivées extérieures sont nulles. Il ne s'agit pas ici de faire sentir le rôle de la topologie : la dérivation extérieure n'est, dans les textes de Cartan de cette période, jamais utilisée de manière autonome ; elle est systématiquement déduite d'une transformation d'intégrale par la formule de Stokes : les différentielles sont encore fondamentalement des « éléments d'intégrale » et la formule de Stokes permet de donner une signification géométrique à ce type de calcul différentiel, sans que « géométrique » renvoie ici le moins du monde à une interaction entre topologie et Analyse, ou entre aspects locaux et globaux. Le rappel du formalisme classique du repère mobile permet de formuler de manière simple le problème de la connexion des espaces affines infinitésimaux associés à deux points infiniment voisins et, techniquement, de se placer dans l'arène du calcul sur les formes différentielles. Une fois ce rappel classique effectué, Cartan introduit les connexions affines en disant simplement « la connexion affine de la variété s'exprimera par des formules identiques de forme à (1) » [Cartan 1923 696]. Se posent ensuite les questions d'intégrabilité, que Cartan introduit sous leur forme géométrique. Première question :

Les lois de la connexion affine définissent en quelque sorte le raccord des espaces affines tangent en deux points infiniment voisins \mathbf{m} et \mathbf{m}' . Que se passe-t-il quand on considère deux points quelconques de la variété ?

On ne peut répondre que si l'on se donne un chemin déterminé allant de \mathbf{m}_0 en \mathbf{m}_1 ; [Cartan 1923 697]

A ce chemin est associé un système d'équations différentielles ordinaires, l'intégration est possible ; bien classiquement, Cartan interprète explicitement cette intégration comme une composition de transformations, la composition d'une infinité de transformations infinitésimales donnant une transformation finie [Cartan 1923 703]. Deuxième question :

Le raccord des espaces affines tangents en deux points quelconques \mathbf{m} et \mathbf{m}' peut-il être défini indépendamment du chemin suivi pour aller de \mathbf{m} en \mathbf{m}' ? Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les équations aux différentielles totales (1) ou (3) soient complètement intégrables. [Cartan 1923 699]

Cette condition d'intégrabilité est simplement l'annulation des dérivées extérieures. Si elle est vérifiée, l'intégration donne le changement de variable permettant de retrouver la nature

affine de l'espace : « la variété est elle-même un espace affine » [Cartan 1923 699]. Aux outils près, le questionnement local est ici le même que celui qu'on trouvait chez Weyl dans sa lecture de l'annulation de la courbure (de la connexion), ou chez Riemann en 1854 : comment savoir si un espace décrit par un système de coordonnées curvilignes est en fait l'espace ordinaire – du moins un ouvert de cet espace ? Lorsque les équations sont non intégrables, Cartan tire tout naturellement de son calcul extérieur deux conséquences importantes. Premièrement, la non intégrabilité signifie que les dérivées extérieures $(d\mathbf{m})'$ et $(de_i)'$ ne sont pas nulles (il dit que les formes ne sont pas « exactes ») : posant $(d\mathbf{m})' = \Omega^1 \mathbf{e}_1 + \Omega^2 \mathbf{e}_2 + \Omega^3 \mathbf{e}_3$ il nomme ce vecteur la « torsion de la variété à connexion affine donnée ; de même avec $(de_i)' = \Omega_i^1 \mathbf{e}_1 + \Omega_i^2 \mathbf{e}_2 + \Omega_i^3 \mathbf{e}_3$, « les formes Ω_i^j définissent ce qu'on appelle la courbure de la variété à connexion affine donnée » [Cartan 1923 702]. Deuxième conséquence, le calcul différentiel extérieur garantit que les différentielles extérieures des formes de torsion et de courbure sont elles-mêmes nulles. Dans les deux cas, la propriété des formes différentielles est interprétée géométriquement. Dans la seconde note aux Comptes-Rendus, l'interprétation est infinitésimale – ici la variété est munie d'un ds^2 riemannien, ce qui permet de parler de rotations au sens strict et non simplement au sens de transformation linéaire ayant un point fixe :

Cela posé, quand on décrira un contour fermé infiniment petit partant d'un point A et y revenant, la divergence entre l'espace considéré et l'espace euclidien se manifestera de la façon suivante. Attachons à chaque point M du contour un trièdre de référence ; pour passer du trièdre attaché à M au trièdre attaché au point infiniment voisin M', il faut effectuer une rotation et une translation infiniment petites dont on connaît les composantes par rapport au trièdre mobile d'origine M. (...) on peut dire que l'espace donné se différencie de l'espace euclidien de deux manières : 1° par une courbure au sens de Riemann, qui se traduit par une rotation ; 2° par une torsion, qui se traduit par une translation. [Cartan 1922c 617].

Quant à l'annulation des dérivées de dérivées, Cartan en donne une interprétation géométrique/physique infinitésimale en termes de loi de symétrie ou de loi de conservation [Cartan 1922b 614] : l'intégrale des ces formes au bord d'un parallélépipède infinitésimal est nulle, ou encore

Si l'on considère un volume infiniment petit, les vecteurs et les couples associés aux différents éléments de surface qui limitent le volume se font équilibre. [Cartan 1922c 617]

« Vecteurs » renvoie ici aux rotations traduisant la courbure, « couples » aux translations traduisant la torsion. Signalons que, dans l'article *Sur les variétés à connexions affines*, Cartan ne se contente pas des formulations infinitésimales intuitives mais laconiques données dans les brèves notes aux Comptes-Rendus ; il reconnaît toutefois qu'il est difficile de démontrer en toute généralité les analogues non infinitésimaux de ces propriétés [Cartan 1923 704]. Ces formulations non infinitésimales ne renvoient en rien à un couple local/global mais plutôt à la reformulation des relations infinitésimales comme limites de relations entre grandeurs finies ; on retrouve le même souci que chez Weyl qui, après une formulation initiale en termes de vecteurs infinitésimaux, reformulait presque systématiquement en termes de limites, de vitesses etc.

Notons au passage les termes dans lesquels Cartan critique la présentation de Weyl, que l'analyse « conceptuelle » conduit à poser des axiomes de symétrie interdisant de considérer les connexions à torsion :

Dans la théorie de M. Weyl, ce repérage de proche en proche est soumis *a priori* à une certaine restriction, dont on ne voit pas bien la nécessité logique, et qui consiste dans l'existence, au voisinage de chaque point, de ce qu'il appelle un système de coordonnées géodésiques. (...) Dans la théorie de M. Weyl, la torsion est constamment nulle. [Cartan 1923 659]

Le choix du calcul sur les formes différentielles amène Cartan à s'écarter de Weyl sur un autre point. Lorsqu'il aborde la question de l'insertion de l'électromagnétisme dans l'édifice de la relativité – restreinte, dans un premier temps –, Cartan distingue deux points de vue :

Si l'on adopte une connexion affine quelconque pour l'Univers de la relativité restreinte, comment doit-on modifier les équations de Maxwell ? La réponse à cette question comporte une grande part d'arbitraire : elle dépend de ce qu'on voudra bien considérer comme essentiel dans les équations de Maxwell.

On pourrait d'abord se placer au point de vue suivant : Les formules de Maxwell font intervenir les valeurs numériques de certaines grandeurs (champ électrique etc.) en un point d'Univers et en un point infiniment voisin, puisque ce sont des équations aux dérivées partielles du premier ordre. [Cartan 1924b 814]

Ce point de vue, qui était privilégié par Weyl, fait jouer à la connexion un rôle essentiel. C'est toutefois un autre point de vue qui est préféré par Cartan : ces équations différentielles ordinaires renvoient à des équations intégrales (relatives à des flux, des circulations etc.) qui résument un grand nombre de faits d'expérience et, techniquement, n'utilisent que les opérateurs relatifs aux formes différentielles et à la formule de Stokes.

Si nous adoptons ce point de vue, les équations de Maxwell sont indépendantes de toute hypothèse sur la connexion affine de l'espace-temps. [Cartan 1924b 817]

La fin de ce texte est consacré à la question de savoir si cette indépendance peut être conservée en relativité générale et au lien avec la notion de torsion.

3. Un horizon local.

Ce caractère central de l'outil du calcul sur les formes différentielles entraîne quelques conséquences sur la description des espaces dans ces textes de Cartan. Notons tout d'abord que le terme de « variété » y est d'emploi constant sans y être jamais défini. Il l'était très rapidement chez Weyl, qui tenait toutefois à présenter la notion de changement de coordonnées locales et le rôle de l'hypothèse de différentiabilité des changements de carte ; rappelons que le but n'était pas alors de mettre en place une opposition entre approches locale et globale, et que la question du recouvrement de l'espace par les cartes partielles n'était pas évoquée : plus classiquement, Weyl devait mettre l'accent sur la non-unicité de la représentation analytique (locale) pour introduire les grandeurs tensorielles et les problématiques d'invariance et d'intrinséquéité. Cette mise en place conceptuelle est absente chez Cartan ; une raison en est sans doute que le choix central du calcul sur les formes différentielles le dispense de vérifier systématiquement l'intrinséquéité de toutes ces constructions : l'indépendance des opérations algébriques et différentielles de ce calcul envers « le choix des variables » a été établie une fois pour toute dans son cours sur les invariants intégraux, Cartan ne prend pas même la peine de la rappeler ici [Cartan 1922a 65. Par ailleurs, on a déjà souligné que la formule de Stokes jouaient un double rôle de légitimation du calcul sur les formes différentielles et de lien vers un domaine d'interprétation géométrico-physique des formules, sans aucune intervention de questions topologiques ; cette formule est d'ailleurs utilisée indifféremment au niveau infinitésimal et dans le fini, et cette relative indifférence se conçoit bien dans la mesure où cette formule est plus un moyen d'illustration qu'un réel outil d'étude de la situation mathématique. Enfin, on pourrait se demander dans quelle mesure le choix du calcul différentiel extérieur comme outil privilégié invite à une attention au global dans la mesure où la « condition d'intégrabilité » $\omega' = 0$ n'est valide que localement. On trouve encore la réponse dans le cours sur les invariants intégraux. Il n'y est pas distingué des formes fermées et, parmi elles, des formes exactes ; seule la notion de forme « exacte » intervient, caractérisée par l'annulation de la dérivée extérieure. Dans le chapitre VII de ces Leçons, Cartan démontre le « théorème important » :

La dérivée de la dérivée d'une forme différentielle extérieure quelconque est identiquement nulle. [Cartan 1922a 71]

Puis il passe à la réciproque :

Ce théorème admet une réciproque, à savoir :

Si la dérivée d'une forme différentielle Ω est nulle, la forme Ω peut-être regardée comme la dérivée d'une forme Π dont le degré est inférieur d'une unité à celui de Ω . [Cartan 1922a 71]

Après une page de démonstration, Cartan glisse la

Remarque.- Si les coefficients de la forme Ω sont uniformes dans un certain domaine, la condition $\Omega' = 0$ n'est pas toujours suffisante pour assurer l'existence d'une forme Π uniforme dans ce domaine et dont Ω soit la dérivée extérieure. Considérons par exemple le domaine (fermé et sans frontière) à deux dimensions formé par les points d'une sphère Σ , et soit Ω une forme de degré 2 uniforme dans ce domaine (à coefficients admettant des dérivées partielles du premier ordre continu). La dérivée Ω' est manifestement nulle. Néanmoins, s'il existait une forme ω linéaire dont la dérivée ω' fût égale à Ω , on aurait, en intégrant deux fois $\int \omega$ le long d'un même grand cercle de la sphère dans deux sens différents,

$$\iint_{\Sigma} \Omega = 0 ,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface de la sphère. L'équation précédente donne une condition supplémentaire pour que Ω puisse être regardée comme dérivée exacte d'une forme ω uniforme sur toute la sphère. [Cartan 1922a 73]

Nous citons intégralement cette remarque pour souligner plusieurs points. Tout d'abord la parfaite conscience qu'a Cartan de l'existence de contraintes topologiques ; mais aussi l'absence de terme spécifique pour désigner ce type de problème ou, en retour, pour qualifier les énoncés précédents de « locaux ». Cela se comprend dans le cadre mobilisé par Cartan : non pas un couple local/global, mais une remarque sur la question de l'uniformité des fonctions en jeu. Il est aussi significatif que ce point ne soit abordé que sous forme d'une remarque, et ne joue aucun rôle dans la marche de la théorie des invariants intégraux présentée par Cartan. Comme dans le travail des années 1922-1925 sur les connexions, les questions globales sont au delà de l'horizon du questionnement.

Les traits que nous soulignons dans le cas des formes différentielles se retrouvent dans l'exposé du rôle des groupes en géométrie que Cartan rédige, d'après Fano, pour l'édition française de l'*Encyclopädie* [Cartan 1915]. Sur plus de cent pages on ne trouve que trois éléments ayant trait au couple local/global. Dans le paragraphe 2, consacré à la théorie de Lie, Cartan note après avoir introduit les transformations infinitésimales :

On obtient les transformations finies du groupe (au voisinage de la transformation identique) en effectuant une infinité de fois de suite les transformations infinitésimales. [Cartan 1915 1732]³⁶

Dans le paragraphe suivant, consacré à la présentation des thèses du Programme d'Erlangen, il conclut sur l'insertion de la géométrie différentielle et de la théorie des invariants différentiels *à la* Lie dans l'édifice des géométries :

Le point de vue de F. Klein qui vient d'être exposé a l'avantage de mettre en évidence la vraie nature de la *géométrie différentielle* et de montrer que cette géométrie ne s'oppose pas à la géométrie projective ou à la géométrie algébrique. Elle ne s'oppose qu'à la géométrie de l'*espace complet*. De même qu'il y a une géométrie métrique, une géométrie projective, etc. qui traitent des propriétés métriques, projectives, etc. de l'espace pris dans son intégralité, il y a une géométrie différentielle métrique, une géométrie différentielle projective, etc. qui traitent des propriétés métriques, projectives, etc. de l'espace pris au voisinage d'un point. La théorie des invariants différentiels est du domaine de ces géométries différentielles. [Cartan 1915 1737]³⁷

Ici ce n'est plus le travail local sur l'espace du groupe (transformations voisines de l'identité) mais le travail local sur l'espace des variables transformées qui est commenté. On a vu que cette conception de la géométrie différentielle comme géométrie relative à des familles de difféomorphismes locaux domine encore dans les années 1920. Le même thème est enfin repris au paragraphe 44, consacré aux invariants et invariants différentiels.

La théorie de S. Lie a l'avantage d'une très grande généralité ; mais, outre l'inconvénient d'exiger des intégrations, elle en a un autre plus grave, c'est de ne résoudre les problèmes relatifs aux invariants que du point de vue des fonctions analytiques. Ses résultats ne se rapportent en général qu'à un certain domaine autour d'un point et ne peuvent pas, à cause de la généralité même de la théorie, être étendus

³⁶ Ce passage est repris sans modification de l'article de Fano.

³⁷ Ce passage est repris sans modification de l'article de Fano.

à tout l'espace. En particulier, la théorie de S. Lie ne peut remplacer la théorie *algébrique* des invariants. [Cartan 1915 1845]³⁸

La source de cette discussion des mérites respectifs des théories algébriques et différentielles des invariants est citée en note infrapaginale : c'est aux critiques que Study adressait à Lie en 1908 que renvoie Cartan. Dans un exposé de synthèse sur la théorie des groupes et la géométrie, Cartan ne peut ignorer ces critiques, et elles sont quasiment reprises telles quelles (la véhémence en moins !) du débat entre Study et Engel. Le caractère local est explicite et rapproché du « point de vue des fonctions analytiques » ; ce point de vue est qualifié de général : on devine que nos auteurs conçoivent que des études du passage au global – conçues classiquement en termes de prolongement analytique et de multivocité – sont possibles mais qu'elles présenteraient une infinité des cas particuliers. Nos auteurs prennent acte du fait que les critiques de Study ont permis de mieux comprendre la nature propre (locale) de la théorie de Lie mais ne voient pas là l'occasion de désigner le dépassement du local comme un champ de recherche autonome et prometteur ; ils se contentent de reconnaître la légitimité d'autres modes de recherche, en particulier la théorie des invariants algébriques. On doit de plus souligner qu'en dehors des trois passages cités, l'exposé est indifférent au couple local/global et rédigé selon le point de vue universellement et implicitement local usuel. On voit que, comme en théorie des formes différentielles, la nature locale des résultats peut ponctuellement être explicitée, sans affecter profondément la construction de tout l'exposé.

4. Espace(s), géométrie(s).

On a vu Weyl dans *RZM* non seulement reformuler la récente notion géométrique de transport parallèle sur une variété munie d'un ds^2 en autorisant dans l'infiniment petit les similitudes et non plus seulement les isométries, introduisant par là la symétrie de jauge et une nouvelle courbure (*Streckenkrümmung*). Il enrichissait par là le jeu des structures possibles, sans sortir d'un cadre structuré par la notion d'invariance et le couple infinitésimal/fini. Cartan, pour sa part, continue à exploiter les possibilités offertes par la formulation en termes de repère mobile pour proposer, au delà des espaces à connexion affine ou euclidienne, une vaste « généralisation de la notion d'espace » – pour reprendre le titre d'un article de 1924. On va voir comment sa description *des* géométries et le mode original de formations d'*espaces* consistant à « attacher » à chaque point d'une première variété un espace de géométrie donnée

³⁸ Ce passage est un apport original de Cartan, il ne se trouve pas dans l'article de Fano.

contribue à enrichir la notion de variété sans faire intervenir de notion topologique ou de question globale. Nous cherchons ici à documenter non seulement les étapes préalables au passage au global chez Cartan à partir de 1925 mais aussi les origines de la notion d'espace fibré, notion qui sera centrale dans notre dernière partie.

i. L'espace tangent.

Dans l'article *Sur les variétés à connexions affines*, la question de l'attachement d'un espace à un autre est évoquée dès le cas affine et l'on voit Cartan y préciser sa conception de l'espace tangent en un point d'une variété. Citons intégralement le paragraphe très riche dans lequel est présentée l'idée générale de connexion affine :

Considérons maintenant une variété numérique à trois dimensions, dont chaque point \mathbf{m} est supposé défini par trois nombres u^1, u^2, u^3 . Faisons correspondre par la pensée à chaque point \mathbf{m} un espace affine contenant ce point, et soient $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ trois vecteurs formant avec \mathbf{m} un système de référence pour cet espace. La variété sera dite à « connexion affine » lorsqu'on aura défini, d'une manière d'ailleurs arbitraire, une loi permettant de repérer l'un par rapport à l'autre les espaces affines attachés à deux points *infinitement voisins* quelconques \mathbf{m} et \mathbf{m}' de la variété ; cette loi permettra de dire que tel point de l'espace affine attaché au point \mathbf{m}' correspond à tel point de l'espace affine attaché au point \mathbf{m} , que tel vecteur du premier espace est parallèle ou équipollent à tel vecteur du second espace. En particulier, le point \mathbf{m}' lui-même sera repéré par rapport à l'espace affine du point \mathbf{m} et nous admettrons la loi de continuité d'après laquelle les coordonnées de \mathbf{m}' par rapport au système de référence affine d'origine \mathbf{m} sont infinitement petites ; cela permettra de dire en un certain sens que l'espace affine attaché à \mathbf{m} est l'espace affine *tangent* à la variété donnée. [Cartan 1923 696]

En un sens, tout ce paragraphe n'est qu'une introduction aux formules (1) décrivant le repère mobile, en particulier $d\mathbf{m} = \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3$; on voit un des intérêts de ces théories des connexions chez Weyl et Cartan : nos auteurs reprennent des formules qui sont *déjà là* – dérivation covariante, repère mobile –, l'innovation théorique consistant en grande partie à proposer des schémas d'interprétation géométrique mettant au premier plan les questions de lieu de validité. En termes anachroniques : où cela « vit »-il ? De quel espace cela me donne-t-il une propriété ? Ces questions ne se donnent pas d'elles-mêmes dans le simple jeu des formules : ces formules, on peut entièrement les lire dans une grille relevant du monde de la

grandeur, dans un univers mathématique organisé par les notions de grandeur et de relation, de grandeurs primitives et dérivées, de changement de variable et d'invariants. Ainsi, ces travaux de la période 1918-1925, bien qu'implicitement locaux et antérieurs à l'émergence explicite des problématiques globales chez Weyl³⁹ et Cartan, trouvent aussi leur place dans notre histoire par l'effort qu'ils représentent de changement radical de cadre problématique. On a vu Weyl évoquer à plusieurs reprises l'espace tangent : la nature de ses éléments, son rôle de voisinage infinitésimal ou son lien avec la variété à laquelle il est tangent peuvent sembler, selon les passages, exprimés par des métaphores fluctuantes ; mais ce qui importe au développement de la théorie, c'est moins de préciser la nature de ces espaces que de faire ressortir comme fondamental leur caractère *centré*, le fait qu'ils sont par nature attachés chacun à un point et que le lien entre espaces attachés à des points différents est problématique. Dans ce dernier paragraphe, Cartan répond à ce même enjeu de création d'un cadre problématique centré sur la question du lieu, tout en adoptant une autre démarche que celle de Weyl. Ce dernier posait d'emblée la question de la connexion entre espaces tangents à deux points infiniment proches. Cartan part de la possibilité générale de faire « correspondre par la pensée à chaque point \mathbf{m} un espace affine contenant ce point » pour formuler en fin de paragraphe la condition à laquelle cet espace peut être *vu comme* l'espace tangent. Cette présentation s'éclairera rétrospectivement lorsqu'on comprendra que le cas des espaces à connexion affine n'est qu'un cas particulier et que Cartan souhaite pouvoir « faire correspondre » aux points d'une variété d'autres espaces que l'espace tangent – nous y reviendrons. Restons-en dans un premier temps au cas affine pour voir à quelle conception de l'espace tangent il renvoie. Le paragraphe cité est suivi d'une note précisant ce dernier point :

(¹) On pourrait évidemment, comme on le fait d'habitude, remarquer qu'au voisinage du point \mathbf{m} il existe un repérage affine pour les points de la variété, ne serait-ce que celui qui consiste à attribuer au point défini par $u^i + du^i$ les coordonnées cartésiennes du^i ; en ce sens, l'espace affine attaché à \mathbf{m} est bien *tangent* à la variété. On pourrait supposer aussi que la variété est plongée dans un espace affine à un nombre plus ou moins grand de dimensions et que l'espace affine attaché à \mathbf{m} est effectivement l'espace plan tangent à cette variété. On pourrait enfin regarder l'espace affine attaché à \mathbf{m} comme la variété elle-même qui serait perçue d'une manière affine par un observateur placé en \mathbf{m} . Tous ces points de vue sont compatibles avec le point de vue du texte qui me semble logiquement préférable. [Cartan 1923 696]

³⁹ du moins en géométrie différentielle, la problématique est bien sûr globale chez Weyl dans *L'idée de surface de Riemann*.

Un peu plus complet que ce qu'on trouvait chez Weyl, le recensement des points de vue sur l'espace tangent en un point est par ailleurs bien classique. On pourrait se demander en quoi la conception originale que Cartan propose dans le texte principal est « logiquement » préférable. Il nous semble ici qu'on peut faire le lien avec les problèmes d'intrinséqueité, par ailleurs peu soulignés par Cartan – pour des raisons que nous avons évoquées. Ainsi Cartan poursuit-il en faisant remarquer que, les formes ω^i étant combinaisons linéaires des du^i , un changement de variable fait des du^i les coordonnées relatives de $\mathbf{m}+d\mathbf{m}$ dans le repère attaché à \mathbf{m} . Les deux premières conceptions usuelles de l'espace tangent, évoquées dans la note, ont ce défaut de définir les objets à partir d'un choix de coordonnées, qu'elles soient intrinsèques ou données par un espace affine ambiant. Ce reproche ne peut toutefois par être fait à la dernière conception qui, par contre, a le défaut de masquer la dépendance de chacun des espaces affines envers son point d'attache, puisqu'elle donne l'impression que c'est le même espace affine qui est attaché aux différents points de la variété. Notons qu'aucune des critiques de Cartan ne porte sur une éventuelle confusion des aspects infinitésimaux et locaux, entre l'infiniment petit et le suffisamment petit, le voisinage et le voisinage immédiat.

ii. L'espace observé, son groupe, l'espace des observateurs.

Il nous semble que ce ne sont pas fondamentalement les défauts « logiques » des points de vue classiques qui les font passer au second plan. L'intérêt de la présentation moins classique et un peu plus abstraite que propose Cartan tient avant tout dans la facilité avec laquelle elle se généralise : l'attachement aux points d'une variété d'un espace qui peut-être vu comme l'espace tangent n'est qu'un cas particulier d'une opération très générale que Cartan présente quelques pages plus loin, et qu'on trouvait évoquée dès les notes de 1922. Ici encore, la généralisation semble découler naturellement des choix techniques du repère mobile et du calcul différentiel extérieur : les groupes de Lie – du moins leurs transformations infinitésimales – s'insèrent naturellement dans le cadre, comme Cartan le faisait déjà remarquer en 1915 à la fin de l'article de l'*Encyclopédie* consacrée à *La théorie des groupes continus et la géométrie*. Ainsi lit-on dans *Sur les variétés à connexions affines* :

Considérons un groupe fini et continu quelconque G à n variables x_1, x_2, \dots, x_n , ce groupe étant, par exemple, défini par r transformations infinitésimales indépendantes

$$X_1f, X_2f, \dots, X_rf. \text{ [Cartan 1923 717]}$$

Rappelons que les variables x_i désignent ici les coordonnées dans l'espace sur lequel agit le groupe et non celles de « l'espace du groupe » - aussi appelé espace des paramètres ; comme

chez Lie, la considération d'un groupe de Lie fait d'emblée intervenir deux espaces différents, celui du groupe (ici de dimension r) et celui sur lequel le groupe agit. C'est ce second espace qui est tout d'abord mis en avant, le groupe intervenant non pas par son espace de paramètres mais par ses générateurs infinitésimaux X_1, \dots, X_r , présentés ici, comme chez Lie, comme des opérateurs différentiels linéaires (d'où la présence d'un f désignant une fonction générique sur laquelle les opérateurs agissent). Cartan poursuit en rappelant le cadre d'interprétation géométrique qui était déjà celui de l'article de 1915, fusion des points de vue de Lie et Klein :

Nous pouvons regarder les x_i comme les coordonnées d'un point dans un certain espace (E). Si dans cet espace nous ne portons notre attention que sur les propriétés des figures qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe G, nous pouvons dire que l'espace (E) admet le groupe G comme groupe fondamental. A cet égard on peut substituer aux coordonnées primitives x_1, \dots, x_n celles qu'on en déduit par une transformation T du groupe : avec ce nouveau système de coordonnées les propriétés des figures se traduisent analytiquement de la même manière qu'avec l'ancien : les deux systèmes de coordonnées sont équivalents. Le passage d'un système de coordonnées à un autre équivalent se traduit donc par une transformation du groupe fondamental. [Cartan 1923 718]

Bien qu'une lecture anachronique puisse trouver dans ce passage l'écho d'une description du fibré des repères comme fibré principal de groupe fondamental le groupe de Lie G, on ne peut raisonnablement voir ici qu'un rappel bien classique des principes issus du programme d'Erlangen, les propriétés d'une figure dans *la* géométrie du groupe G étant identifiées analytiquement aux grandeurs invariantes par changement de coordonnées. Cartan aborde ensuite la manière de « faire correspondre » de tels espaces aux points d'une variété, mais la présentation est ici un peu différente de celle choisie dans le cas des connexions affines :

Cela posé, imaginons un ensemble continu d'observateurs, réduits à des points, et dont chacun adopte un système de coordonnées pour l'étude de l'espace (E), ces systèmes étant naturellement tous équivalents entre eux. La variété formée par ces observateurs points est, je suppose, à p dimensions, chaque point étant défini d'une manière quelconque par p coordonnées u_1, \dots, u_p . Si l'on passe d'un point \mathbf{m} de la variété à un point infiniment voisin \mathbf{m}' , on passera dans l'espace (E) d'un certain système de coordonnées à un autre que nous supposerons infiniment voisin ; autrement dit, on passe des coordonnées x_i utilisées par l'observateur \mathbf{m} aux coordonnées x_i' utilisées par l'observateur \mathbf{m}' en effectuant une certaine transformation infinitésimale du groupe G, soit

$$\omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f + \dots + \omega_r X_r f$$

en désignant par $\omega_1, \dots, \omega_r$ des expressions linéaires en du_1, \dots, du_p avec des coefficients fonctions de u_1, \dots, u_p . [Cartan 1923 718]

La généralisation du cas affine est assez directe : au lieu de considérer que le repère mobile est donné par une transformation *affine* dont les composantes (dans un repère arbitraire fixé) sont des formes linéaires en les du_i , on va considérer que le « repère mobile » d'une géométrie de groupe G est donné par une transformation infinitésimale du groupe dont les composantes sont des formes linéaires en les du_i ; on peut lire cette transformation infinitésimale variable comme associant à chaque translation infinitésimale sur la variété des observateurs un changement infinitésimal de repère dans l'espace (E) compatible avec sa géométrie de groupe G . En suivant le modèle du raisonnement proposé dans le cas affine, la recherche de conditions d'intégrabilité amène à considérer la dérivée extérieure de $\omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f + \dots + \omega_r X_r f$, l'écriture de cette dérivée faisant apparaître des « éléments d'intégrale double » dans lesquels interviennent les constantes de structure c_{hks} du groupe⁴⁰.

Mais il nous importe surtout de remarquer que le passage du cas affine au cas plus général permet de mieux comprendre le lien entre les différents espaces impliqués, ainsi que les conceptions sous-jacentes des notions d'« espaces » et de « géométries ». Dans le cas affine, le rôle des transformations affines était à la fois central et implicite, et, pour des raisons évidentes, la distinction entre transformations infinitésimales et transformations finies ne s'imposait pas⁴¹ ; l'espace attaché à chaque point était l'espace tangent, de même dimension que la variété. La généralisation à tout groupe de Lie fait apparaître plus clairement les rôles de trois espaces différents : l'espace (E) , le groupe de Lie (lui-même décrit soit par ses transformations infinitésimales soit par ses transformations finies) et la variété des « observateurs » ; la variété des observateurs est un espace de dimension quelconque qui joue le rôle d'espace de paramètres de repères mobiles dans l'espace (E) , mobile selon les lois prescrites par le groupe G . La plupart des liens qui « allaient de soi » dans la description classique des espaces tangents à une variété sont ici explicités, ce qui permet, en retour de mieux comprendre la démarche de Cartan dans le cas affine. Outre l'explicitation du rôle des différents espaces, le cas général présente aussi un changement de *point de vue* important par rapport au point de vue initial sur le cas affine. Alors, il semblait essentiel de comprendre qu'à

⁴⁰ Rappelons leur définition : $[X_h, X_k] = \sum_s c_{hks} X_s$.

⁴¹ Si en effet on se place dans l'espace vectoriel des matrices carrées réelles, le groupe $Gl(n, \mathbf{R})$ en est un ouvert : son espace tangent en l'identité est assimilable à l'espace vectoriel ambiant ; les deux espaces (celui du groupe et l'espace tangent en Id) coïncident de plus entièrement au voisinage de l'identité, il n'y a aucune raison de les distinguer si, comme Cartan, on adopte un point de vue universellement local.

chaque point correspond un espace affine différent, d'où la question de la connexion au sein d'une collection d'espaces affines. Dans le cas général, le point de vue est renversé : il n'y a qu'un espace (E), qui peut-être un espace affine, et la variété initiale ne joue que le rôle de variété des paramètres des repères mobiles ; on passe d'un point de vue dans lequel la variété est l'objet principal et les espaces attachés secondaires à un point de vue dans lequel l'espace (E) est unique et la variété des observateurs l'une des possibles parmi un infinité d'autres. On peut bien sûr dire que ce changement de point de vue exprime la trivialité locale des fibrés en question, mais ce n'est pas là la question de Cartan. Ce changement de point de vue – qui avait d'ailleurs déjà été présenté dans le passage consacré au cas affine – permet de mieux comprendre certaines des constructions de Cartan. On avait vu, dans le cas affine, l'interprétation infinitésimale des notions de courbure et de torsion. Le changement de point de vue consistant à fixer l'espace (E) permet d'associer à tout chemin dans la variété des observateurs un repère mobile dans (E) ; les deux repères associés aux deux extrémités du chemin dans la variété des observateurs diffèrent d'une transformation *finie* de G, qui peut ne pas se réduire à l'identité lorsque le chemin est fermé⁴². On comprend en particulier pourquoi le chemin peut être fermé dans la variété initiale (celle des observateurs) et ne pas l'être dans (E), ce que mesure la torsion.

On comprend que le modèle général qui guidait déjà la présentation du cas affine n'est pas tiré de la géométrie différentielle classique, ni de la théorie des invariants différentiels ou du calcul différentiel absolu ; le modèle sous-jacent est celui du lien entre un groupe de Lie et l'espace sur lequel il agit. Cartan prend d'ailleurs ce cas comme premier exemple de sa conception générale ; après avoir présenté analytiquement les conditions d'intégrabilité, il commente :

La circonstance particulière qui vient d'être étudiée se présentera en particulier si nous prenons pour variété (V) la *variété des paramètres* du groupe. Si

$$x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n ; a_1, \dots, a_r)$$

sont les équations finies de la transformation T_a la plus générale du groupe G, on pourra regarder a_1, \dots, a_r comme les coordonnées d'un point \mathbf{m} d'une variété (V) à r dimensions. Si a_1^0, \dots, a_r^0 sont les paramètres de la transformation identique et si \mathbf{m}_0 est le point correspondant de (V), nous admettrons que le système de coordonnées adopté par l'observateur \mathbf{m} se déduit par transformation T_a du système de coordonnées adopté par l'observateur \mathbf{m}_0 . [Cartan 1923 720]

⁴² Dans son cours sur *La géométrie des espaces de Riemann* Cartan présente cela comme le « développement » de la variété sur l'espace de référence (E) [Cartan 1925a 18].

Il existe donc dans ce cas une connexion canonique triviale. Le cas général s'obtient en introduisant une variété des observateurs qui ne soit pas la variété des paramètres du groupes, ce que Cartan explicite quelques lignes plus loin.

iii. Groupes, « espaces ».

On voit que ce formalisme permet à Cartan d'introduire les connexions affines, euclidiennes (relatives à un ds^2), conformes ou projectives, et, pour chacune d'elles, de mesurer l'obstruction à l'intégrabilité par des « courbures » de tous types : courbure au sens de Riemann, torsion, courbure d'homothétie (lorsque, avec Weyl, on passe du groupe des isométries relatives à un ds^2 au groupe des similitudes), courbure d'élation dans le cas conforme [Cartan 1922e 624] etc. De ce cadre général découlent les études particulières menées par Cartan dans cette période : le théorème de Weyl montrant l'unicité de la connexion affine (pour le dire dans le vocabulaire de Cartan) compatible avec un ds^2 (ou, plus généralement, une métrique au sens de Weyl) donne un premier modèle de problèmes. La possibilité de définir les géodésiques pour d'autres structures que les structures riemanniennes en fournit un second – ainsi dans le rapprochement entre connexions conformes et propriétés optiques de l'espace de la relativité générale [Cartan 1822e 626]. On doit insister sur le fait que la conception de Cartan de ce qu'est une géométrie ne laisse pas de place pour les questions globales : non seulement la variété des observateurs n'est considérée que localement – éventuellement le long de chemins, mais alors deux chemins reliant les mêmes points sont toujours implicitement supposés former le bord complet d'une surface –, mais ni la variété des paramètres (ce que nous appelons le groupe de Lie G) ni l'espace (E) ne sont considérés globalement. Lorsque Cartan « attache » par la pensée des espaces affines ou projectifs en chaque point d'une variété pour étudier les connexions affines ou projectives, il n'attache pas dans un cas l'espace \mathbf{R}^n et dans l'autre l'espace compact et éventuellement non orientable $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. Cartan ne se départit pas ici du point de vue classique exprimé en toute clarté dans l'article de 1915 sur les groupes continus et la géométrie, une géométrie est définie par un groupe (c'est-à-dire les transformations voisines de l'unité) agissant sur des séries de variables qu'on peut considérer comme représentant les points (ou d'autres objets : plans, sphères) d'un ouvert d'un espace. Les notions de *transformations* (infinitésimales ou finies) et de *propriétés* géométriques possèdent un sens technique parfaitement défini, ce n'est pas le cas de l'*espace* sur lequel le groupe agit, du moins pas au sens d'espace topologique. L'accent

sur le groupe et l'absence de point de vue sur l'espace dans sa totalité était d'ailleurs visible dès l'introduction de la notion de géométrie affine :

En Géométrie ordinaire, il existe des propriétés des figures que l'on appelle *propriétés affines* : ce sont celles qui se conservent lorsqu'on effectue une transformation homographique quelconque conservant le plan à l'infini. [Cartan 1923 693]

Le Programme d'Erlangen n'est pas loin : les géométries affines ou métriques (relatives à une forme quadratique non dégénérée à coefficients constants) s'obtiennent à partir la géométrie projective.

5. Réconcilier les points de vue de Klein et de Riemann

Cette construction théorique impressionnante par sa généralité comme par l'unité de ses moyens conduit Cartan à étudier deux autres problèmes reposant sur la notion de groupe – celui de la décomposition des tenseurs en tenseurs irréductibles, celui du groupe d'holonomie – qui joueront tous deux un rôle important dans l'introduction des problématiques globales. De plus, la réflexion sur le groupe d'holonomie amène Cartan à introduire, parallèlement aux développements théoriques, des *thèmes* qui ne sont plus exactement ceux hérités d'Einstein et Weyl et qui ouvraient encore l'article sur *Les variétés à connexions affines*.

i. Représentations tensorielles et tenseurs irréductibles.

Contrairement à Einstein, Levi-Civita ou Weyl, Cartan n'utilise pas fondamentalement le calcul tensoriel et la notion de tenseur. Les tenseurs interviennent toutefois dans la deuxième partie de l'article sur *Les variétés à connexions affines*, mais les longues mises en place théoriques de Weyl sont remplacées par une brève introduction, toujours guidée par les principes de l'article de 1915 sur la géométrie et les groupes continus :

Considérons dans un espace affine un être géométrique, ou plutôt un ensemble d'êtres géométriques se déduisant l'un de l'autre par une transformation affine. Si l'on choisit un système de coordonnées affines, cet être géométrique est défini analytiquement par un certain nombre (que nous supposons fini) de quantités y_1, y_2, \dots, y_p , que nous appellerons ses coordonnées. Lorsqu'on fait un changement de coordonnées, ces quantités subissent une transformation et toutes les transformations qui correspondent à tous les changements de coordonnées possibles forment évidemment un groupe. Nous dirons que l'ensemble des quantités y_i constitue un tenseur à p composantes.

Nous réservons plus spécialement le nom de tenseurs au cas où le groupe des transformations effectuées sur les y_i est linéaire. Les coordonnées d'un point, les composantes d'un vecteur, les coefficients de l'équation d'une quadrique, etc. constituent autant de tenseurs. [Cartan 1925e 933]

Voilà pour la mise en place algébrique : la géométrie affine – c'est-à-dire celle du groupe affine – définit des classes stables de figures géométriques dont le repérage par des coordonnées invite à porter le regard sur les représentations linéaires du groupe de départ. Il est inutile de rappeler ici que Cartan est aussi spécialiste de la représentation linéaire des groupes – du moins des algèbres – de Lie et que ses travaux de 1913-1914 sur les représentations irréductibles des algèbres de Lie réelles sont à la pointe de cette théorie. Après cette rapide mise en place algébrique-géométrique, Cartan passe en quelques lignes de l'espace affine aux variétés à connexion affine :

Considérons maintenant une variété à connexion affine à n dimensions. Nous appellerons tenseur attaché à un point \mathbf{m} de cette variété un ensemble de quantités qui subiront une transformation linéaire lorsqu'on changera le système de référence (d'origine \mathbf{m}) attaché à l'espace affine tangent en \mathbf{m} . Il existe deux tenseurs remarquables attachés à un point \mathbf{m} de la variété, c'est le *tenseur de torsion* dont les composantes sont les coefficients $A_{\alpha\beta}^i$ et le *tenseur de courbure* dont les composantes sont les coefficients $A_{i\alpha\beta}^j$. [Cartan 1925e 934]

La question qui intéresse Cartan est celle de la décomposition de ces tenseurs en tenseurs irréductibles et l'interprétation géométrique de chacune des composantes. La notion de base est la suivante :

Les composantes de tout tenseur attaché au point \mathbf{m} subissent une substitution linéaire (et homogène) quand on effectue un changement de système de référence d'origine \mathbf{m} . Le tenseur sera dit *irréductible* lorsqu'il sera impossible de trouver un certain nombre de combinaisons linéaires (à coefficients constants) des composantes du tenseur donné formant pour elles-mêmes un tenseur. [Cartan 1925e 934]

Nous n'entrons pas ici plus avant dans la présentation de ces questions. Il nous suffit d'établir le lien, à partir de 1924-25 chez Cartan, entre la théorie des espaces généralisés et les questions de représentations linéaires irréductibles des groupes de Lie classiques. Dans cette deuxième partie de l'article *Sur les variétés à connexion affine*, une note de Cartan fait explicitement référence à un travail récent de Weyl sur la question :

Au moment de la rédaction de ce Mémoire (décembre 1922), je regardais comme très vraisemblable, mais sans en avoir la démonstration, le théorème d'après lequel tout tenseur attaché à un groupe linéaire *simple* ou *semi-simple* est décomposable en tenseurs irréductibles. M. H. Weyl a réussi tout récemment à démontrer cet important théorème [*Das Gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung* (Gött. Nachr., 1924)]; voir aussi : *Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen* (Sitzungsb. Berlin, 1924, p.338-345). [Cartan 1925e 934]

La suite est consacrée à ces travaux de Weyl et à leur prolongement par Cartan.

ii. Le groupe d'holonomie.

Cette deuxième partie de l'article *Sur les variétés à connexion affine* contient aussi l'introduction détaillée du groupe d'holonomie dans les cas affines et euclidiens, mais nous nous appuyerons plutôt sur un texte strictement contemporain de la rédaction de cet article, la conférence que Cartan donne en août 1924 au Congrès international de Mathématiques de Toronto sur *La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielle* [Cartan 1925b]. Cartan y présente sa théorie des espaces généralisés et introduit à cette occasion un thème inédit, celui de la rencontre des points de vue de Klein et Riemann sur la géométrie. Il commence par présenter ce qu'il y a d'apparemment incompatible entre les points de vue de Klein et Riemann, entre la géométrie au sens du Programme d'Erlangen et la géométrie au sens des *Hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*. Pour Klein c'est un groupe sous l'action duquel l'espace est en un sens *homogène* qui définit les géométries usuelles (euclidienne, projective, cayleyennes) :

Dans chacune de ces géométries on attribue, pour la commodité du langage, à l'espace dans lequel les figures étudiées sont localisées les propriétés elles-mêmes du groupe correspondant ou *groupe fondamental* ; c'est ainsi qu'on est arrivé à dire : « l'espace euclidien », « l'espace affine », etc., au lieu de « l'espace dans lequel on n'étudie que les propriétés des figures invariantes par le groupe euclidien, le groupe affine etc. » Chacun de ces espaces est *homogène*, en ce sens que ses propriétés restent inaltérées par une transformation du groupe fondamental correspondant.

Plusieurs années avant le Programme d'Erlangen, B. Riemann avait introduit dans son mémoire célèbre : « *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* », des espaces *non homogènes* au sens qui vient d'être donné à cette expression. [Cartan 1925b 891]

Après avoir rappelé les développements récents dans la direction « riemannienne » sous l'impulsion de la théorie d'Einstein, Cartan formule sa question principale :

Quel rôle la notion de groupe joue-t-elle, ou plutôt doit-elle jouer, dans ce champ nouveau de la Géométrie ; est-il possible de faire rentrer dans ce cadre, suffisamment élargi, du Programme d'Erlangen toutes les géométries nouvelles et une infinité d'autres, c'est ce que je me propose d'examiner. [Cartan 1925b 892]

C'est bien entendu sa théorie des espaces généralisés que Cartan vise à introduire et la possibilité qu'elle offre de forger des connexions à partir de tout groupe de Lie. Il commence par introduire les thèmes – présents, eux, chez Weyl – de validité infinitésimale de la géométrie au sens de Klein et du caractère par nature *centrées* des géométries ainsi obtenues :

(...) si un espace de Riemann ne possède pas d'homogénéité absolue, il possède cependant une sorte d'homogénéité infinitésimale ; au voisinage immédiat d'un point donné, il est donc assimilable à un espace euclidien. Toutefois si deux petits morceaux voisins d'un espace de Riemann peuvent être assimilés chacun à un petit morceau d'espace euclidien, ces deux petits morceaux sont sans liens entre eux, ils ne peuvent pas, *sans convention nouvelle*, être regardés comme appartenant à un seul et même espace euclidien. Autrement dit, un espace de Riemann admet, au voisinage d'un point A, une rotation autour de ce point, mais une translation même considérée dans les effets qu'elle produit sur une région très petite de l'espace, n'a pas de sens. [Cartan 1925b 893]

Cette formulation du problème des connexions en termes de translations lui permet de relire le travail de Levi-Civita, en montrant que ce n'est pas le transport parallèle des vecteurs qui est fondamental – il est appelé à disparaître en géométrie conforme, par exemple – mais la réintroduction des translations dans le cadre Riemannien. Ainsi à propos de la notion de « parallélisme » :

Ce serait restreindre sa portée que de n'y voir, comme on l'a fait en général, qu'un procédé de comparaison de vecteurs issus de deux points infiniment voisins ; il faut y voir au contraire un moyen d'introduire dans un espace de Riemann toute la gamme des déplacements de l'espace euclidien, du moins en ce qui concerne les effets qu'ils produisent dans une région infiniment petite de l'espace. [Cartan 1925b 894]

Dans cette conférence, Cartan ne présente aucun des aspects techniques, ne fait pas même allusion au repère mobile, au calcul différentiel extérieur et ne fait pas le lien explicite avec les générateurs infinitésimaux des groupes continus. Il choisit de mettre au premier plan des éléments que l'on verra porteurs, à partir de 1925, de développements globaux. Pour l'heure,

c'est la possibilité de représenter un espace (V) dans l'espace (E) le long d'un chemin dans (V) qui est mise en avant. Ainsi dans le cas euclidien :

Comme on le voit, la notion de parallélisme de M. Levi-Civita permet d'assimiler à un vrai espace euclidien, ou du moins à une portion de cet espace, toute la région d'un espace de Riemann qui avoisine un arc de courbe AB tracé dans l'espace donné.
[Cartan 1925b 894]

Le terme « avoisine » étant bien sûr à entendre ici au sens infinitésimal. La différence entre l'espace de départ et un simple espace euclidien n'est plus décrite au moyen de la courbure, comme elle l'était depuis Riemann et encore dans la première partie de *Sur les variétés à connexion affine*, mais par le fait que deux chemins de mêmes extrémités ne donnent pas nécessairement des développements coïncidant dans l'espace euclidien de référence : c'est le phénomène que Cartan baptise, important ce terme de la Mécanique, de *non-holonomie*. Pour une formulation plus précise que celle donnée dans la conférence on peut se reporter à la deuxième partie de *Sur les variétés à connexions affines* ; Cartan y dépasse le point de vue infinitésimal qui présidait, sur ces questions, aux réflexions de la première partie :

Nous avons vu au chapitre II qu'étant donné une variété à connexion affine, à tout contour fermé infiniment petit partant d'un point \mathbf{m} de la variété et y revenant est associé un déplacement affine infinitésimal (...). *En général ces déplacements infinitésimaux n'engendrent pas un groupe.*

Il n'en est plus de même si l'on considère tous les contours fermés possibles (finis) partant de \mathbf{m} et y revenant. A chacun d'eux est associé, par le procédé indiqué au n°34, un déplacement affine fini de l'espace affine tangent en \mathbf{m} . Il est évident que tous ces déplacements forment un groupe (continu) (...).

Il résulte qu'à tout point \mathbf{m} de la variété est associé un groupe g de déplacements affines. [Cartan 1925e 922]

Le raisonnement se transpose directement aux espaces généralisés puisqu'il n'utilise que la distinction entre transformations infinitésimales et transformations finies et la possibilité de développement dans un espace de géométrie donnée – au sens de Klein – le long d'un chemin. Cartan démontre comme premier résultat que la structure de ce groupe ne dépend pas du point \mathbf{m} puisqu'à chaque chemin reliant deux points de la variété (implicitement supposée connexe) est associée un isomorphisme des groupes associés aux extrémités : le choix du groupe d'holonomie comme objet central d'étude constitue, après la technique du développement dans un espace au sens de Klein, une deuxième voie pour étudier l'espace comme un tout et non plus une collection de voisinages infinitésimaux. C'est ce groupe d'holonomie qui est au

centre des réflexions de *La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielle* ; après avoir présenté les espaces à connexions projectives ou conformes, Cartan répond à l'interrogation sur laquelle il ouvrait son exposé :

En résumé, dans les généralisations précédentes, l'idée directrice est la suivante. Dans un espace holonome au sens de M. F. Klein, tout est commandé par le groupe fondamental et ses différentes opérations. Ce sont ces opérations qui font de l'espace un tout organique. Dans les espaces non holonomes, ce sont encore les opérations qui sont un principe d'organisation, mais uniquement de proche en proche. C'est précisément en analysant ce que cette organisation a d'incomplet que nous allons arriver au rôle tout à fait nouveau que va jouer encore la notion de groupe dans les géométries nouvelles. [Cartan 1925b 896]

Puis, exposant la notion de groupe d'holonomie dans le cas euclidien (ou riemannien, vu comme l'euclidien non holonome) :

En définitive, à l'espace de Riemann donné est associé un sous-groupe g déterminé du groupe G des déplacements euclidiens, un sous-groupe qui peut se confondre avec le groupe G lui-même, mais qui peut aussi se réduire à la transformation identique ; dans ce dernier cas, il est bien évident que l'espace de Riemann est complètement holonome et ne diffère qu'en apparence de l'espace euclidien proprement dit. (...) Plus généralement, à tout espace non-holonome de groupe fondamental G est associé un sous-groupe g de G qui est son groupe d'holonomie et qui ne se réduit à la transformation identique que si l'espace est parfaitement holonome.

Le groupe d'holonomie d'un espace mesure en quelque sorte le degré de non holonomie de cet espace, de même que le groupe de Galois d'une équation algébrique mesure en quelque sorte le degré d'irrationalité des racines de cette équation. [Cartan 1925b 897]

La théorie de Cartan permet donc de fondre dans un même cadre élargi les conceptions de la géométrie de Klein et de Riemann. On pourrait dire que Klein propose une vision globale des espaces là où Riemann fait alterner les aspects infinitésimaux et finis, en un sens infinitésimaux et locaux. Mais on voit que ce n'est pas le couple local/global, ou le triplet infinitésimal/local/global qui est mobilisé par Cartan pour décrire cette jonction des points de vue. Le caractère global du point de vue de Klein est décrit en termes d'homogénéité, puis en parlant de l'espace comme d'un « tout organique » ; mais, on l'a vu dans l'article sur *Les variétés à connexions affines* ou déjà en 1915, c'est le groupe qui fait l'unité, l'espace sur lequel le groupe agit n'est pas étudié dans ses aspects globaux, en particulier topologiques. On

voit que c'est encore la notion de groupe qui sert d'unificateur ; pour unifier les points de vue de Klein et Riemann, deux groupes sont à considérer : d'une part le groupe G décrivant la géométrie au voisinage immédiat de chaque point et faisant de chaque voisinage infinitésimal un espace géométrique au sens de Klein ; d'autre part le groupe d'holonomie de l'espace qui est un sous-groupe de G (bien défini à conjugaison près dans G), décrivant l'espace dans son unité organique. Cette prise en compte d'un espace comme totalité au moyen des groupes ne tient pas compte de la structure globale de la variété comme espace topologique, deux points en attestent. Premièrement l'affirmation répétée que la réduction du groupe d'holonomie à l'identité caractérise les espaces affines, euclidiens, projectifs ... au sens de Klein – ce qui est parfaitement cohérent avec la prise en compte purement locale des espaces sur lesquels agissent les groupes. Deuxièmement, Cartan a beau affirmer que le groupe d'holonomie est obtenu en considérant *tous* les chemins partant et revenant à un point \mathbf{m} donné, il affirme systématiquement le caractère *continu* (i.e. connexe) du groupe ainsi obtenu ; il ne tient en fait compte que des chemins contractiles dans la variété, et sa saisie de *tous* les chemins ne signifie encore nullement une prise en compte de la topologie de la variété mesurée, par exemple, par son groupe fondamental (au sens de Poincaré !) π_1 . On verra justement que l'un des premiers textes dans lesquels Cartan fait intervenir les aspects globaux est consacré au caractère non nécessairement continu du groupe d'holonomie et au sens topologique (pour la variété) de ce nouveau degré de complexité dans la structure du groupe.

Chapitre 12. Weyl et Cartan : le passage au global (1925-1930).

I. Problèmes globaux en théorie des groupes de Lie.

Porté par des travaux de géométrie différentielle largement indifférents aux questions globales, on a vu Weyl conduit par ses travaux sur le problème de l'espace vers l'étude des algèbres de Lie et de leurs représentations linéaires. Dans une série d'articles de 1924-1925, qui va modifier tout le faciès de la théorie des groupes de Lie ¹, il mêle des éléments hérités de différentes traditions de recherche dans lesquels le couple local/global ne jouait pas de rôle central ni explicite, pour livrer un ensemble dans lequel il intervient dans chacune des articulations majeures : lien entre le groupe comme variété et le « groupe » des transformations infinitésimales, question de surjectivité de l'exponentielle, rôle du revêtement universel d'un groupe de Lie donné etc. Non seulement ce travail reprend les notions centrales en 1913, en particulier le revêtement universel, mais c'est explicitement que Weyl emprunte des concepts à la théorie de l'uniformisation. Après avoir présenté assez en détail ce travail de Weyl, nous donnerons un autre exemple d'irruption des questions globales en théorie des groupes continus, indépendante et contemporaine de celle de Weyl : celle donnée par les travaux de Schreier.

1. Le groupe de Lie comme domaine d'intégration : Hurwitz 1897.

Laissons à Adolf Hurwitz (1859-1919) le soin de présenter lui-même l'idée qu'il introduit en théorie des invariants. A la méthode classique consistant à former des invariants par différenciation, il en ajoute en 1897 une nouvelle, inspirée des travaux de Frobenius sur les groupes finis :

Soit un groupe fini de substitutions discrètes des variables x_1, x_2, \dots, x_n . Il existe dans ce cas un procédé simple pour former tous les invariants de ce groupe. On applique en effet la totalité des substitutions du groupe à une fonction arbitraire $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et l'on forme ensuite la somme des fonctions ainsi construites. Cette somme représente évidemment un invariant du groupe, et même le plus général puisqu'un invariant quelconque $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ peut être obtenu en posant $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{r} \varphi(x_1, x_2, \dots,$

x_n), où r désigne le nombre des substitutions du groupe. On sait bien qu'on peut aussi construire de manière semblable les invariants de groupes infinis discontinus. J'ai suivi l'idée de transposer aux groupes continus ce procédé de formation des invariants qui semble se donner pour ainsi dire de lui-même ; naturellement, c'est une intégrale définie qui se présente alors en lieu d'une somme. [Hurwitz 1897 71] ²

Le contexte est ici totalement indépendant de celui de la théorie des groupes de Lie, d'ailleurs peu prisée à Berlin : il s'agit d'une classique question d'invariants algébriques ; on se donne une forme (un polynôme homogène) et l'on cherche des fonctions des coefficients invariables lorsque les variables de la forme subissent une substitution linéaire d'un type donné. Si le cadre est classique, la transposition de méthodes sommatoires va instaurer un nouveau regard sur le groupe continu : les procédés calculatoires algébrique-différentiels de formation d'invariants ne suffisent plus, le groupe se présente aussi comme un lieu, une totalité dont la forme ne compte pas encore, mais qui va jouer le rôle de domaine d'intégration. Ainsi pour les rotations ($SO(n, \mathbf{R})$), voici la rapide mais inédite mise en place proposée par Hurwitz :

Soit à présent une substitution orthogonale de déterminant +1

$$(1) \quad x_\alpha = \sum_{\beta} r_{\alpha\beta} x'_\beta .$$

J'interprète les n^2 coefficients $r_{\alpha\beta}$ de cette substitution comme des coordonnées rectangulaires dans un espace de n^2 dimensions. La substitution (1) est alors représentée par un point déterminé de cet espace. La totalité des points correspondant ainsi à toutes les substitutions orthogonales (1) remplissent une figure [Gebilde] R définie par les équations

$$(2) \quad \sum_{\gamma} r_{\alpha\gamma} r_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta} , \quad |r_{\alpha\beta}| = 1 ,$$

où $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{nn}$ sont vus comme des coordonnées variables. (...) Il suit de l'équation

$\sum_{\gamma} r_{\alpha\gamma}^2 = 1$ que chacune des coordonnées $r_{\alpha\beta}$ est restreinte à l'intervalle de -1 à $+1$. La

¹ Nous nous appuyons bien sûr en de nombreux points sur le précieux livre de T. Hawkins sur l'histoire de la théorie des groupes de Lie [Hawkins 2000].

² A. Hurwitz *Ueber die Erzeugung der Invarianten durch Integration*, Gött. Nach. 1897, p.71-90.

« Es liege eine endliche Gruppe von discreten Substitutionen vor, die sich auf die Variablen x_1, x_2, \dots, x_n beziehen. Dann giebt es ein einfaches Verfahren, um alle Invarianten dieser Gruppe herzustellen. Man wende nämlich auf eine beliebige Function $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ die sämtlichen Substitutionen der Gruppe an und bilde sodann die Summe aus allen so entstehenden Functionen. Diese Summe stellt offenbar eine Invariante der Gruppe vor, und zwar die allgemeinste, da eine beliebige Invariante $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jedenfalls durch die Annahme $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1/r \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ erhalten wird, wo r die Anzahl der in der Gruppe enthaltenen Substitutionen bezeichnet. In ähnlicher Weise kann man bekanntlich auch die Invarianten von unendlichen discontinuirlichen Gruppen bilden. Ich habe nun den Gedanken verfolgt, dieses sich so zu sagen von selbst

figure R est donc entièrement dans le fini, d'où suit la convergence de l'intégrale que nous aurons à considérer. [Hurwitz 1897 72] ³

On notera que la compacité n'est saisie que sous l'angle du « ne s'étend pas à l'infini ». Hurwitz va un peu plus loin dans l'étude de la configuration R lorsqu'il cherche des formules explicites pour ses expressions d'intégrales « étendues sur le domaine R » (« *über das Gebilde R ausgedehnte Integral* » [Hurwitz 1897 74]). Après avoir rappelé la formule de changement de variable dans les intégrales, il l'utilise dans le cas de la paramétrisation de la configuration R par les $n(n-1)/2$ angles d'Euler. Dans la représentation qu'il choisit :

(...) chaque substitution orthogonale (1) de déterminant 1 est ainsi représentée, une seule fois, lorsque les angles φ_{rs} prennent tous les systèmes de valeurs déterminées par les inégalités

$$(18) \quad 0 \leq \varphi_{0s} < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi_{rs} < \pi \quad (r > 0).$$

(...) Par cette représentation d'Euler des substitutions orthogonales, la figure R est corrélée de manière inversiblement univoque au paralléloèdre de l'espace à $\frac{n(n-1)}{2}$ dimensions défini par les inégalités (18). Il en suit, au passage, que la figure R est irréductible. [Hurwitz 1897 77] ⁴

« irréductible » signifie ici connexe. Une note va un peu plus loin en signalant :

L'application de R sur le paralléloèdre (18) renseigne en outre sur les relations de connexion [*Zusammenhangsverhältnisse*] de la figure, au sens de Riemann. [Hurwitz 1897 77] ⁵

darbieten Verfahren zur Erzeugung der Invarianten auf die kontinuierlichen Gruppen zu übertragen, wo dann naturgemäß bestimmte Integrale an die Stelle der Summen treten.“

³ „Es sei nun (1) $x_\alpha = \sum_\beta r_{\alpha\beta} x'_\beta$ eine orthogonale Substitution von der Determinante +1. Ich fasse die n^2

Coeffizienten $r_{\alpha\beta}$ dieser Substitution als rechtwinklige Coordinaten in einem Raume von n^2 Dimensionen auf. Dann wird die Substitution (1) durch einen bestimmten Punkt dieses Raumes repräsentiert. Die Gesamtheit aller Punkte, welche in dieser Weise den sämtlichen orthogonalen Substitutionen (1) entsprechen, erfüllt ein Gebilde R , welches durch die Gleichungen (2) $\sum_\gamma r_{\alpha\gamma} r_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $|r_{\alpha\beta}| = 1$, definiert ist, wobei $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{nn}$

als laufende Coordinaten anzusehen sind. (...). Infolge der Gleichungen $\sum_\gamma r_{\alpha\beta}^2 = 1$ ist jede der Coordinaten $r_{\alpha\beta}$

auf das Intervalle -1 bis $+1$ eingeschränkt. Das Gebilde R liegt also ganz im Endlichen, woraus die Convergence der weiterhin zu betrachtenden Integrale folgt.“

⁴ « Dann stellt die (...) Substitution (...) jede orthogonale Substitution (1) von der Determinante 1 und jede nur ein Mal vor, wenn die Winkel φ_{rs} alle durch die Ungleichungen (18) $0 \leq \varphi_{0s} < 2\pi$, $0 \leq \varphi_{rs} < \pi$ ($r > 0$) bestimmten Werthsysteme erhalten. (...) Durch diese Euler'sche Darstellung der orthogonalen Substitutionen erscheint das Gebilde R eindeutig umkehrbar auf das durch die Ungleichungen (18) definierte Parallelotop im Raume von $n(n-1)/2$ Dimensionen bezogen. Hieraus folgt beiläufig, daß das Gebilde R irreducibel ist. »

⁵ « Die Abbildung von R auf das Parallelotop (18) giebt überdies Auschluß über die Zusammenhangsverhältnisse des Gebildes im Sinne Riemann's. »

Cette remarque peut n'apparaître qu'en note car Hurwitz n'a d'usage que de la compacité de R et non de propriétés fines de connexité. La compacité – du moins la convergence des intégrales considérées – pose elle-même problème lorsque Hurwitz souhaite étendre son procédé de formation d'invariants au cas du groupe unimodulaire, celui des transformations linéaires soumises à la seule restriction de déterminant $|r_{\alpha\beta}| = 1$. Il apporte alors une solution en proposant une astuce de démonstration qui marque le point de départ de ce que Weyl baptisera les « *unitarian tricks* », après que Schur les lui ait désignés par le terme de « *kunstgriff* » [Hawkins 2000 475]. Nous n'entrons pas ici dans le détail d'une lignée de méthodes où n'intervient pas la tension entre le local et le global : il suffit de savoir qu'un résultat d'invariance ou de décomposition est obtenu pour l'action d'un groupe donné à partir de sa démonstration pour un groupe réel compact associé. Dans le cas de Hurwitz, il y a d'abord complexification pour passer de $Sl(n, \mathbf{R})$ à $Sl(n, \mathbf{C})$ puis étude sur le sous-groupe réel $SU(n)$ dont la configuration dans l'espace à $2n^2$ dimensions (réelles) « *ganz im Endlichen liegt* » [Hurwitz 1897 80 et suiv.].

La fin de cet article de Hurwitz esquisse une extension à tout groupe fini continu, en faisant explicitement le lien avec quelques-uns des concepts introduits par Lie. Les réflexions de Hurwitz portent alors sur la notion, dirions-nous, de mesure invariante sur un groupe de Lie. Détaillons les étapes de ce passage qui nous intéresse au double titre d'étape dans l'émergence d'aspects globaux en théorie des groupes de Lie, et comme exemple de travail dans (ou sur) un espace « abstrait » dans les dernières années du 19^e siècle.

Soient p_1, p_2, \dots, p_r des coordonnées rectilignes dans un espace à r dimensions. J'appellerai « corps » [*Körper*] une partie [*Theil*] r -dimensionnelle de cet espace. De plus, pour rendre le tout plus intuitif, je considère les valeurs prises aux points de l'espace par une quelconque fonction $\psi(p_1, p_2, \dots, p_r)$ comme des densités [*Dichtigkeiten*] en ces points, de sorte qu'à la fonction correspond une répartition de densité dans l'espace et que l'intégrale

$$\int \psi(p_1, p_2, \dots, p_r) dp_1 dp_2 \dots dp_r$$

étendue à un corps soit appelée sa « masse ». Cela posé, qu'on se donne un groupe quelconque (réel) simplement transitif de l'espace, d'équations

$$(48) \quad p_i' = \varphi_i(p_1, p_2, \dots, p_r; \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r) \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

$\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r$ désignent ici les paramètres du groupe.

On peut énoncer ainsi la proposition à démontrer :

On peut toujours, et ce de manière essentiellement unique, déterminer la densité de telle sorte que chaque corps de l'espace à r dimensions conserve sa masse par toutes les transformations du groupe donné (48). [Hurwitz 1897 86]⁶

En analysant le problème, Hurwitz montre que $\psi(p)/\psi(p')$ ⁷ doit être égal au déterminant jacobien de la transformation faisant passer de p à p' . Il reste à montrer qu'une – et essentiellement une seule – fonction satisfait à cette équation. Le déterminant dépend bien entendu des paramètres κ , mais l'équation (48) est utilisée pour les remplacer par les p' – la condition de simple transitivité est ici implicitement utilisée – et donner une fonction $\Psi(p,p')$. En fixant p' on obtient une fonction de la seule variable p répondant au problème ; la transitivité montre que la fonction est déterminée à un facteur constant près. Nous sommes restés ici au plus près des formulations de Hurwitz, dont on voit qu'elles n'utilisent que le langage du monde de la grandeur, tout en traduisant une idée claire de la simple transitivité. Hurwitz reconnaît ensuite que la situation qu'il étudie peut sembler artificielle (pourquoi, en particulier, choisir le même nombre r pour les paramètres du groupe et la dimension de l'espace sur lequel il agit), mais c'est qu'il ne s'agit que d'une démonstration préparatoire : il s'agit de l'appliquer au groupe lui-même. Hurwitz reprend ici de Lie la notion et le terme de groupe de paramètres (*Parametergruppe*) associé à un groupe de transformation, où nous verrions le groupe agissant sur lui-même (à gauche ou à droite). Il montre alors que l'étude précédente des densités invariantes sous l'action d'un groupe simplement transitif répond au problème de formation par intégration d'invariants d'un groupe de Lie, lorsque l'intégrale converge [Hurwitz 1897 89] ! On ne peut bien sûr voir dans ces quelques pages qu'une esquisse de démonstration, le but de l'article ayant déjà été atteint dans la formation explicite d'invariants dans deux cas usuels. On mesure toutefois le caractère rudimentaire de certains arguments, en particulier du fait de la fidélité au cadre analytique proposé par Lie : le groupe est toujours décrit par des équations

$$a_k' = f_k(a_1, a_2, \dots, a_m ; p_1, p_2, \dots, p_r) \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

⁶ « Es seien p_1, p_2, \dots, p_r rechtwinklige Coordinaten in einem Raume von r Dimensionen. Einen r -dimensionalen Theil dieses Raumes will ich als einen « Körper » bezeichnen. Ferner fasse ich der Anschaulichkeit wegen die Werthe, welche irgend eine Function $\psi(p_1, p_2, \dots, p_r)$ in den Punkten des Raumes annimmt, als Dichtigkeiten in den betreffenden Punkten auf, so daß der Function eine bestimmte Dichtigkeitsvertheilung in der Raume entspricht und das über irgend einem Körper erstreckte Integral (...) als « Masse » des Körpers zu bezeichnen ist. Dies vorausgeschickt, möge nun beliebige (reelle) einfach transitive Gruppe des Raumes gegeben sein, deren Gleichungen (...) heißen mögen. Hier bezeichnen $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r$ die Parameter der Gruppe. Der zu beweisende Satz lautet nun : Die Dichtigkeit läßt sich stets und wesentlich nur auf eine Weise so bestimmen, daß jeder beliebige Körper des Raumes von r Dimensionen bei allen Transformationen der vorgelegten Gruppe (48) seine Masse conservirt. »

⁷ nous désignons les r variables p_1, p_2, \dots, p_r par l'unique lettre p , de même pour les κ . On a donc $p' = \varphi(p, \kappa)$. Hurwitz utilise lui-même cette facilité dans les dernières pages de son article.

les paramètres p du groupe sont vus comme des « coordonnées rectilignes dans un espace r -dimensionnel » sans qu'aucune saisie géométrique ou topologique ne soit proposée. On est frappé du contraste avec les études dans les deux cas plus concrets de $\text{SO}(n, \mathbf{R})$ et $\text{Sl}(n, \mathbf{R})$, dans lesquels les descriptions comme partie d'un espace à n^2 dimensions et comme figure paramétrée par un paralléloépe dans l'espace ayant le bon nombre de dimensions permettait une saisie à la fois globale et calculatoire. La saisie plus intrinsèque (au sens de l'absence d'espace de plongement) du groupe des paramètres semble induire *a priori* un regard local, sauf cas exceptionnel d'une paramétrisation globale raisonnable. Hurwitz est ici muet, et l'on ne le voit avancer ni sur cette question de la saisie locale ou globale du groupe de Lie abstrait, ni sur la nature des conditions permettant d'assurer la convergence des intégrales. Si les formules demeurent – mais peut-être est-ce trompeur –, les mots et les concepts font défaut pour problématiser la généralisation du travail mené dans deux cas particuliers importants.

2. Weyl : des « grandeurs linéaires simples » à la topologie de groupes usuels.

Nous étudions ici deux textes de Weyl, deux communications de 1924 sur *La théorie de la représentation continue des groupes continus simples*⁸ et *Le fondement groupe-théorique du calcul tensoriel*⁹ ; nous aborderons au paragraphe suivant le long article publié en plusieurs parties dans *Mathematische Zeitschrift* en 1925 sur la *Théorie de la représentation des groupes continus semi-simples par des transformations linéaires*¹⁰. Nous centrons l'étude sur la démonstration du théorème de complète réductibilité des représentations linéaires des algèbres de Lie semi-simples, en laissant de côté une large part du travail de Weyl, par exemple celui consacré à la caractérisation des représentations irréductibles, des poids et systèmes de racines, ou de la détermination explicite des caractères. Nous utiliserons librement le vocabulaire moderne, en parlant par exemple de l'algèbre de Lie plutôt que, comme Weyl encore en 1925, des transformations infinitésimales du groupe ; nous suivons par contre certaines notations de Weyl, qui n'utilise pas systématiquement la convention consistant à utiliser la même lettre en majuscule et en minuscule pour un groupe de Lie et son algèbre de Lie, ce qui crée une petite difficulté pour le lecteur inattentif. Commençons, par le cas du groupe spécial linéaire.

⁸ *Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen* [Weyl 1924b]. Nous utilisons la pagination des *Gesammelte Abhandlungen*.

⁹ *Das Gruppentheoretisch Fundament der Tensorrechnung* [Weyl 1924a]

¹⁰ *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen* [Weyl 1925].

Weyl expose le motif initial de son intérêt pour la théorie de la représentation linéaire des groupes et algèbres de Lie par son rôle dans ce qu'il nomme le « fondement du calcul tensoriel » ; suivons-le. Soit \mathfrak{r} un espace « affine centré » r -dimensionnel, soumis au groupe \mathfrak{g} ($= \text{Sl}(n, \mathbf{C}$ ou \mathbf{R}) des transformations linéaires de déterminant 1 ; un système de nombres a_1, a_2, \dots, a_N dépendant du choix de la base dans \mathfrak{r} est le système des composantes d'une « grandeur linéaire » (*lineare Größe*) si tout changement de base t dans \mathfrak{r} induit une transformation linéaire T en les N composantes. $t \rightarrow T$ détermine une « représentation » (*Darstellung*) de \mathfrak{g} en un groupe \mathbf{G} de transformations linéaires – Weyl parle de groupes « isomorphes » ; il s'agit encore d'isomorphismes méridriques ou, dans le vocabulaire actuel, d'homomorphismes de groupes. Les grandeurs linéaires peuvent donc être vues géométriquement comme des « vecteurs » (*Vektoren*) dans l'espace image \mathbf{R} . Weyl définit ensuite la notion de représentations équivalentes (i.e. $T^* = A^{-1}TA$, où A est une transformation linéaire inversible de \mathbf{R} fixée une fois pour toute) et fait le lien avec la notion d'« orientation » qu'il avait utilisée dans son analyse du problème de l'espace. Viennent ensuite les notions de représentation irréductible (aucun sous-espace vectoriel strict de \mathbf{R} n'est stable sous l'action de \mathbf{G}) ou « grandeur linéaire simple », de somme de représentations et de « composition » (produit tensoriel) de représentations : la première conjecture est que toute grandeur linéaire est décomposable (de manière unique) en somme de grandeurs simples indépendantes, ou que toute représentation linéaire du groupe spécial linéaire est somme de représentations irréductibles (théorème de réductibilité complète pour ce groupe) [Weyl 1925 545]. Ces éléments issus de la théorie classique de la représentation linéaire ne suffisent pas à formuler la question exacte du fondement du calcul tensoriel. En effet, fait remarquer Weyl, les grandeurs linéaires qui se présentent en physique sont des tenseurs (soumis donc aux représentations linéaires composées de \mathfrak{g}^n et de puissances de la représentation contragrédiente associée) soumis à des conditions de symétrie : outre le nombre de composantes, ce sont les conditions de symétries qui définissent un type de grandeur (*Größenart*) linéaire [Weyl 1924a 461], conditions de symétries qui renvoient elles-mêmes à la théorie de Frobenius des représentations linéaires des groupes de symétrie S_n . Chaque type de tenseur détermine donc une représentation linéaire de \mathfrak{g} , et la deuxième conjecture fondamentale est qu'il n'existe d'autres grandeurs linéaires que les tenseurs [Weyl 1925 546]. Pour démontrer la validité des deux conjectures, Weyl va nouer ensemble différents « fils » [Weyl 1925 547], celui de la théorie des Frobenius-Young¹¹, celui de la théorie de Cartan des

¹¹ Nous laissons ce point de côté dans notre présentation, il est sans lien direct avec notre problème.

représentations irréductibles des algèbres de Lie semi-simples, celui enfin des méthodes intégrales issues de Hurwitz mais que Weyl apprend dans les publications de Schur du début des années 20.

La gageure consiste dans le rapprochement des aspects algébriques (i.e. infinitésimaux) et topologiques, étudiés jusque là indépendamment. On a vu que, bien que faisant le lien avec la théorie de Lie, Hurwitz n'utilise pas la stratégie fondamentale consistant traduire le problème de groupe en un problème d'algèbre de Lie : la méthode d'intégration ne travaille qu'au niveau du groupe, dont la compacité garantit le bon comportement comme domaine d'intégration. Cette méthode de formation d'invariants par intégration permet, en formant dans l'espace sur lequel le groupe agit linéairement un produit scalaire invariant ; un éventuel sous-espace linéaire invariant sous l'action du groupe possède alors un canoniquement un supplémentaire invariant, son orthogonal : on obtient ainsi le théorème de complète réductibilité [Weyl 1925 559 et suiv.]. On voit que la compacité est le ressort essentiel de la démonstration du résultat algébrique ; on doit donc utiliser le groupe et en aucun cas son algèbre de Lie – jamais compacte. Cartan, de son côté, étudie le problème de la représentation linéaire des algèbres de Lie, ce que Weyl peut qualifier indifféremment de point de vue infinitésimal et de question purement algébrique :

Si, avec Lie, on ramène les groupes continus à leurs transformations infinitésimales, le problème général de la représentation linéaire se formule ainsi : les éléments d'un groupe infinitésimal forment une variété vectorielle linéaire, dans laquelle est définie une « multiplication-commutateur » distributive $[ab]$ satisfaisant aux règles de calcul :

$$[ba] = - [ab] ; \quad [[ab]c] + [[bc]a] + [[ca]b] = 0.$$

Lorsque les éléments sont des matrices, on doit poser $[ab] = ab - ba$. On doit associer à chaque élément a d'un groupe infinitésimal donné une matrice $A : a \rightarrow A$, de sorte qu'en partant de $a \rightarrow A$ et $b \rightarrow B$, aux éléments λa (λ un nombre), $a+b$ et $[ab]$ correspondent les matrices λA , $A+B$, $[AB]$. C'est donc une question purement algébrique [Es handelt sich also um reine Algebra]. [Weyl 1924a 462]¹²

Weyl rappelle la solution algébrique de Cartan – en la rapprochant des travaux de Frobenius-Young – sur la détermination des représentations linéaires irréductibles des algèbres de Lie

¹² « Führt man die kontinuierlichen Gruppen mit Lie auf ihre infinitesimalen Operationen zurück, so formuliert sich das Darstellungsproblem allgemein folgendermaßen : die Elemente einer inf. Gruppe bilden eine lineare Vektormannigfaltigkeit, innerhalb deren eine distributive « kommutator-Multiplikation » $[ab]$ erklärt ist, welche den Rechenregeln genügt : $[ba] = - [ab] ; [[ab]c] + [[bc]a] + [[ca]b] = 0$. Sind die Elemente Matrizen, so ist $[ab] = ab-ba$ zu setzen. Es soll jedem Elemente a einer gegebenen inf. Gruppe eine Matrix A so

semi-simples ; ces travaux établissent la validité de la seconde conjecture, toutes les représentations irréductibles de l'algèbre de Lie du groupe spécial linéaire étant de type tensoriel (au sens que Weyl donne à ce terme). Il reste à franchir le fossé séparant les résultats infinitésimaux de classification et les résultats obtenus par la méthode « transcendantale d'intégration » [Weyl 1925 559] ; il faut donc pouvoir faire des allers-retours entre représentations linéaires d'un groupe (ici le groupe spécial linéaire) et représentations linéaires de son algèbre, et Weyl identifie ici une difficulté qui n'apparaissait dans aucune des études se limitant à l'un des deux niveaux. Il la présente rapidement dans la note des *Göttinger Nachrichten*, après réduction unitaire :

Je pars du groupe infinitésimal \mathfrak{g} (à n dimensions) et de sa représentation γ (à N dimensions). D'après l'idée fondamentale de Hurwitz on ne considère tout d'abord dans le groupe \mathbf{G} que le groupe \mathbf{G}_u des transformations unitaires de déterminant 1. Le groupe infinitésimal associé \mathfrak{g}_u est formé de toutes les matrices (α_{ik}) pour lesquelles

$$\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0, \quad \sum_i \alpha_{ii} = 0.$$

A partir des opérations du groupe infinitésimal γ_u , correspondant à la partie \mathfrak{g}_u de \mathfrak{g} , on obtient d'après Lie une représentation Γ_u de tout le groupe continu \mathbf{G}_u . Il reste à se demander si la variété Γ_u recouvre la variété \mathbf{G}_u une fois, ou plusieurs fois – peut-être une infinité de fois ; dans ce dernier cas, la méthode de Hurwitz serait en échec, car Γ_u ne serait pas une figure fermée. [Weyl 1924a 464]¹³

La formulation est ici un peu archaïque : γ_u (resp. Γ_u) désigne les images de \mathfrak{g}_u (resp. \mathbf{G}_u) dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ (resp. $\mathbf{Gl}(n, \mathbf{C})$) ; le passage de \mathfrak{g}_u à γ_u est univoque, mais, nous dit Weyl, pas nécessairement le passage induit de \mathbf{G}_u à Γ_u , c'est cette association de plusieurs éléments de Γ_u à un même élément de \mathbf{G}_u que Weyl décrit dans le langage du 19^e siècle comme un recouvrement (*a priori* en un sens informel du terme) à un nombre éventuellement infini de feuillettes. Weyl est un peu plus explicite en 1925, expliquant qu'une représentation linéaire de l'algèbre du groupe n'induit de représentation (univoque) du groupe que sur un voisinage de l'élément neutre, représentation dont le prolongement à tout le groupe peut faire apparaître un

zugeordnet werden : $a \rightarrow A$, daß allgemein auf Grund von $a \rightarrow A$, $b \rightarrow B$ den Elementen λa (λ eine Zahl), $a+b$, $[ab]$ die Matrizen λA , $A+B$, $[AB]$ korrespondieren. Es handelt sich also um reine Algebra. »

¹³ « Ich gehe aus von der inf. Gruppe \mathfrak{g} (in n Dimensionen) und ihrer Darstellung γ (in N Dimensionen). Nach dem Grundgedanken von Hurwitz betrachtet man innerhalb G zunächst nur die Gruppe G_u der unitären Transformationen von der Determinante 1. Die zugehörige inf. Gruppe \mathfrak{g}_u besteht aus allen Matrizen (α_{ik}) , für welche $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$, $\sum_i \alpha_{ii} = 0$ ist. Aus den Operationen der inf. Gruppe γ_u , welche innerhalb γ dem Ausschnitt \mathfrak{g}_u aus \mathfrak{g} entspricht, erhält man nach Lie eine Darstellung Γ_u der ganzen kontinuierlichen G_u . Doch bleibt zunächst fraglich, ob Γ_u die Mannigfaltigkeit G_u einfach oder mehrfach, vielleicht unendlich-vielfach bedeckt ; im letzten Fall würde die Hurwitz'sche Methode versagen, da dann Γ_u kein geschlossenes Gebilde wäre. »

problème de multiformité. Les notations ont changé : les groupes sont désignés par les \mathfrak{g} , leurs algèbres de Lie par les \mathfrak{g}° :

A partir d'une représentation du groupe infinitésimal \mathfrak{g}_u° à n^2-1 paramètres réels on obtient par intégration, suivant Lie, la matrice associée T pour tous les t de \mathfrak{g}_u appartenant à un certain *voisinage* [*Umgebung*] de l'élément unité e . Mais si l'on choisit un t_0 dans ce voisinage, on peut prolonger la représentation au voisinage de t_0 sur lequel est appliqué le voisinage initial par la translation de e vers t_0 . On voit bien que le *processus de prolongement* à itérer ne rencontre jamais de frontière ; mais T n'est pas nécessairement univoque sur \mathfrak{g}_u , mais seulement sur une «*figure de recouvrement*» [*Überlagerungsgebilde*] se prolongeant sans ramification ni frontière au dessus de \mathfrak{g}_u . Je dit d'une figure qu'elle est *simplement connexe* si toute courbe continue fermée peut, sur elle, être continûment contractée en un point. La plus forte des figures de recouvrement non-ramifiées non-limitées au dessus d'une figure donnée (la «*surface de revêtement universel*», qui joue un si grand rôle en théorie de l'uniformisation) est simplement connexe. Cette figure de recouvrement universelle \mathfrak{g}_u^* au dessus de \mathfrak{g}_u est le véritable groupe abstrait dont on étudie les représentations ; \mathfrak{g}_u n'est qu'une de ses représentations, et en vérité une représentation raccourcie et non homomorphe lorsque la figure de revêtement est à plusieurs feuillets. [Weyl 1925 560]¹⁴

La formulation précise du problème fait donc apparaître une tension entre le local – existence d'une représentation univoque d'un voisinage de e relevant la représentation de l'algèbre de Lie – et le global ; la formulation classique en termes de prolongement fait naturellement apparaître les revêtements. Weyl est encore ici bien allusif, il laisse par exemple au lecteur le soin d'explicitier la structure de groupe sur le revêtement universel d'un groupe de Lie ; il ne distingue guère ce qui relève de la simple structure de groupe – par exemple les liens qu'entretiennent un groupe de Lie, son revêtement universel et son algèbre de Lie – et ce qui a

¹⁴ «*Aus einer Darstellung der infinitesimalen Gruppe \mathfrak{g}_u° von n^2-1 reellen Parametern erhält man durch Integration nach Lie die zugeordnete Matrix T für alle diejenige t von \mathfrak{g}_u , welche einer gewissen Umgebung des Einheitslements e angehören. Aber wählt man ein t_0 in dieser Umgebung, so kann man die Darstellung fortsetzen auf diejenige Umgebung von t_0 in welche die erste Umgebung durch die Translation von e nach t_0 übergeht. Der zu iterierende Prozeß der Fortsetzung stößt offenbar niemals gegen eine Grenze ; aber T braucht nicht auf \mathfrak{g}_u eindeutig zu sein, sondern erst auf einem «*Überlagerungsgebilde*», das sich unverzweigt und unbegrenzt über \mathfrak{g}_u hinzieht. Ich nenne eine Gebilde einfach zusammenhängend, wenn sich auf ihn jede geschlossene stetige Kurve stetig in einen Punkt zusammenziehen läßt. Das stärkste unverzweigte unbegrenzte Überlagerungsgebilde (die «*universelle Überlagerungsfläche*», welche in der Uniformisierungstheorie eine so große Rolle spielt) über einem gegebenen Gebilde ist einfach zusammenhängend. Diese universelle Überlagerungsgebilde \mathfrak{g}_u^* über \mathfrak{g}_u ist erst die wahre abstrakte Gruppe, um deren Darstellungen es sich handelt ;*

trait au problème de la représentation linéaire. Notons aussi que ce n'est pas le couple « *im Kleinen / im Grossen* » qui est ici mobilisé : le passage initial de l'infinésimal au fini résulte d'une « intégration » ; aucun terme ne vient désigner ce que nous nommons l'application exponentielle et son caractère d'homéomorphisme local. L'intervention du revêtement universel n'est pas commentée dans l'article de 1925, mais elle l'était en 1924 ; là non plus ce n'est pas le couple local/global qui qualifie une articulation jusque-là ignorée dans la théorie, mais le couple algèbre / *Analysis situs* : au caractère « purement algébrique » du problème de la représentation linéaire des algèbres de Lie fait écho, quelques lignes plus loin, « L'*Analysis situs* joue ici un rôle décisif. » [Weyl 1924a 464]¹⁵. Le point central est toutefois acquis sans ambiguïté et modifie toute la structure de la théorie des groupes de Lie : les allers-retours entre le groupe et son algèbre ne sont plus des opérations transparentes ; la transparence n'est que locale, et les considérations globales font apparaître un autre groupe, le revêtement universel du premier. On voit la question topologique s'enrichir peu à peu : dans un premier temps, seule la compacité jouait un rôle ; la question de la compacité du revêtement universel d'un groupe de Lie compact fait ensuite intervenir ce que Hurwitz nommait les « *zusammenhangsverhältnisse* » sans en avoir, en 1897, l'usage. Si l'on particularise au problème des représentations linéaires, l'aller-retour entre groupe et algèbre montre qu'il y a (en général) plus de représentations linéaires (univoques) pour l'algèbre que pour le groupe de départ ; quand bien même un théorème de complète réductibilité des représentations linéaires serait valide pour le groupe, il ne s'étendrait pas *immédiatement* à l'algèbre.

Une fois la problématique générale mise au jour, il reste à étudier le cas particulier ici en jeu, celui des représentations linéaires de l'algèbre $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Weyl démontre alors la simple connexité de $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ en écrivant les éléments sous la forme $u^{-1}\varepsilon u$, où u est un élément de \mathfrak{g}_u et ε une matrice diagonale : l'idée est donc ici encore d'utiliser une représentation paramétrique par les « angles » apparaissant dans la matrice ε . La non unicité de cette représentation le long d'un chemin fermé nécessite une étude plus détaillée au voisinage des matrices singulières, dans lesquelles les valeurs propres ne sont pas toutes distinctes. Nous n'entrons pas plus avant dans les arguments de Weyl, lui-même étant assez allusif : il nous suffit de connaître les grandes lignes d'un raisonnement que nous verrons repris à un niveau d'abstraction plus élevé dans le cas des algèbres semi-simples abstraites. Avant de passer à un cas si général, Weyl indique dès 1924 la généralisation de sa démonstration aux classes

\mathfrak{g}_u ist nur eine ihrer Darstellungen, und zwar eine verkürzte, nicht-homomorphe, wenn das Überlagerungsgebilde mehrblättrig ist. »

¹⁵ « Die *Analysis situs* spielt hier eine entscheidende Rolle. »

usuelles de groupes semi-simples, celle du groupe complexe (« *Komplexgruppe* ») des transformations linéaires complexes conservant une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée ($\mathbf{Sp}(n, \mathbf{C})$ donc) et celle du groupe des rotations (« *Drehungsgruppe* ») en un nombre pair ou impair de variables, transformations linéaires complexes conservant une forme quadratique non dégénérée ($\mathbf{SO}(n, \mathbf{C})$ donc). Dans chacun des cas, l'étude s'articule en deux temps très nets, une partie infinitésimale (« *infinitesimaler Teil* ») suivie d'une étude intégrale (« *integraler Teil* »). Dans le cas des groupes de rotations, l'analogie de la réduction unitaire amène à considérer les groupes réels $\mathbf{SO}(n, \mathbf{R})$, compacts, dont Weyl montre qu'ils ne sont pas simplement connexes mais que leur revêtement universel n'est qu'à deux feuillets (pour $n \geq 3$) : la compacité est donc préservée [Weyl 1924a 466]. Le cas de $\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$ illustre le rôle de la topologie dans les questions de réductibilité des représentations linéaires. Ce groupe étant homéomorphe au cercle, son revêtement universel n'est pas compact, ce qui interdit d'utiliser la méthode intégrale de formation d'invariants. Weyl montre qu'il ne s'agit pas là d'un simple obstacle technique interne à la démonstration : le résultat de complète réductibilité n'est en fait pas valide pour cette algèbre de Lie. Si T est un générateur de cette algèbre (qui est une droite vectorielle réelle), alors $T \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une représentation possédant un sous-espace invariant, mais non décomposable en somme de deux représentations irréductibles. [Weyl 1925 562]

3. Le cas général : représentations linéaires des algèbres semi-simples.

Dans les chapitres 3 et 4 de l'article de 1925-26, Weyl entreprend d'étendre le théorème de complète réductibilité aux représentations de toutes les algèbres de Lie semi-simples (complexes), en suivant le modèle donné par les quatre cas étudiés précédemment. Nous reprenons ici les conventions usuelles, en désignant les groupes par des majuscules et les algèbres par des minuscules. Weyl peut ici encore s'appuyer sur les résultats de Cartan sur la structure des algèbres semi-simples, résultats qu'il reformule au passage : son chapitre 3 y est consacré ; cette étude purement algébrique ne nous concerne pas directement. Une première difficulté de cette généralisation tient à ce que, contrairement aux cas étudiés précédemment, les algèbres de Lie ici considérées ne sont plus données comme algèbres de groupes, de groupes linéaires qui plus est. Weyl y supplée en utilisant la représentation adjointe, qui est un isomorphisme d'algèbre de Lie dans le cas semi-simple : \mathfrak{g} est donc identifiée à la sous-algèbre $\mathbf{ad}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre des transformations linéaires de \mathfrak{g} . L'existence, établie par Cartan

dans sa thèse, de « formes réelles » des algèbres semi-simples complexes joue le rôle de la réduction unitaire. Cartan a de plus montré que le groupe adjoint conserve naturellement une forme quadratique sur \mathfrak{g} ¹⁶, qui est de plus définie négative dans le cas semi-simple ; travaillant avec la forme de Killing plutôt qu'avec la forme ψ_2 de Cartan, c'est une forme définie positive que Weyl utilise. Après ce chapitre 3, Weyl peut reprendre dans le cas général d'une algèbre semi-simple le jeu d'allers et retours : il faudra lui associer un groupe linéaire, étudier la compacité de ce groupe ainsi que le lien qu'il entretient avec son revêtement universel¹⁷ ... le programme n'est pas mince et va faire apparaître de nouvelles considérations topologiques, en particulier sur le comportement de la fonction exponentielle ou la répartition des éléments singuliers dans la variété du groupe ; autant d'éléments nouveaux qui font ressortir le caractère fondamental des études globales de la variété du groupe. Le chapitre 4 s'ouvre ainsi :

Que \mathfrak{a}° désigne un groupe infinitésimal semi-simple à r paramètres, \mathfrak{a}_u° le groupe infinitésimal obtenu à partir du premier par la « restriction unitaire » définie à la fin du chapitre précédent. Les transformations linéaires infinitésimales $dx = [ax]$ adjointes à leurs éléments a engendrent [*erzeugen*] un groupe continu de transformations linéaires $\tilde{\mathfrak{a}}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{a}}_u$). Puisqu'à $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ est associée, par la proposition 6 du chapitre III, une forme quadratique définie invariante, $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ est une *figure fermée*. [Weyl 1925 629]¹⁸

La reconstitution d'un groupe continu à partir d'une algèbre de matrices, fût-elle rendue possible par la présence du groupe ambiant $\mathbf{Gl}(\mathfrak{g})$, est évoquée pour le moins rapidement. Weyl passe rapidement sur ce point, ce paragraphe introductif étant destiné traduire en termes de transformations finies les résultats sur la structure des algèbre semi-simples. Weyl déroule pour cela « à l'envers » les définitions des représentations adjointes d'un groupe de Lie et de son algèbre qui ouvraient le chapitre 3. Rappelons-en les principaux éléments, en restant fidèle aux formulations de Weyl : parlant comme Lie de tout groupe comme d'un groupe

¹⁶ rappelons-en brièvement la définition, chez Cartan : si $t \in \mathfrak{g}$, considéré comme opérateur linéaire sur \mathfrak{g} (par $t \rightarrow (u \rightarrow [tu])$), on peut former son polynôme caractéristique $\det(t - \lambda I) = \lambda^n - \psi_1(t) \lambda^{n-1} + \psi_2(t) \lambda^{n-2} + \dots$. Si l'on choisit une base de \mathfrak{g} , on montre que ψ_1 est un polynôme homogène en les composantes de t , invariant sous l'action de \mathfrak{g} ; ψ_2 est en particulier une forme quadratique invariante. Weyl préfère à ψ_2 la « forme de Killing », $K(t) = \text{tr}(t \circ t)$, liée à la forme de Cartan par $\psi_1^2 = K + 2\psi_2$

¹⁷ Weyl ne parle pas en 1925 de groupe de Poincaré, nous restons proches de ses formulations.

¹⁸ « \mathfrak{a}° bedeutet eine infinitesimale halb-einfache Gruppe von r Parametern, \mathfrak{a}_u° diejenigen infinitesimale Gruppe, welche aus ihr durch die am Schluss des Vorigen Kapitels gekennzeichnete « unitäre Beschränkung » hervorgeht. Die zu ihrem Elementen a adjungierten infinitesimalen linearen Transformationen $dx = [ax]$ erzeugen eine kontinuierliche Gruppe linearer Transformationen $\tilde{\mathfrak{a}}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{a}}_u$. Da zu $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ nach Kapitel III, Satz 6, eine invariante definierte quadratische Form gehört, ist $\tilde{\mathfrak{a}}_u$ eine geschlossenes Gebilde. »

agissant sur un ensemble, il associe à tout groupe de transformations son « groupe adjoint », le groupe agissant sur lui-même par conjugaison. Cette action induit une représentation linéaire du groupe sur ses transformations infinitésimales : la conjugaison par T transformait un élément X du groupe en $X' = T^{-1}XT$, elle transforme un élément infinitésimal x en l'infinitésimal $x' = T^{-1}xT$ ¹⁹. Cette représentation linéaire du groupe induit une représentation linéaire de son groupe infinitésimal donnée par $t \rightarrow [tx]$ ²⁰. Le début du chapitre 4 relit ces associations à rebours, sans s'attarder sur les questions de passage du local au global mais en s'attachant à illustrer la spécificité des algèbre semi-simples. Ici les éléments notés h appartiennent à une sous-algèbre résoluble maximale \mathfrak{h} ²¹ :

L'élément infinitésimal $h = h(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ du groupe adjoint confère à un élément arbitraire

$$x = h(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) + \sum_{\alpha} \tau_{\alpha} e_{\alpha}$$

de \mathfrak{a}° , de « paramètres principaux » κ_i et de « paramètres secondaires » τ_{α} , l'accroissement $dx = [hx]$ donné par les formules

$$d\kappa_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad d\tau_{\alpha} = \alpha \tau_{\alpha}. \quad [\text{Weyl 1925 629}]^{22}$$

On remonte ensuite dans le groupe fini :

La transformation finie (ε) de $\tilde{\mathfrak{a}}$ qui en résulte par itération :

$$x' = (\varepsilon)x(\varepsilon)^{-1}, \quad (1)$$

qu'il sera commode de noter e^h , s'exprime dans ces paramètres par

$$\kappa_i' = \kappa_i, \quad \tau_{\alpha}' = e^{\alpha} \tau_{\alpha}. \quad (2).$$

Les « éléments principaux » (ε) forment un sous-groupe abélien à n paramètres de $\tilde{\mathfrak{a}}$.
[Weyl 1925 629]²³

¹⁹ En formulation contemporaine : en identifiant l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe \mathbf{G} à l'espace tangent en l'identité $\mathbf{1}_{\mathbf{G}}$, l'action de \mathbf{G} sur \mathfrak{g} est définie par la différentielle en $\mathbf{1}_{\mathbf{G}}$ de la conjugaison ; $\text{Ad} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{Gl}(\mathfrak{g}) \quad T \rightarrow \text{Ad}(T) = d_{\mathbf{1}_{\mathbf{G}}}(X \rightarrow T^{-1}XT)$.

²⁰ En différenciant Ad en $\mathbf{1}_{\mathbf{g}}$ on obtient $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \quad t \rightarrow (x \rightarrow [tx])$.

²¹ Suivant la présentation de la thèse de Cartan, Weyl obtient une telle algèbre en considérant le noyau de $\text{ad } t_0$ pour un élément t_0 de \mathfrak{g} choisi en position générale, c'est-à-dire ayant un nombre maximal de racines distinctes. [Weyl 1925 609]. Le théorème de structure des algèbres semi-simple montre, entre autres, que la restriction du crochet à \mathfrak{h} est nulle, et qu'il existe une base e_{α} d'un supplémentaire de \mathfrak{h} formée de vecteurs propres pour tout $h \in \mathfrak{h}$. C'est ce résultat que Weyl rappelle ici. [Weyl 1925 618]

²² « Das infinitesimale Element $h = h(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ der adjungierte Gruppe erteilt dem willkürlichen Element $x = h(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) + \sum_{\alpha} \tau_{\alpha} e_{\alpha}$ von \mathfrak{a}° mit den « Hauptparametern » κ_i und den « Nebenparametern » τ_{α} den Zuwachs $dx = [hx]$, der sich aus den Formeln ergibt : $d\kappa_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad d\tau_{\alpha} = \alpha \tau_{\alpha}$. »

²³ « Die daraus durch Iteration entstehende endliche Transformation (ε) von $\tilde{\mathfrak{a}}$: $x' = (\varepsilon)x(\varepsilon)^{-1} \quad (1)$, die man zweckmässig durch e^h bezeichnet, lautet daher, in den Parameter ausgedrückt : $\kappa_i' = \kappa_i, \tau_{\alpha}' = e^{\alpha} \tau_{\alpha} \quad (2)$. Die « Hauptelemente » (ε) bilden eine n -parametrische Abelsche Untergruppe in $\tilde{\mathfrak{a}}$. »

Les paramètres α sont imaginaires purs lorsque (ε) appartient à $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{u}}$, leur partie imaginaire est l'analogue des « angles » servant à paramétrer les rotations dans les cas usuels.

Si, jusqu'ici, la rapide mise en place des liens entre transformations infinitésimales et transformations finies ne se soucie pas d'articuler explicitement les aspects locaux et globaux, les étapes suivantes – nature du revêtement universel, expression de la mesure invariante sur le groupe – reposent sur un théorème de représentation qui demande à être établi avec soin :

Proposition 1. *Chaque élément t de $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{u}}$ peut se mettre sous la forme*

$$t = u^{-1}(\varepsilon)u \quad (3)$$

où u , de même que l'élément principal (ε) , appartiennent tous deux à $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{u}}$.

Dans les cas particuliers traités dans les chapitres I et II, cette proposition recouvrait des vérités algébriques bien connues. On doit ici la fonder en toute généralité au moyen de la méthode de continuité [*der Kontinuitätsmethode*], par ces mêmes calculs qui nous ont servi plus haut à la détermination du volume. [Weyl 1925 629]²⁴

Le parallèle avec la « méthode de continuité » de Poincaré en théorie de l'uniformisation des fonctions algébriques est double. Premièrement il s'agit d'une preuve par la topologie d'une vérité qui apparaît algébrique ou analytique. Il s'agit aussi, au niveau plus technique, de reprendre des arguments topologiques permettant d'établir la surjectivité d'une application abstraite. Weyl commence par calculer le déterminant de l'application qui à u et ε associe $u^{-1}(\varepsilon)u$ et il montre qu'il est non singulier si (ε) ne l'est pas au sens suivant : aucun des e^{α} n'est égal à 1, autrement dit aucune des « rotations » n'est un tour complet. Il en déduit que, lorsque u varie librement et que ε varie parmi les éléments principaux non-singuliers, les $u^{-1}(\varepsilon)u$ forment un « domaine » (*Gebiet*) \mathbf{T} , nous dirions un ouvert. Puisque $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{u}}$ est fermé, les éléments au bord de \mathbf{T} sont de la forme $u^{-1}(\varepsilon)u$ lorsque ε est singulier²⁵. Weyl établit ensuite que ce bord \mathbf{t} est de codimension 3 dans $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{u}}$, donc ne le déconnecte pas : il remarque que la multiplicité des ε singuliers est à $n-1$ dimensions, et que si ε est un élément singulier fixé, l'ensemble des u donnant le même $u^{-1}(\varepsilon)u$ dépend de deux paramètres indépendants [Weyl 1925 630]. Weyl ne détaille pas la fin du raisonnement sur le lien entre les parties \mathbf{T} , \mathbf{t} et le

²⁴ « Satz 1. Jedes Elemente t von $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{u}}$ läßt sich in der Form bringen $t = u^{-1}(\varepsilon)u$ (3), wo u sowohl wie das Hauptelement (ε) gleichfalls zu $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{u}}$ gehören. In den Kapitel I und II behandelten Sonderfällen traf dieser Satz mit bekannten algebraischen Tatsachen zusammen. Hier soll er allgemein mittels der Kontinuitätsmethode durch die gleichen Rechnungen begründet werden, die uns früher zur Volumenbestimmung dienten. »

²⁵ Weyl l'affirme sans démonstration. Un argument élémentaire est donné par Hawkins, repris d'un article de Cartan que nous présentons plus loin [Hawkins 483].

groupe $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{u}}$, l'appellation de « méthode de continuité » devant peut-être renvoyer le lecteur à un type de raisonnement connu.

Ce résultat de représentation des éléments de $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{u}}$ sous la forme $u^{-1}(\varepsilon)u$ permet d'établir que le revêtement universel de $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{u}}$ n'est qu'à un nombre fini de feuillets. Weyl l'obtient en montrant que le nombre de classes d'homotopie à extrémités fixes de chemins fermés de $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{u}}$ est fini. Les arguments sont ici encore plus laconiques que dans la démonstration du résultat précédent, et Hawkins doit s'appuyer sur un cours ultérieur de Weyl pour les reconstituer ; au cœur de l'argument, l'idée que le parcours d'un chemin fermé dans $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{u}}$ (ne rencontrant pas le lieu singulier), les « angles » paramétrant ε ne sont pas nécessairement ramenés à leur valeur initiale, mais que, la liste des valeurs propres revenant à la liste initiale, ces angles ne peuvent connaître qu'une permutation : il y a donc au plus $(r-n)!$ feuillets, où r est le nombre total de paramètres et n la dimension de \mathfrak{h} [Weyl 1925 632]. Weyl peut en déduire la compacité du revêtement universel de $\tilde{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{u}}$ donc, après *unitarian trick*, la complète réductibilité de toute représentation linéaire d'une algèbre de Lie semi-simple (complexe) \mathfrak{a}° [Weyl 1925 633].

Relevons que, lorsque Weyl introduit en théorie des groupes de Lie les revêtements ou les preuves « par continuité », il marque explicitement qu'il s'agit là d'un emprunt à la théorie des fonctions algébriques – plus précisément à la théorie de Riemann puis Poincaré empruntant les voies topologiques plutôt que purement algébriques, de ce que Weyl désigne de façon générale comme la théorie de l'uniformisation. Cette théorie demeure en 1925 chez Weyl l'archétype des théories globales, par ses concepts comme par ses méthodes. On voit Weyl beaucoup plus allusif sur les aspects plus classiquement issus de la théorie de Lie, qui sont souvent repris sans grande modification ; ainsi Weyl peut-il continuer à parler de l'application exponentielle comme du résultat de l'itération des transformations infinitésimales. Ce double standard se comprend en tenant compte du genre du texte : dans cet article de recherche, les concepts et méthodes sont introduits à mesure que s'emboîtent les éléments d'une imposante démonstration ; ce n'est pas le lieu d'un travail de réécriture didactique de tout l'édifice de la théorie des groupes et algèbres de Lie : virtuosité d'un cheminement hybride et non refondation.

Comme nous le notions plus haut, la rencontre entre des problématiques issues de la théorie des groupes de Lie – au sens où elle reposent de manière essentielle sur l'aller-retour entre groupe et algèbre – et des outils – plus généralement des modes de pensée – issus de la

théorie de l'uniformisation fait émerger en théorie des groupes de Lie des articulations jusque là non pertinentes. Que la théorie de Lie fut locale, on a vu Engel, Study ou Cartan le rappeler à l'occasion : cela limitait certes *a priori* le champ des applications et invitait à la prudence dans chaque cas particulier ... rien qui engage toutefois la structure interne de l'édifice. Par ailleurs, les travaux de Hurwitz faisaient, eux, intervenir les aspects globaux du groupe, mais sans qu'un lien pertinent avec l'algèbre de Lie ne se dessine. Si le travail de Weyl modifie le faciès de la théorie c'est que les aspects globaux relatifs à la variété du groupe (*Gruppenmannigfaltigkeit*) – compacité puis, par ricochet, groupe de Poincaré – deviennent pertinents dans un problème qui semble relever de la pure algèbre des « groupes » de transformations infinitésimales. Le caractère purement local de la transparence de l'aller-retour entre groupe et algèbre n'était pas fondamentalement *ignoré* mais il n'était pas fondamentalement *pertinent* ; il l'est devenu.

4. Problèmes *im Grossen* en théorie des groupes continus : Otto Schreier.

Ce travail de mise à plat et d'exposition systématique sur des bases nouvelles d'une théorie possédant déjà une forme classique – travail que Weyl avait fait pour la théorie des surfaces de Riemann – c'est Otto Schreier (1901-1929) qui le mène en à partir de 1925 au séminaire de l'université de Hambourg. Le jeune chercheur vient de Vienne où il soutenu en 1923 une thèse sur la théorie des groupes, après des études auprès de Wirtinger, Hahn, Reidemeister, Furtwängler ou Vietoris. On trouve son travail sur les groupes continus dans deux exposés publiés dans le cahier du séminaire mathématique de Hambourg, l'un en 1926 sur les *Groupes continus abstraits*²⁶, l'autre en 1927 sur *La corrélation des groupes continus im Grossen*²⁷; ainsi que dans un exposé à la société des mathématiciens allemands, dont le texte, *Sur de nouvelles recherches en théorie des groupes continus*, paraît dans le volume de 1928 du *Jahresbericht der D.M.V.*²⁸.

Le couple local/global est d'emblée celui qui guide l'étude comme le montre l'introduction du premier exposé :

Nous donnons dans ce qui suit une définition des groupes continus abstraits, abstraits au sens où nous ne faisons aucune hypothèse sur la nature des éléments du groupe. On déduit ensuite certaines propriétés fondamentales de ces groupes et on étudie en

²⁶ *Abstrakte kontinuierlichen Gruppen* [Schreier 1926].

²⁷ *Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im Großen* [Schreier 1927].

²⁸ *Über neue Untersuchungen in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen* [Schreier 1928].

particulier la question de savoir dans quelle mesure un groupe est déterminé par son comportement *im kleinen*. [Schreier 1926 15]²⁹

Il semble inutile de souligner les traits « structuralistes » qu'on devine dans ce passage³⁰ et que confirme la suite de la lecture : le groupes sont « abstraits » en particulier parce qu'ils sont considérés en eux-mêmes et non comme des groupes de transformations (ce qui demeurait le cas chez Weyl lorsqu'il introduisait, fidèle à Lie, le groupe des paramètres associés à un groupe de Lie de transformations). Le traitement est, lui aussi, « abstrait » : on partira d'objets définis par des propriétés caractéristiques (qu'on ne se soucie plus de baptiser axiomes) pour en déduire les principales propriétés ; les exemples d'objets satisfaisant à ces définitions ne sont donnés que dans la dernière partie du texte ! On retrouve à la lecture cette impression familière de pur jeu de l'esprit, libre et un peu gratuit : il ne s'agit pas, comme chez Weyl en 1924 et dans une large mesure en 1913, de se réappropriier tout un monde de complexité en le coulant dans un moule plus épuré ; profilage de l'héritage, profilage par le dialogue avec le passé. Cette gratuité de l'approche de Schreier n'est toutefois qu'apparente, l'étude est motivée par une question adressée à la théorie dont on hérite : « dans quelle mesure un groupe est déterminé par son comportement *im kleinen* » ? Cette question était aussi bien sûr centrale dans les articles de Weyl sur la représentation linéaire des algèbres de Lie, mais elle était rencontrée comme un obstacle dans le cours d'une démonstration, obstacle dont Weyl soulignait, certes, au passage, la nature générale. Schreier peut, quant à lui, partir de la question générale ; elle n'a pas à être autrement motivée : au jeune mathématicien, pour qui l'algèbre abstraite (quoique pas encore dans sa version structurale post- van der Waerden) et la topologie ont *toujours été là*, la question *se présente d'elle-même*. Il ne s'agit plus de s'arracher au système d'évidences qui guidait, par exemple, Lie et Cartan, mais de s'étonner qu'une question si naturelle et centrale ait pu échapper aux anciens. Indice prosaïque, Schreier ne pense pas même à utiliser guillemets, majuscules ou italiques lors de la première apparition de « *im kleinen* », encore moins à en expliciter le sens : à la même époque, Morse est encore conscient d'utiliser un terme en partie métaphorique et extra-mathématique ; Schreier ne fait qu'utiliser une catégorie usuelle dans le raisonnement mathématique.

²⁹ « *Im foldenden wird eine Definition für abstrakte kontinuierliche Gruppen gegeben, abstrakt in dem Sinn, daß über die Natur der Gruppenelemente keinerlei Voraussetzung gemacht wird. Sodann werden einige grundlegende Eigenschaften dieser Gruppen abgeleitet und insbesondere die Frage untersucht, inwieweit eine kontinuierliche Gruppe durch ihr Verhalten im kleinen bestimmt ist.* »

³⁰ On sait l'importance particulière des mathématiciens du séminaire de Hambourg (Artin, van der Waerden) et de Göttingen (Hopf, Emmy Noether) dans la formation et l'exportation du modèle structural d'exposition des théories. Par exemple [Corry 1996].

Laissons Schreier présenter les deux principaux résultats de son premier article, dans l'unique passage dans lequel il indique les liens avec les notions issues de la théorie de Lie. Quelques mises au point de vocabulaire : « continu » signifie entre autres « connexe », groupe-facteur (*Faktorgruppe*) désigne un groupe quotient, et un « isomorphisme univoque » (*einstufig isomorphism*) est ce que nous appelons un isomorphisme :

- I. Tous les éléments d'un groupe continu peuvent être formés à partir d'éléments d'un voisinage [*Nähe*] arbitraire de l'élément unité (théorème I). Ceci n'est à vrai dire pas directement contenu dans le second théorème fondamental de Lie, lorsqu'il s'agit d'un groupe de Lie ; car pour démontrer le deuxième théorème fondamental on tire des théorèmes d'existence de la théorie des équations différentielles, de sorte qu'on doit se restreindre à un voisinage suffisamment petit de l'identité ; on n'y obtient donc que le résultat partiel : il existe un voisinage de l'identité dont la totalité des éléments peuvent être formés d'éléments arbitrairement proches de l'identité.
- II. Un groupe continu \mathbf{R} en détermine un second $\hat{\mathbf{R}}$ tel que tout groupe continu coïncidant *im kleinen* avec \mathbf{R} est univoquement isomorphe à un groupe-facteur de $\hat{\mathbf{R}}$ (Théorème II). Appliqué aux groupes de Lie, cette proposition nous apprend la relations qu'entretiennent deux groupes « de même structure » (« *gleich zusammengesetzt* ») – c'est-à-dire dont les constantes de structure c_{ik}^l coïncident. Nous obtenons en même temps un certain aperçu de la structure topologique des groupes continus (proposition 11). [Schreier 1926 15]³¹

L'absence de distinction claire entre les transformations infinitésimales d'un groupe de Lie et les transformations finies appartenant à un voisinage de l'identité fait perdre aux considérations du point I une partie de leur pertinence, mais le cœur de l'article n'est pas là. Bien que soucieux de faire le lien avec les applications possibles en théorie des groupes de Lie, c'est une théorie des groupes continus qu'il développe : aucune considération

³¹ « I. Alle Elemente einer kontinuierlichen Gruppe können aus Elementen zusammengesetzt werden, die in beliebiger Nähe des Einheitselements liegen (Theorem I). Dies ist übrigens selbst dann nicht unmittelbar in Lies zweitem Fundamentalsatz enthalten, wenn es sich um eine Liesche Gruppe handelt ; dem zum Beweis des zweiten Fundamentalsatzes werden Existenzsätze aus der Lehre von den Differentialgleichungen herangezogen, so daß man sich auf eine hinlänglich kleine Umgebung der Identität beschränken muß ; man erhält also von hier aus bloß das Teilergebnis : Es gibt eine Umgebung der Identität, deren sämtliche Elemente sich aus Elemente zusammensetzen lassen, die der Identität beliebig nahe liegen. II Eine kontinuierliche Gruppe \mathbf{R} bestimmt eindeutig eine zweite $\hat{\mathbf{R}}$, von der Art, daß jede kontinuierliche Gruppe, die mit \mathbf{R} im kleinen übereinstimmt, mit einer Faktorgruppe von $\hat{\mathbf{R}}$ einstufig isomorph ist (Theorem II). Auf LIEsche Gruppen angewendet, lehrt dieser Satz, in welcher Beziehung Gruppen stellen, die « gleich zusammengesetzt » sind, d.h. in den Zusammensetzungsconstanten c_{ik}^l übereinstimmen.- Zugleich erhalten wir auch einen gewissen Einblick in die topologische Struktur der kontinuierlichen Gruppen (Satz 11). »

infinitésimale n'y entre en jeu. Schreier définit deux types de structures, les L-groupes qui sont des groupes dans lesquels est définie abstraitement une notion de limite, et les « groupes continus », dans lesquels les notions topologiques sont définies à partir des voisinages plutôt qu'à partir d'une notion de limite, et qu'on suppose de plus connexes et localement homéomorphes à une boule ouverte d'un espace euclidien. Dans les deux cas sont définies les notions d'homomorphisme (Schreier parle de groupes « *isomorph* ») et de groupe quotient par un sous-groupe (Schreier parle « diviseur ») normal fermé. L'innovation principale se trouve, à notre sens, dans le paragraphe 3, dans la notion de groupes localement isomorphes (« *im kleinen isomorph Gruppen* ») :

Définition 7. Deux groupes continus \mathbf{R} , \mathbf{R}' sont dits isomorphes *im kleinen* s'il existe un voisinage $U(E)$ de l'identité dans \mathbf{R} , un voisinage $U'(E')$ de l'identité dans \mathbf{R}' et une application α de $U(E)$ sur $U'(E')$ telle que : 1. α est biunivoque [*eineindeutig*] et inversiblement continue. 2. Si $U_1U_2 = U_3$ (U_1, U_2, U_3 dans $U(E)$), alors $\alpha(U_1)\alpha(U_2) = \alpha(U_3)$. 3. Si $U'_1U'_2 = U'_3$ (U'_1, U'_2, U'_3 dans $U'(E')$), alors $\alpha^{-1}(U'_1)\alpha^{-1}(U'_2) = \alpha^{-1}(U'_3)$. On dit que les voisinages $U(E)$ et $U'(E')$ sont continûment isomorphes. [Schreier 1926 20] ³²

Cette clarification essentielle permet de lancer la question du revêtement universel, pour laquelle Schreier choisit une construction originale.

Soient maintenant \mathbf{R} et \mathbf{R}' deux groupes continus isomorphes *im kleinen*, U , U' deux voisinages sphériques continûment isomorphes des unités correspondantes. Nous associons à chaque élément U de U un symbole \overline{U} , en particulier le symbole \overline{E} à l'unité E . Nous associons à chaque relation $U_1U_2 = U_3$ entre trois éléments de U la relation $\overline{U}_1\overline{U}_2 = \overline{U}_3$. Nous nommons \mathbf{R}_U le groupe engendré par les symboles \overline{U} et défini par les relations données. [Schreier 1926 21] ³³

Schreier définit ensuite sur \mathbf{R}_U une notion de limite – une structure de L-groupe donc -, pour laquelle il montre que \mathbf{R} et \mathbf{R}_U sont localement isomorphes pour une application naturelle de

³² « Definition 7. Zwei kontinuierliche Gruppen R, R' heißen isomorph im kleinen, wenn es eine Umgebung $U(E)$ der Einheit in R , eine Umgebung $U'(E')$ der Einheit in R' und eine Abbildung α von $U(E)$ auf $U'(E')$ von folgender Beschaffenheit : 1. α ist eineindeutig und umkehrbar stetig. 2. Ist $U_1U_2=U_3$ (U_1, U_2, U_3 in $U(E)$), so ist $\alpha(U_1)\alpha(U_2) = \alpha(U_3)$. 3. Ist $U'_1U'_2=U'_3$ (U'_1, U'_2, U'_3 in $U'(E')$), so ist $\alpha^{-1}(U'_1)\alpha^{-1}(U'_2) = \alpha^{-1}(U'_3)$.- Die Umgebungen $U(E)$ und $U'(E')$ nennen wir stetig isomorph. »

³³ « Seien nunmehr R, R' im kleinen isomorph, kontinuierliche Gruppen, U, U' stetige isomorph Kugelumgebungen der betreffenden Einheiten. Wir ordnen jedem Element U aus U ein Symbol \overline{U} zu, insbesondere der Einheit E das Symbol \overline{E} . Jeder Beziehung $U_1U_2 = U_3$ zwischen drei Elementen von U ordnen

\mathbf{R}_U dans \mathbf{R} ; l'ensemble des éléments au-dessus de E forme un sous-groupe normal discret, et \mathbf{R} s'identifie, en tant que L-groupe, au quotient de \mathbf{R}_U par ce sous-groupe. On peut se demander pourquoi Schreier était parti de deux groupes \mathbf{R} et \mathbf{R}' plutôt que d'un seul ; il préfère formuler son résultat sous la forme suivante³⁴ :

Proposition 10. Soient \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 deux groupes continus isomorphes *im kleinen*, il existe un groupe \mathbf{R} isomorphe *im kleinen* aux deux, tel que \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 sont continûment isomorphes au L-groupes-facteurs de \mathbf{R} de diviseur normal discret.- Réciproquement, si \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 sont continûment isomorphes au L-groupes-facteurs d'un groupe continu \mathbf{R} pour des diviseurs normaux discrets, alors ils sont aussi isomorphes *im kleinen*. [Schreier 1926 23]³⁵

C'est dans un second temps que Schreier élargit la question : maintenant que l'on sait, à deux groupes continus localement isomorphes, en associer un troisième dont ils sont tous deux quotients, peut-on associer à *tous* les groupes continus d'une classe d'isomorphisme local un unique tel groupe ? Le passage n'est pas trivial si la classe est infinie : lorsque dans des couples (R_1, R_2) , où R_1 est fixé, on laisse R_2 parcourir la classe des groupes localement isomorphes à R_1 , à chaque R_2 se voit associé un voisinage de l'unité dans R_1 , mais rien ne garantit que l'intersection de cette infinité de voisinages en est encore un. Schreier lève cette difficulté, et peut affirmer l'existence d'un objet qu'il nomme ainsi :

Définition 8. Le groupe continu $\hat{\mathbf{R}}$ se nomme un groupe-revêtement [*Überlagerungsgruppe*] du groupe continu \mathbf{R} , ou encore la classe de \mathbf{R} , lorsque chaque groupe isomorphe *im kleinen* à \mathbf{R} est continûment isomorphe au L-groupe-facteur de $\hat{\mathbf{R}}$ par un diviseur normal discret. [Schreier 1926 24]³⁶

Schreier remercie en note Artin pour avoir suggéré le terme de groupe-revêtement. L'unicité du groupe-revêtement à isomorphisme continu près est établie.

Une des originalités de la démarche de Schreier, du point de vue de la topologie, vient de l'importation de modes de raisonnement typiques de la théorie abstraite des groupes, dont il

wir die Relation $\overline{U_1} \overline{U_2} = \overline{U_3}$ zu. Die durch die Symbole \overline{U} erzeugte und durch die eben angegebenen Relationen definierte Gruppe nennen wir \mathbf{R}_U . »

³⁴ rappelons que « isomorphe » seul signifie pour nous « homomorphe ». Par contre « continûment isomorphe » contient une condition de bijectivité [Schreier 1926 16].

³⁵ « Satz 10. Sind R_1, R_2 im kleinen isomorph kontinuierlichen Gruppen, so gibt es eine mit beiden im kleinen isomorph Gruppe R , so daß R_1 und R_2 mit den Faktor-L-Gruppen diskreter Normalteiler von R stetig isomorph sind. – Sind umgekehrt R_1, R_2 mit den Faktor-L-Gruppen diskreter Normalteiler einer kontinuierlichen Gruppe R stetig isomorph, so sind sie auch isomorph im kleinen. »

est spécialiste : groupes définis par générateurs et relations, recherche des extensions d'un groupe donné, suites de composition etc.

L'exposé de l'année suivante, *La corrélation des groupes continus im Großen*, revient sur la construction du revêtement par générateurs et relations pour en préciser la portée : il était alors question de savoir dans quelle mesure la structure d'un groupe est déterminée par sa donnée *im Kleinen* (en particulier, dans le cas de groupes de Lie, par ses constantes de structure) et la construction donnée alors y répond, mais sans fournir assez de renseignements globaux. Ainsi l'introduction s'achève-t-elle sur ces remarques :

Pour construire le groupe de revêtement nous utilisons la méthode de la théorie abstraite des groupes, en déterminant un groupe par des symboles générateurs et des relations de définition. Certes on mettait ainsi en évidence la détermination par le comportement *im kleinen*, mais les aspects topologiques étaient par là trop laissés à l'arrière-plan.

Nous donnerons dans ce qui suit donner de nouvelles démonstrations de ces propositions. Contrairement à la précédente démonstration, nous plaçons au premier plan le point de vue topologique. L'avantage est qu'on peut y définir le groupe de revêtement directement *im Großen*. [Schreier 1927 233]³⁷

Partant d'un « *Konvergenzraum* » sur lequel une notion de limite est caractérisée axiomatiquement, Schreier y définit la notion de chemin, d'homotopie de chemins ayant même extrémité, de produit de chemins dont l'une des extrémités coïncident, de limite d'une suite de chemins. Il montre qu'alors l'ensemble des chemins issus d'un point fixé P est un nouveau « *Konvergenzraum* » $w(P)$, contractile. Si l'espace de départ est un L-groupe G , on peut considérer qu'un chemin $F(t)$ est équivalent à tout chemin de la forme $AF(t)$, pour un quelconque élément A du groupe ; on peut donc faire commencer un chemin en n'importe quel point du groupe et donc définir sans contrainte le produit de concaténation : l'espace formé est ainsi un groupe g , le groupe des chemins, dont on choisit de représenter les éléments par des chemins issus de l'identité E de G . Ce groupe g est un L-groupe muni d'un

³⁶ « Definition 8. Die kontinuierliche Gruppe \hat{R} heißt eine Überlagerungsgruppe der kontinuierlichen Gruppe R oder auch der Klasse von R , wenn jede mit R im kleinen isomorphe Gruppe mit der Faktor-L-Gruppe eines diskreten Normalteilers von \hat{R} stetig isomorph ist. »

³⁷ « Zur Konstruktion der Überlagerungsgruppe wurde die Methode der abstrakten Gruppentheorie verwendet, eine Gruppe durch erzeugende Symbole und definierende Relationen zu bestimmen. Dadurch wird zwar die Bestimmtheit durch das Verhalten im kleinen in Evidenz gesetzt, allein die topologische Seite der Fragestellung tritt dabei allzusehr in den Hintergrund. Im folgenden sollen nun neue Beweise der angedeuteten Sätze gegeben werden. Im Gegensatz zu den früheren ist der topologische Gesichtspunkt in der Vordergrund gerückt. »

homomorphisme ³⁸ naturel de groupe vers \mathbf{G} , qui à chaque chemin associe son extrémité. Le diviseur normal \mathbf{f} des éléments au dessus de E est un groupe abélien discret que Schreier nomme le groupe fondamental. En ajoutant quelques hypothèses sur \mathbf{G} on obtient que \mathbf{G} est continûment isomorphe au L-groupe quotient $(\mathbf{g}/\mathbf{f})_{\mathbf{L}}$ ³⁹ [Schreier 1927 238]. Le lien avec l'article précédent est fait lorsque Schreier démontre que si \mathbf{G} et \mathbf{G}' sont deux L-groupes localement isomorphes, les L-groupes \mathbf{g} et \mathbf{g}' sont continûment isomorphes. En ajoutant encore quelques hypothèses topologiques sur \mathbf{G} (en particulier la locale simple connexité) on obtient que l'homomorphisme canonique de \mathbf{g} sur \mathbf{G} est un isomorphisme local [Schreier 1927 241].

L'exposé devant l'Union des Mathématiciens Allemands fait en septembre 1926 ne contient bien sûr pas autre chose, mais permet de mieux situer le contexte de ces travaux. Schreier commence, un peu rhétoriquement, à déplorer le peu d'intérêt pour les groupes continus : certes importants dans les développements récents de la géométrie (qu'on pense aux articles de l'*Encyclopädie* sur les invariants différentiels, ou aux manuels de Blaschke), ils y sont un moyen plus que l'objet d'étude même ; par ailleurs, les travaux issus de l'école de Lie semblent à la fois trop loin des critères modernes de rigueur, et si riches qu'ils semblent avoir épuisé les questions qu'ils se posaient (!). L'objectif de l'exposé est, on le devine, de combattre cette impression générale, nous n'y relevons que quelques points en passant. Il commence par une relecture de la présentation à la Lie, un groupe de transformation étant donné par des équations de la forme

$$x_i^a = f_i(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

En soulignant que dans ce cadre le produit et l'inverse ne sont définis qu'au voisinage de l'identité, il propose que la structure définie ainsi ne se nomme plus un groupe mais un « germe de groupe » (*Gruppenkeim*) à r paramètres [Schreier 1928 114]. Peut-être moins profond mais non moins significatif d'une évolution des systèmes d'évidence, alors que Schreier fait disparaître toute marque graphique indiquant le statut métaphorique des termes *im Kleinen* ou *im Großen*, il ne peut parler de « groupe infinitésimal » sans mettre de guillemets [Schreier 1928 116]. La plus grande part de l'exposé est consacrée au résumé des

³⁸ Schreier signale en note que son choix de terme a évolué sur ce point : « *homomorph* » désigne en 1927 ce qui était désigné en 1926 par « *einstufig isomorph* », le terme « *isomorph* » étant réservé à ce qu'on nommait « *mehrstufig isomorph* ». Schreier en arrive aux termes dans le sens qui s'est fixé depuis. Notons que l'usage était strictement inverse chez Weyl dans son grand article sur la représentation linéaire des algèbres semi-simples : il utilisait alors « *isomorph* » pour ce que nous disons homomorphe et « *homomorph* » pour ce que nous disons isomorphe. Dans tous les cas les applications sont implicitement surjectives.

³⁹ On notera le strict respect des contraintes structurales, Schreier notant différemment le groupe quotient \mathbf{g}/\mathbf{f} et le L-groupe quotient $(\mathbf{g}/\mathbf{f})_{\mathbf{L}}$.

travaux récents de Weyl, Peter-Weyl, et Cartan en théorie de la représentation, travaux que Schreier ne pouvait connaître au moment de son premier exposé au séminaire de Hambourg, en janvier 1925. Schreier termine en faisant le lien avec les travaux de Hopf sur les points fixes des applications entre variétés fermées (i.e. compactes) et il en déduit la nullité de la caractéristique d'Euler-Poincaré des variétés-de-groupe (*Gruppenmannigfaltigkeit*) fermées ; la question de la caractérisation des variétés-de-groupe par des propriétés topologiques est proposée.

Au moment où paraît le fascicule des exposés de 1925 du séminaire de Hambourg, Schreier insère une note signalant qu'indépendamment de ses travaux est paru, sur des thèmes proches, un article de Henri Mineur (1899-1964) *Sur la théorie analytique des groupes continus* [Mineur 1925]. Son bagage mathématique est sensiblement différent de celui d'un Schreier, algébriste abstrait connaisseur de la topologie abstraite ; normalien, Mineur vient de soutenir sa thèse sur un théorème d'addition pour les fonctions fuchsiennes. C'est aussi sous le signe du dépassement de la saisie strictement locale en théorie des groupes de Lie que Mineur place son projet :

La théorie des groupes continus finis a été fondée par S. Lie, et depuis de nombreux géomètres en ont développé les bases et les applications. Dans toutes ces recherches, on définit un groupe continu G par des transformations infinitésimales

$$X_i f = \sum_{k=1}^n \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

dont on suppose les coefficients ξ_{ki} holomorphes dans le voisinage d'un point ; on définit les transformations de G dans le voisinage de ce point en se bornant à l'étude des transformations voisines de la transformation identique. Lorsqu'on étudie la similitude entre deux groupes g et G , on se contente d'établir qu'il existe une transformation f holomorphe, ainsi que f^{-1} , dans le voisinage du point considéré et telle que

$$fgf^{-1} = G.$$

Dans ce travail, nous nous sommes proposé d'étudier les groupes continus G , sans nous restreindre ni à la considération des transformations de G voisines de la transformation identique, ni à l'étude des transformations de G et de la transformation f dans le voisinage d'un point. [Mineur 1925 23]

Quoique parfaitement claire, un terme *méta* comme « local » semble faire défaut pour qualifier le caractère commun de ces études limitées au voisinage d'un point ; la perspective

concurrente n'est ni qualifiée ni décrite en termes généraux. Mais laissons Mineur présenter son travail :

Ce travail se compose de trois Parties :

Dans la première Partie, nous supposons les ξ_{ki} algébriques et le groupe g birationnel ; nous faisons en outre une hypothèse sur la structure de g . Au groupe G correspond un groupe (g') birationnel, comprenant une infinité discontinue de transformations. Si (g') est discontinu au sens de H. Poincaré, la transformation f est uniforme, ainsi que les transformations de G qui correspondent biuniformément à celle de g . Dans le cas contraire, G contient un sous-groupe singulier (G) composé d'une infinité discontinue de transformations.

Dans la deuxième Partie, nous étudions une structure particulière de groupe qui nous conduit à considérer des transcendentes uniformes appelées « ultrakleinéennes ». Nous étudions également G sur sa multiplicité invariante. (...)

Dans la dernière Partie, en partant des fonctions kleinéennes, nous avons défini des fonctions ultrakleinéennes et des groupes G pour lesquelles les ξ_{ki} sont algébriques. (...) [Mineur 1925 24]

On devine que, quel que soit l'intérêt des travaux de Mineur, lui et Schreier ne sont pas dans le même monde ! C'est quelques pages après son introduction que Mineur précise sa question centrale :

Il existe, comme on sait, trois procédés principaux de définition communs à l'exponentielle et aux fonctions elliptiques ; seuls deux d'entre eux permettent de définir les fonctions fuchsiennes et kleinéennes comme le montre le tableau ci-après :

Exponentielle	Fonctions elliptiques	Fonctions kleinéennes
Série e^x	Séries $p(u), \zeta(u)$	Séries thétakleinéennes.
Equation différentielle $y'=y$	Inversion de l'intégrale elliptique de première espère.	Inversion du quotient de deux intégrales d'une équation linéaire.
Equation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$	Théorème d'addition algébrique.	

Nous nous proposons dans ce travail de combler le vide que présente ce tableau ; d'une façon plus précise, au moyen d'équations fonctionnelles analogues à celles du théorème d'addition des fonctions elliptiques, nous définirons des systèmes de

transcendantes dont le groupe est formé de transformations birationnelles d'une nature donnée à l'avance. [Mineur 1925 27]

Le traitement de la question est indéniablement construit autour de préoccupations globales, les aspects globaux étant principalement saisis sous l'angle du prolongement analytique, du lien entre topologie des domaines et multivocité des objets ainsi engendrés [Mineur 1925 41] ; les leçons de Poincaré sur la topologie des domaines de paramètres des transformations ont été entendues. Marqueur pré-Osgood, les relations fonctionnelles sont toujours *a priori* multivoques, sur des domaines qui sont toujours des horizons à conquérir et non des données primitives. Aussi bien dans les objectifs que dans les outils, on peine – dans une lecture que nous avouons un peu rapide – à identifier un élément du travail de Mineur attestant qu'il est écrit en 1925 et non en 1885.

III. Le passage au global chez Elie Cartan (1925-1930).

A partir de 1925 les problématiques globales jusque là ignorées envahissent les écrits d'Elie Cartan et renouvellent profondément son travail dans chacune des théories dont il était déjà l'un des maîtres : groupes et algèbres de Lie, connexions, formes différentielles. Une nouvelle saisie des « variétés » permet de faire circuler les interrogations et les techniques, ouvrant des voies transversales vers, par exemple, la topologie des groupes de Lie ou la géométrie des espaces homogènes. En 1930, la monographie sur *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs* propose une refonte totale du mode d'exposition de la théorie des groupes de Lie, faisant la synthèse des apports de Weyl, Schreier et Cartan lui-même.

1. Une réaction au travail de Weyl sur le « fondement du calcul tensoriel ».

Elie Cartan fait paraître en mai 1925 dans le Bulletin des Sciences Mathématiques un article sur *Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples* [Cartan 1925d] dans lequel il démontre le théorème de réductibilité complète des représentations linéaires des « groupes » (i.e. algèbres) de Lie semi-simples. Le lien avec les travaux de Weyl n'est pas ambigu : ce sont les deux articles de 1924 sur *le fondement groupe-théorique du calcul tensoriel* et *sur la théorie de la représentation linéaire des groupes simples* qui motivent la réponse de Cartan ; son article est par contre publié avant le grand article de Weyl 1925 sur la représentation linéaire des groupes semi-simples, comme une note nous l'apprend :

D'après les indications qu'il a bien voulu me donner, M. H. Weyl publiera prochainement dans la *Math. Zeitschrift* plusieurs mémoires sur la théorie des groupes continus ; ils contiendront en particulier une démonstration générale du théorème de réductibilité complète avec le même point de départ que celle qui fait l'objet du présent article. [Cartan 1925d 533]

Ce « point de départ » étant les résultats de Cartan sur la structure générale des algèbres semi-simples, et non seulement des algèbres de quatre grandes classes de tels groupes.

Après un rappel sur la question de la réductibilité des représentations linéaires et la notion de tenseur irréductible, Cartan résume ce qu'il retient de Weyl : tout d'abord la technique de Hurwitz de formation d'invariants, en particulier de formes quadratiques invariantes, par intégration par rapport « à un élément de volume qui se conserve par une transformation quelconque du groupe des paramètres », intégration possible pour les groupes continus « dont le domaine est fermé et de volume total fini » [Cartan 1925d 532] ; ensuite :

On pourra donc démontrer par exemple que tout groupe linéaire à paramètres réels isomorphe au groupe d'une forme de Hermite définie laissera invariante une forme de Hermite définie, à condition que le domaine (des paramètres) du premier groupe *ne recouvre pas une infinité de fois* le domaine du second : c'est la méthode de M. H. Weyl, qui démontre, par des considérations d'*Analysis situs* appliquées au domaine du second groupe, que le domaine du premier ne peut recouvrir qu'une fois celui du second. [Cartan 1925d 533]

Le langage est encore celui de Lie : la *Gruppenmannigfaltigkeit* est le « domaine des paramètres » du groupe continu ; « isomorphe » est à entendre dans le sens spécifique à la théorie des groupes *à la* Lie : les groupes sont de même structure, ils ont, dirions-nous, des algèbres de Lie isomorphes. Le résultat que Cartan résume est donc bien le suivant : M. Weyl a établi que si un groupe continu G ayant la même algèbre de Lie qu'un groupe G' conservant une forme de Hermite (donc de domaine « fermé et de volume fini ») ne possède qu'un nombre fini de feuillettes au dessus de G' , alors il est lui aussi fermé et de volume fini, les intégrales de Hurwitz conduisant à la démonstration de complète réductibilité de ses représentations linéaires. Cartan résume un peu vite en disant que le domaine de G ne peut recouvrir « qu'une seule fois » le domaine de G' : si Weyl a établi la simple connexité dans le cas spécial linéaire, il a aussi établi que le revêtement universel du groupe des rotations est à deux feuillettes, ouvrant d'ailleurs la voie à une interprétation des représentations spinorielles que Cartan avait trouvées, mais comme représentations de l'algèbre de Lie du groupe des rotations. Cartan présente son projet sous les auspices d'une double généralité, son résultat

s'appliquant à tous les groupes semi-simples et étant établi pour tous en même temps par une unique méthode générale :

M. Hermann Weyl n'a donné des indications précises sur sa démonstration que dans le cas des quatre grandes classes de groupes simples⁴⁰ : pour chacune d'elle il utilise un groupe spécial à paramètres réels et de volume total fini, et c'est par des considérations d'*Analysis situs* propres à chacun de ces groupes qu'il démontre que le domaine de tout groupe linéaire isomorphe ne peut recouvrir qu'un nombre fini de fois le domaine du groupe choisi.

Je me propose dans les pages qui suivent d'indiquer une démonstration s'appliquant à la fois à tous les groupes simples ou semi-simples. [Cartan 1925d 533]

Exactement comme le fait Weyl au même moment, le « groupe spécial à paramètres réels » spécifique à chaque cas est remplacé, dans l'étude générale, par la forme réelle du groupe adjoint (que Cartan nomme ici le « groupe de comparaison »), dont les travaux antérieurs de Cartan montrent la compacité puisqu'il conserve la forme définie négative ψ_2 . Cartan et Weyl diffèrent toutefois dans la deuxième phase, celle concernant le lien *fini* entre le groupe donné \mathbf{G} et le groupe de comparaison Γ ; là où Weyl utilise l'*Analysis situs*, Cartan utilise l'algèbre :

(...) les racines de l'équation caractéristique d'une substitution linéaire quelconque G du groupe \mathbf{G} sont des produits de puissances de certaines racines de l'équation caractéristique de la substitution correspondante T du groupe adjoint Γ , les exposants étant des nombres *rationnels* déterminés ; la substitution T étant donnée, cela ne permet, pour les racines de B , qu'un nombre fini k de combinaisons, à chacune desquelles correspond *une seule* substitution B . Le nombre k se détermine dans chaque cas avec la plus grande facilité, sans qu'on ait à sortir du domaine des transformations infinitésimales. [Cartan 1925d 534]

Le projet de Cartan ne se place pas sous le seul thème de la généralité : dans sa correspondance avec Weyl, il explique qu'il souhaite procéder « (...) sans être obligé de se livrer à des études d'analysis situs toujours délicates. » (cité par Hawkins [Hawkins 2000 493]). Si ses préventions à l'égard de la topologie ne sont pas celles de Weyl, les auteurs se rejoignent sur la question de pureté des méthodes : la question de réductibilité complète des représentations linéaires des algèbres de Lie est d'une nature purement algébrique ; devoir remonter de l'algèbre au groupe et s'appuyer sur la topologie de ce dernier introduit des éléments topologiques et transcendants *a priori* étrangers. Weyl déjà concluait son article sur

⁴⁰ Entendre : semi-simples.

le fondement groupe-théorique du calcul tensoriel sur ce vœux (à propos des quatre cas semi-simples usuels) :

Une preuve purement algébrique [*ein rein algebraischer Beweis*] de la complète réductibilité dans ces cas, opérant à l'intérieur du groupe infinitésimal, demeure souhaitable. [Weyl 1924a 224]⁴¹

Weyl l'appelle de ses vœux, semble nous dire Cartan : je le fais !

Si l'argument algébrique dispense Cartan de l'étude des classes d'homotopie de chemins dans le domaine du groupe, l'architecture générale de la preuve ne peut se dispenser d'un travail global, proche de celui de Weyl sur des points essentiels. En particulier, les deux démonstrations reposent sur l'étude de l'application exponentielle ; le lien entre \mathbf{G} et Γ est obtenu en comparant les applications exponentielles depuis leur algèbre de Lie commune, et les questions d'injectivité et de surjectivité jouent le rôle fondamental. Le but est atteint lorsque l'étude des deux applications exponentielles – ce que Cartan nomme la représentation sous la « forme canonique » e^A – permet d'établir la relation suivante entre ces trois espaces :

Il y a donc une infinité de formes canoniques pour une même substitution e^A de \mathbf{G} , mais il n'y a en revanche qu'un nombre fini k de substitutions canoniques distinctes e^λ correspondant à une substitution générale T du groupe adjoint. [Cartan 1925d 544]

Notre objectif n'est pas ici de présenter toute la preuve de Cartan, mais de considérer les outils mis en œuvre pour obtenir le résultat que nous venons de citer. Par exemple dans le cas du groupe adjoint, après avoir appelé l'espace vectoriel sous-jacent au groupe de Lie l'« espace canonique », il demande :

Toutes les transformations du groupe adjoint sont-elles de la forme e^{S_a} , une même transformation est-elle susceptible de plusieurs représentations canoniques, voilà ce que nous nous proposons d'étudier dans le cas d'un groupe simple ou semi-simple. [Cartan 1925d 535]

Cette étude, ainsi que l'étude équivalente pour \mathbf{G} , n'est pas menée algébriquement. Examinons quelques-uns des outils utilisés dans l'étude du cas de Γ . Par exemple, Cartan se soucie de réserver le terme de « groupe adjoint » à la composante connexe de l'identité, mais c'est par un argument mi-topologique mi-algébrique qu'il montre qu'il s'agit bien là d'un groupe. Après avoir rappelé que si l'algèbre est simple ou semi-simple, le groupe adjoint est le groupe des automorphismes de la structure d'algèbre de Lie (« l'ensemble des substitutions

⁴¹ « Ein rein algebraischer Beweis der vollen Reduzibilität in diesen Fällen, welcher innerhalb der infinitesimalen Gruppe operiert, bleibt zu wünschen. »

infinitésimales (...) qui conservent les relations de structure » [Cartan 1925d 537]), il en déduit que les matrices (α_{ij}) de ce groupes sont caractérisées par des équations algébriques.

Mais il pourrait arriver (et cela arriverait si, par exemple, le groupe était décomposable en deux groupes simples isomorphes) que la variété algébrique de l'espace des α_{ij} définie par les équations (4) fût décomposable. En tout cas, au voisinage de la matrice unité, elle ne l'est pas et, d'après la théorie générale des groupes, toutes les matrices T de ce voisinage sont engendrées par des transformations infinitésimales du groupe adjoint. Nous considérons *la plus petite variété algébrique* (de l'espace des α_{ij}) contenant la matrice unité. [Cartan 1925d 538]

On comprend bien qu'il s'agit d'arguments de composantes connexes (de variétés algébriques, certes) et non de composantes irréductibles au sens algébrique. C'est l'algèbre qui sert toutefois à établir que cette « plus petite variété algébrique » est elle-même un groupe : plutôt qu'un argument de connexité, Cartan préfère utiliser le fait qu'un système d'équations algébriques identiquement vérifié au voisinage de l'identité l'est entièrement sur cette « plus petite variété algébrique. » ([Cartan 1925d 538], un autre exemple du même type p.540). Autre exemple d'évitement des arguments topologiques, pour montrer que toute matrice générale (ici au sens : ayant un nombre maximal de valeurs propres distinctes) du groupe adjoint admet une forme canonique (i.e. exponentielle), c'est sur la théorie des équations différentielles que se repose Cartan : si l'on se donne un chemin reliant dans Γ (parmi les matrices générales, Cartan a établi la connexité dans le domaine complexe) une matrice $T_0 = e^{S_0}$ à une matrice T_1 , l'exponentielle s'obtient résolvant un système d'équations différentielles ordinaires et les hypothèses de généralité montrent qu' « on ne sera jamais arrêté dans le prolongement analytique de la solution (...) » [Cartan 1925d 541]. Après que cet argument d'Analyse a réglé le cas des matrices générales du groupe adjoint, le cas des matrices non-générales est réglé par un argument topologique : les matrices non-générales sont limites de matrices générales et, si l'on se borne aux matrices réelles, on peut toujours représenter une matrice réelle générale par e^S où les composantes de S définissent dans l'espace canonique réel un point contenu dans une sphère fixe (Σ) ;

Cela posé, toute substitution *non générale* \bar{T} pourra revêtir la forme canonique. En effet, on peut la regarder comme la limite d'une matrice générale réelle T , qu'on peut toujours représenter dans l'espace canonique réel par un point intérieur à (Σ) ; l'ensemble de ces points aura au moins un point limite \bar{S} à l'intérieur de (Σ) , ou sur (Σ) , et l'on pourra poser $\bar{T} = e^{\bar{S}}$. [Cartan 1925d 542]

L'étude de l'exponentielle vers \mathbf{G} est menée selon le même plan, et c'est, comme l'annonçait Cartan, un résultat algébrique sur le liens entre les poids principaux des deux représentations exponentielles de l'algèbre de Lie qui fournit l'argument de finitude [Cartan 1925d 544].

On voit donc Cartan utiliser des outils de topologie générale – connexité par arc, compacité (ou relative compacité) – sans leur accorder une préférence systématique sur les arguments algébriques ou analytiques. Il évite par contre tout recours à la topologie au sens de l'*Analysis situs* : il faut reconnaître que l'étude du groupe de Poincaré des groupes de Lie sous la simple hypothèse de semi-simplicité de l'algèbre relève, en effet, « délicate » ; le travail mené sur ce point par Weyl dans les cas des quatre classes usuelles nécessitait déjà une grande maîtrise de ces aspects, et sa démonstration dans le cas général est un peu allusive ! Au delà du choix des outils, Cartan aborde dans cet article les aspects globaux dont le travail de Weyl lui a montré le caractère essentiel : compacité de la variété du groupe, propriétés d'injectivité et de surjectivité de l'application exponentielle, lien entre deux groupes de même algèbre de Lie. On va voir que cette prise de conscience de la spécificité et de l'importance des aspects globaux va avoir un effet décisif sur les autres champs de recherche de Cartan ; quant à sa première réticence devant les études « délicates » d'*Analysis situs*, elle est bientôt levée.

2. Le *Gestalt switch* de 1925.

Dans un bref texte de 1925, tiré d'une communication au congrès de l'Association pour l'Avancement des Sciences [Cartan 1925c], on est frappé du contraste avec les textes précédents sur la géométrie différentielle. Intitulé *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés et l'analysis situs* il aurait pu aussi bien s'intituler *Problèmes globaux en géométrie différentielle*⁴². Le point d'entrée est le groupe d'holonomie :

J'ai indiqué récemment (*Ann. ENS*, t.XLII, 1925, p.18-29) de quelle manière on pouvait associer à tout espace de Riemann un groupe de déplacements euclidiens (*groupe d'holonomie*), dont chaque opération est associée à un contour fermé, ou *cycle*, tracé dans l'espace de Riemann. Si tous les cycles peuvent par déformation continue se réduire à un point, le groupe d'holonomie est continu et engendré par les déplacements infinitésimaux. Il en est ainsi si l'espace de Riemann est simplement connexe. Si le déplacement associé à un cycle infiniment petit arbitraire est nul, ce qui se traduit par l'annulation du tenseur de Riemann-Christoffel, le groupe d'holonomie

⁴² Nous modelons ce titre fictif sur celui de la conférence de Henri Cartan, 25 ans plus tard : *Problèmes globaux dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes* [Cartan 1950b].

se réduit au déplacement identique et l'espace de Riemann se confond avec l'espace euclidien.

Si l'espace de Riemann n'est pas simplement connexe, le groupe d'holonomie n'est plus nécessairement continu. En particulier si le tenseur de Riemann-Christoffel est nul, c'est-à-dire si l'espace de Riemann est *localement euclidien*, le groupe d'holonomie est *discontinu*. Un exemple simple est fourni par un cylindre de révolution (...). [Cartan 1925c 919]

Dans les textes précédents, en particulier l'article *Sur les variétés à connexions affines et la théorie de la relativité généralisée* que Cartan donne en référence, la définition du groupe d'holonomie était systématiquement décrite comme celle d'un groupe *continu*. Nous notions qu'en cela Cartan ne faisait que poursuivre la logique d'un raisonnement qui ne s'articulait en rien autour des trois niveaux infinitésimal/local/global identifiés par Hadamard, mais, plus classiquement, autour du couple infinitésimal/fini ; le fini était implicitement local : les chemins finis, en particulier, bordaient toujours des disques généralisés, de sorte que la formule de Stokes permettait d'engendrer et de justifier géométriquement la formation d'invariants différentiels par dérivation extérieure. Il était alors naturel d'interpréter la nullité du tenseur de courbure comme le signe du caractère euclidien de l'espace : non seulement cette interprétation était explicite dans l'article cité, mais dans un texte à vocation plus pédagogique comme celui du Mémorial des Sciences Mathématiques sur *La géométrie des espaces de Riemann* [Cartan 1925a], il était le point de départ du questionnement ; la problématique organisatrice de cet exposé était, comme depuis Riemann, celle des coordonnées curvilignes, du problème de la reconnaissance de situations simples cachées par des coordonnées inappropriées, de la formation d'invariants différentiels caractérisant les équivalences masquées. Le *Gestalt switch* est complet avec la conférence de l'Association pour l'avancement des Sciences, et un terme pourrait en être l'emblème : Cartan y parle d'espaces « localement euclidiens ». Nous n'avions jamais lu sous sa plume la structure syntaxique « être localement [propriété] », et cette nouveauté suffit à réorganiser la démarche autour du triplet de Hadamard. Il est significatif que Cartan aborde la question par le biais du groupe d'holonomie ; on peut sans forcer le trait y voir l'effet du travail de Weyl et de sa réception par Cartan. Si la non connexité du groupe de Lie y était un obstacle rapidement levé – il est bien clair que le groupe engendré par les transformations infinitésimales est connexe – elle devenait cependant un élément qu'on ne pouvait plus ne pas considérer. Le passage au groupe d'holonomie est beaucoup plus riche : la non connexité – le caractère « mixte » – de nombreux groupes était bien connu – on le voit dans l'article de l'*Encyclopädie* de 1915 –

mais cette non connexité n'était révélatrice d'aucune information pertinente ni générale ; propriété presque accidentelle de tel ou tel groupe, elle n'enseignait rien. Il en va tout autrement lorsque Cartan montre que le caractère mixte du groupe d'holonomie traduit, par son aspect continu (i.e. la composante connexe de l'identité), des informations sur la géométrie infinitésimale et par son aspect discontinu des informations sur les propriétés d'*Analysis situs* de l'espace. Le point de vue universellement local est à la fois congédié syntaxiquement par l'appropriation de tournures du type « être localement [propriété] », et saisi rétrospectivement comme un « manque à voir ». Cartan ne découvre ni n'invente la topologie, mais quelque chose de fondamental dans son regard sur les mathématiques a changé : les aspects globaux n'étaient pas sciemment laissés de côté, ils étaient tout simplement au delà de l'horizon dans un univers structuré par le couple infinitésimal/fini ; après Weyl, la ligne d'horizon a bougé.

Après cette mise en place fondamentale distinguant la géométrie locale des propriétés d'*Analysis situs* et montrant le double codage dans la structure du groupe d'holonomie, Cartan déroule une courte série d'exemples : texte bref et exotérique, il s'agit de rendre sensible sur de petits cas concrets les grandes articulations qu'on vient de mettre au jour et de d'indiquer à trait léger les chantiers de recherche qui s'ouvrent. Après l'exemple du cylindre, localement mais non globalement euclidien, comme le montre le caractère purement discontinu de son groupe d'holonomie, Cartan prend un exemple équivalent à celui de la bande de Möbius : le groupe d'holonomie est alors « engendré par un déplacement *accompagné d'une symétrie* » ; cette information donnée dans le langage des groupes est ensuite traduite dans un langage plus géométrique, et c'est encore l'opposition entre le local et le non local qui est la clé d'interprétation :

Dans un tel espace on peut définir *localement* un sens de rotation positif, mais, après un voyage autour du monde, ce sens suivi par continuité, devient négatif : en réalité l'espace n'est *pas orientable*. [Cartan 1925c 920]

Après la comparaison du cylindre et de la bande de Möbius, Cartan compare le tore et la bouteille de Klein, munis des métriques plates obtenues lorsqu'on les construit par recollement des bords de la région du plan euclidien limitée par deux cercles concentriques ⁴³. On voit par contre un peu moins clairement ce que sont censés illustrer ces exemples. Cartan les introduit comme exemples d'espaces de Weyl, notion plus générale que celle d'espace

⁴³ « [prenons] dans un plan euclidien l'espace limité par deux cercles concentriques de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, les points du grand cercle étant regardés comme identiques aux points du petit cercle qui s'en déduisent par la transformation $x' = R_1/R_2 x$, $y' = R_1/R_2 y$ (espace orientable) ou $x' = R_1/R_2 x$, $y' = -R_1/R_2 y$ (espace non orientable). » [Cartan 1925c 920]

Riemannien puisque la connexion utilise non seulement les isométries mais aussi les similitudes. Ils illustrent le fait qu'

Il est impossible d'y définir une unité de longueur valable dans tout l'espace, bien que cela soit possible dans une région limitée et simplement connexe de cet espace.

[Cartan 1925c 920]

C'est ici sur le transport de l'étalon de longueur que Cartan met l'accent : l'annulation de la *Streckenkrümmung* weyllienne ne garantit pas son intégrabilité le long de cycles non contractiles. Pour être un peu ramassé, cet aspect demeure pertinent ; on reste par contre un peu perplexe devant les conceptions topologiques de Cartan qui, après avoir souligné que l'un des deux espaces est orientable et l'autre non, souligne qu' « au point de vue de l'*Analysis situs*, ces espaces sont identiques au tore » [Cartan 1925c 920] ! Après le passage de la géométrie de Weyl à celle de Riemann, Cartan esquisse le lien vers ses propres travaux sur les connexions :

On pourrait plus généralement considérer des espaces localement euclidiens à connexion affine, ou projective, ou conforme. Dans ce dernier cas par exemple la notion de ligne droite, valable dans une région limitée simplement connexe de l'espace, ne résisterait pas à un voyage autour du monde. [Cartan 1925c 920]

La fin de l'exposé introduit d'autres éléments d'*Analysis situs* que le groupe fondamental, sans sortir toutefois des notions bien classiques. Cartan donne les grandes lignes de la preuve qu'une surface localement euclidienne et « fermée » est de genre 1 : il suffit d'évaluer le genre au moyen d'une décomposition en triangles suffisamment petits. Ce résultat classique ouvre la voie à de nouveaux travaux portant sur les notions les plus récentes relatives aux connexions :

Un raisonnement du même genre montre que dans un espace à deux dimensions fermé à connexion métrique (avec torsion) simplement connexe, le parallélisme *absolu* des directions est impossible, car on en déduirait la formule (1)⁴⁴, incompatible avec la formule classique d'Euler. Il en résulte facilement l'impossibilité d'attacher à chaque point d'une sphère, *et sans singularité*, une tangente déterminée. [Cartan 1925c 920]

En cette même année 1925, Hopf soutient à Berlin sa thèse *Sur les liens entre topologie et métrique des variétés* [Hopf 1925] et publie en 1926 et 1927 des travaux sur la courbure totale des variétés et les champs de vecteurs sur les variétés. Son point de départ est donné par les travaux de Brouwer *Sur l'application des variétés* [Brouwer 1912a]. On peut conjecturer que ces travaux de Brouwer, ou leur écho dans l'*Encyclopädie*, nourrissent la nouvelle curiosité

topologique de Cartan. Ce dernier exemple montre que la simple connexité ne garantit pas la trivialité des interactions entre topologie et géométrie, et que le groupe fondamental peut être l'alpha sans être l'oméga de la topologie. Cartan trouvera matière à enrichir cet aspect dans ses travaux sur le lien entre formes différentielles et topologie.

Sur le plan du vocabulaire, notons qu'aucun terme de la famille de « *im Großen* » ne fait couple avec le « localement » chez Cartan. On verra que « global » est utilisé ponctuellement sans s'imposer nettement parmi d'autres. Sur le fond, la distinction fondamentale ne passe pas entre local et global mais entre l'*Analysis situs* et le reste : on pourrait bien considérer des propriétés topologiques locales – Schreier, par exemple, explicite une hypothèse de locale simple connexité – et considérer des propriétés géométriques ou analytiques globales. Chez Cartan les propriétés d'*Analysis situs* sont implicitement globales, les propriétés géométriques ou analytiques – on pense, en anticipant un peu, au comportement des formes différentielles – sont rapportées au local. Il privilégie une classification en termes de disciplines (*Analysis situs*, géométrie différentielle Riemannienne, Weylienne etc., théorie des groupes de Lie) aux interactions riches et inédites, à une classification dont local/global serait l'axe central.

3. Sur la forme : un apprivoisement progressif.

La prise en compte des aspects globaux et l'émergence comme objet d'étude pertinent de la variété du groupe ne conduisent pas à une refonte immédiate des modes d'expression, et c'est à une évolution progressive que l'on assiste dans la période 1925-1930.

Ainsi la nature locale de nombreux travaux peut-elle demeurer implicite. Un exemple est donné par un article de 1926 rédigé avec J.A. Schouten sur *Les géométries riemanniennes à parallélisme absolu* [Cartan, Schouten 1926]. Un résultat central de décomposition en composantes irréductibles est énoncé et démontré sans mention de son caractère local ; c'est en 1931 dans la *Notice sur les travaux scientifiques* qu'il rédige pour l'Académie des Sciences que Cartan reformule ainsi ce résultat :

Il suffit de trouver les solutions *irréductibles* du problème, une solution réductible étant fournie par un espace de Riemann qui serait, au moins localement, le produit topologique de deux espaces de Riemann satisfaisant chacun aux solutions du problème. [Cartan 1931]

⁴⁴ Faces + Sommets = Arêtes dans une triangulation.

Autre cas de figure, lorsque le couple local / non-local vient qualifier des éléments d'un même article, ce n'est souvent qu'après-coup. Ainsi en 1927 dans *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien* [Cartan 1927d] Cartan peut-il garder pour la dernière phrase de l'article la remarque : « Il est du reste inutile de faire remarquer que la réalisation d'un espace de Riemann donné dans un espace euclidien est purement locale » [Cartan 1927d 1097]. Prenons comme dernier exemple l'article de 1926 sur *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés* [Cartan 1926b]. La quasi-totalité de l'article est rédigée comme avant 1925 : le caractère local est purement implicite, le groupe d'holonomie est supposé continu (i.e. connexe) etc. Seul le dernier paragraphe vient, après une quarantaine de pages, jeter une lumière rétrospective sur la nature de ce qui précède : intitulé *Les groupes d'holonomie et l'Analysis situs*, il reprend les exemples de la conférence de 1925 et s'ouvre sur

Nous avons supposé implicitement dans tout ce qui précède que le groupe d'holonomie d'un espace G à groupe fondamental \mathbf{G} est *continu*. [Cartan 1926b 1037]

On peut ici penser que l'article a été rédigé en plusieurs temps et que le dernier paragraphe n'appartenait pas à un projet initial fidèle aux conceptions d'avant 1925. Nous n'ajoutons pas d'autres exemples de crainte de devenir fastidieux, mais l'on peut montrer que cette manière d'explicitation rétrospective ou sous forme de remarques finales est largement présente chez Cartan dans les travaux locaux. Même après 1925, la nature locale des énoncés n'a pas à être annoncée ni régulièrement explicitée ; le simple fait qu'elle soit explicitée à un moment, fût-il tardif, marque cependant un net changement par rapport aux écrits d'avant 1925.

On observe aussi des formes de transition dans la description des groupes de Lie. Avant 1925 le groupe est ramené à son algèbre de Lie et l'isomorphisme de « groupe » désigne en fait l'identité de « structure », autrement dit l'isomorphisme des algèbres de Lie. Dans une série de notes de 1927 le vocabulaire n'est plus celui d'avant 1925 mais pas encore ce qui se fixera dans la monographie de 1930 sur la topologie des groupes de Lie. Ainsi dans *Sur les géodésiques des espaces de groupes simples* [Cartan 1927g], le titre indique clairement un thème de recherche tributaire du *Gestalt switch* de 1925. La note s'ouvre toutefois sur un rappel des quatre grandes classes d'isomorphie de « groupes » (d'algèbres) simples et précise ensuite, à propos des « espaces de groupes » :

Tous ces espaces sont à courbure riemannienne positive ou nulle. Ils peuvent admettre plusieurs *formes* distinctes, dont l'une est simplement connexe. [Cartan 1927g 661]

« Groupe » et « isomorphisme » renvoient donc encore aux groupes « infinitésimaux » et aux classifications des structures ; l'espace « du » groupe est un objet qui n'est pas défini

univoquement et l'on peut lire le titre de la note en comprenant qu'à chaque « groupe » sont associés plusieurs « espaces de groupes », de « formes » (i.e. de topologie globale) distinctes. On peut associer à cette famille des figures de transition la conférence de 1926 à l'Association pour l'Avancement des Sciences [Cartan 1926a]. Elle fait un écho direct à la conférence de 1925 que nous avons longuement présentée et l'on y voit Cartan reprendre la même question. Cependant, alors que la tactique de 1925 consistait en l'accumulation d'exemples variés permettant de faire comprendre la nature et l'intérêt des questions topologiques en géométrie différentielle, Cartan choisit en 1926 de s'attarder sur un exemple unique mais significatif. Il est introduit ainsi :

Deux espaces de Riemann sont dit applicables si l'on peut établir entre eux une correspondance ponctuelle transformant les deux éléments linéaires l'un dans l'autre : dans ce sens deux espaces de Riemann applicables sont identiques au point de vue de l'*Analysis situs*. Mais il peut arriver qu'un espace de Riemann admette un groupe *transitif* de déplacements rigides (groupe défini dans un certain domaine au voisinage de chaque point) : l'espace dans ce cas peut-être dit *homogène*. Deux espaces de Riemann peuvent être *localement* applicables sans être identiques au point de vue de l'*Analysis situs* : on peut donner l'exemple du plan euclidien et du cylindre de révolution. [Cartan 1926a 993]

La question est claire, mais à chaque instant Cartan doit préciser ce qu'il en est du caractère local ou global : jusqu'alors la notion d'applicabilité isométrique était implicitement locale (elle est ici globale), et la notion de groupe transitif d'isométries pourrait être lue globalement. Autant lorsque le travail est local Cartan peut rester dans l'implicite – il ne fait que continuer d'utiliser les conventions communes d'écriture et de lecture –, autant lorsqu'il veut illustrer le rôle des problèmes globaux il s'avance en dehors des conventions et doit à chaque instant expliciter plus ou moins adroitement ce à quoi il fait référence. Sur le fond, ce bref texte est consacré à la question du lien entre deux espaces de Riemann E et E' , localement applicables l'un sur l'autre, dont l'un des deux (disons E) est simplement connexe. Cartan s'appuie sur la notion de « développement » d'un espace de Riemann sur un autre le long d'un chemin, notion qui jouait déjà un rôle fondamental dans la conception des espaces généralisés. Le développement dans E des chemins de E' permet de construire le « groupe d'holonomie de E' par rapport à E » [Cartan 1926a 994] : cette sorte de groupe d'holonomie relatif est purement discontinu et ne porte d'information que topologique. On voit ainsi Cartan reprendre les termes d'un questionnement forgés dans un cadre implicitement local – celui du développement d'un espace généralisé dans l'espace de Klein de même groupe – mais

l'adapter en remplaçant l'espace de Klein par le revêtement universel pour faire apparaître ce qui était totalement masqué avant 1925. Dans cette conférence de 1926 Cartan ne présente pas réellement un travail de recherche, au sens où il aboutirait à des résultats significatifs sur les revêtements des espaces de Riemann ; il semble plutôt qu'il choisisse dans un cadre familier la situation la plus simple permettant d'introduire le questionnement global – celle de l'isométrie locale – pour, d'un même geste, apprivoiser les nouveaux concepts, les relier aux anciens et s'essayer à un nouveau mode de formulation pouvant déboucher sur de nouvelles convention d'écriture et de lecture ... un auteur en rodage.

4. Sur le fond : l'exploration de l'« espace du groupe ».

Il ne peut s'agir ici de présenter, fût-ce à grands traits, les travaux de période 1925-1930 sur la géométrie et la topologie des groupes de Lie et des espaces homogènes : la moisson est vaste et la lecture ardue. Nous voulons toutefois montrer sur deux points comment la nouvelle prise en compte de l'« espace » du groupe permet une circulation inédite des questionnements.

On peut isoler une première famille de textes sur la géométrie et la topologie des groupes de transformations, certains publiés avec Schouten. Nous ne retenons ici que *La géométrie des groupes de transformations* de 1927 [Cartan 1927a] et la conférence sur *La théorie des groupes et la géométrie* [Cartan 1927b]. Dans la conception classique des groupes de Lie intervenaient trois types d'éléments, les transformations finies, les transformations infinitésimales, enfin l'espace sur lequel ces transformations agissent ; les priorités, ici, changent :

Considérons un groupe de transformations fini et continu G à r paramètres a_1, \dots, a_r . Les variables transformées par le groupe joueront dans la suite un rôle tout à fait accessoire. (...)

Nous pouvons regarder les paramètres a_1, \dots, a_r comme les coordonnées d'un point (a) dans un espace E à r dimensions, que nous appellerons *espace du groupe*. Pour le moment cet espace est un simple continuum ; les propriétés du groupe vont nous permettre d'y introduire des notions géométriques. [Cartan 1927a 675]

C'est fondamentalement sur cet espace du groupe que le groupe agit. Dans ce passage la saisie de cet espace semble purement locale et elle l'est en effet : cet article ne traite que de propriétés géométriques locales, ce qu'on lit en filigrane dans l'énoncé des théorèmes utilisés (par exemple l'utilisation de paramètres canoniques [Cartan 1927a I.2]) ; ce n'est que dans article ultérieur que la perspective de cet article est rétrospectivement qualifiée de purement

locale. On voit que le travail sur l'espace du groupe, bien que trouvant son point de départ dans l'utilisation de propriétés topologiques globales par Weyl, peut aussi prendre une forme locale ; il s'accompagne de travaux globaux sur la topologie des groupes dont la monographie de 1930 présente un premier bilan. Si l'on revient à notre article sur la géométrie des groupes, Cartan y exploite l'action du groupe sur lui-même pour établir un dictionnaire avec les propriétés des espaces généralisés mises en place dans la période 1922-1925. On se souvient que l'une des critiques que Cartan adressait aux généralisations de la notions d'espace de Riemann telles que celle proposée par Weyl était qu'elles reposaient de manière essentielle sur la notion de vecteur, alors que, dans la perspective des espaces généralisés, la géométrie de Klein infinitésimalisée n'a pas à agir sur un espace dans lequel la notion de vecteur ait un sens, ainsi en géométrie projective. Ici, Cartan appuie sa description d'une géométrie des groupes de Lie sur une notion de vecteur, mais en la redéfinissant : un vecteur est un couple de points de l'espace du groupe, deux vecteurs (a,b) et (a',b') étant équipollents si on a l'égalité des transformations $T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1}$ (équipollence de première espèce) ou $T_a^{-1} T_b = T_{a'}^{-1} T_{b'}$ (équipollence de seconde espèce), associée à l'action du groupe sur lui-même à gauche ou à droite respectivement. En calquant les définitions sur celles de la géométrie affine, Cartan définit les géodésiques et montre que cette notion coïncide avec celle de sous-groupe à un paramètre. L'action du groupe sur lui-même (à gauche ou à droite) permet aussi de définir un transport des « vecteurs » sans courbure qui permet d'obtenir une nouvelle entrée dans le dictionnaire « géométrie des espaces généralisés / groupes de Lie », au niveau infinitésimal cette fois : à la torsion – du côté géométrique – correspond le crochet de Lie – du côté groupes de Lie –, les transformations infinitésimales étant identifiées à des translations infiniment petites. Une troisième connexion est définie (moyenne arithmétique entre les deux premières, ou encore, l'unique connexion affine sans torsion ayant les sous-groupes à un paramètre comme géodésiques) qui présente une courbure mais pas de torsion : la rotation infinitésimale associée au parallélogramme infinitésimal de côtés U et V est alors le crochet avec $[U,V]$; autrement dit le groupe d'holonomie est le groupe dérivé du groupe adjoint. Dans le cas semi-simple, cette connexion peut être associée à une structure riemannienne sur l'espace du groupe (la forme quadratique étant non-dégénérée mais non nécessairement définie). On comprend que Cartan puisse résumer ce travail par :

Beaucoup de théorèmes fondamentaux de la théorie des groupes prennent de cette manière un caractère géométrique inattendu. [Cartan 1927b 858]

Ce travail sur les espaces de groupe est la matrice d'où est issue une grande partie des travaux de la période. Ainsi la connexion sans torsion sur les groupes simples ou semi-simples est le

point de départ de l'étude des espaces riemanniens symétriques ; on le voit dans la conférence sur *La théorie des groupes et la géométrie* :

[Les espaces sans torsion de ces groupes] font partie d'une catégorie plus générale d'espaces riemanniens, caractérisés par la propriété que le transport par parallélisme y conserve la courbure riemannienne. Chose curieuse, cette propriété est équivalente à la suivante : la symétrie par rapport à un point quelconque de l'espace est une transformation *isométrique*, c'est-à-dire laisse invariant le ds^2 de l'espace. [Cartan 1927b 859]

Ce recentrement de l'attention vers les espaces permet l'instauration d'un nouveau jeu théorique : dans une large famille de travaux on voit Cartan croiser les perspectives géométriques (souvent locales) et topologiques globales, imposer des hypothèses de compacité puis les relâcher, faire l'aller-retour entre un groupe de Lie et ses espaces homogènes. S'il fait fond sur sa notion d'espace généralisé, il s'y noue entre groupe et espace une alliance toute autre. On se souvient du modèle exposé en 1923-24 dans l'article sur *Les variétés à connexions affines et la théorie de la relativité généralisée* : déjà le groupe de Lie était le modèle fondamental à partir duquel la notion d'espace généralisé était pensée, mais la saisie des espaces était universellement et implicitement locale, et le groupe de Lie intervenait essentiellement par ses transformations infinitésimales. C'est maintenant d'abord en tant qu'il agit sur son espace sous-jacent qu'il fournit un modèle de structuration spatiale. Il est significatif de voir que, même quand la démarche est locale, les notions premières – ainsi celle de « vecteur » – ne sont pas définies par passage à l'infinitésimal : l'espace des transformations (finies) du groupe comme ensemble de points devient le lieu de croisement des questionnements géométriques et topologiques ainsi que le modèle pour l'étude des espaces associés.

La prise en compte de l'espace du groupe et des aspects globaux des espaces associés ouvre une seconde piste, dans laquelle d'autres propriétés topologiques interviennent que celles du groupe de Poincaré. Cartan aborde la question des nombres de Betti des espaces de groupe clos dans une note aux C.R.A.S. de 1928 [Cartan 1928b] et expose rapidement un premier résultat : dans un tel espace, de dimension r , toute variété qui ne rencontre pas la variété à $r-3$ dimensions lieu des transformations singulières, est réductible à un point par déformation continue ; les deux premiers nombres de Betti sont donc nuls. Il passe ensuite au lien général entre nombres de Betti et invariants intégraux ; la note de 1928 est un peu allusive, mais on trouve les résultats détaillés en 1929 dans le cas, plus général, des espaces homogènes sous

l'action d'un groupe compact : c'est l'article *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces* [Cartan 1929]. Cartan commence par rappeler la définition d'un espace homogène et montre que, si g est le stabilisateur d'un point quelconque et γ l'ensemble des transformations du groupe adjoint correspondant à celles de g , le problème transcendant consistant en la recherche des invariants intégraux (i.e. des formes différentielles invariantes sous l'action du groupe) est entièrement traitable comme un problème algébrique, celui de l'étude des formes extérieures (et non plus différentielles extérieures) invariantes sous l'action de γ . Ces aspects deviennent triviaux si on se place directement sur la variété du groupe. Il n'en va pas de même lorsqu'on cherche à faire le lien avec la topologie, ce qui se fait en deux étapes. Cartan appelle « intégrale de différentielle exacte » les formes différentielles que nous disons fermées et rappelle la définition de l'indépendance de telles formes : h intégrales de différentielles exactes sont indépendantes si aucune combinaison linéaire à coefficients constants non nuls n'est la dérivée extérieure d'une forme de degré moindre ; on définit de même l'équivalence des formes. Lorsque l'espace est homogène sous l'action d'un groupe compact (il est alors *isogène* dans la terminologie introduite par Cartan), le procédé de moyennage hérité de Hurwitz permet à Cartan d'établir le lien entre formes différentielles fermées et invariants intégraux :

D'après le premier théorème, *toute intégrale de différentielle exacte est équivalente à un invariant intégral*. D'après le second théorème *tout invariant intégral équivalent à zéro résulte de la dérivation extérieure d'un invariant intégral de degré moindre d'une unité*. » [Cartan 1929 1093]

Si nous reformulions, nous dirions que Cartan établit que – dans le cas compact – les dimensions des espaces de cohomologie des formes différentielles (si ces espaces sont de dimensions finies) sont celles des \mathbf{R} -espaces vectoriels de formes invariantes, dont on a vu que leur détermination est un problème purement algébrique. Le passage à la topologie nécessite toutefois une deuxième étape pour laquelle Cartan s'appuie sur une conjecture :

Théorème A'. *Etant données h intégrales de différentielles exactes linéairement indépendantes de degré p , on peut trouver h variétés fermées à p dimensions $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(p)}$, telles que le tableau carré des valeurs des h intégrales étendues à ces h variétés ait son déterminant différent de zéro*. [Cartan 1929 1097]

Un tel résultat sur l'accouplement naturel – par intégration – des espaces de cohomologie des formes fermées et d'homologie des sous-variétés permettrait de minorer le nombre de Betti en résolvant le problème algébrique relatif aux invariants intégraux, établissant ainsi pour les

espaces isogènes (en particulier les groupes de Lie compacts) un lien non trivial entre leur topologie et la structure infinitésimale du groupe. Cette conjecture est le point de départ de la thèse de G. de Rham sur *L'Analysis situs des variétés à n dimensions*, soutenue en 1931.⁴⁵

5. Une refonte du cadre théorique (1930).

Il nous semble naturel de clore cette analyse de l'émergence couple local/global chez Elie Cartan sur la monographie qu'il fait paraître en 1930 sur *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs* [Cartan 1930]. Ce travail est bien sûr important en tant que catalogue de résultats globaux sur les groupes de Lie – et dans une certaine mesure sur les espaces homogènes et les espaces riemanniens symétriques – mais ce n'est pas cette variété de résultats qui nous importe ici ; par son *genre* même, la monographie invite à une réorganisation d'ensemble des connaissances, à une mise à plat des concepts, une explicitation des enjeux, une refonte du lexique ... autant d'aspects qui modifient le faciès de la théorie pour les générations ultérieures.

Cinq ans après la conférence de 1925, la préface de la monographie est de nouveau un manifeste pour les questions globales ; après avoir évoqué l'usage de la topologie en théorie des groupes de Lie chez Hurwitz, Weyl, Schreier et Poincaré, Cartan reformule sur un plan plus général ce que ces travaux ont en commun :

Dans tous ces travaux qui, à part ceux relativement récents de H. Weyl et O. Schreier, sont restés isolés, les groupes finis et continus sont étudiés dans leur domaine entier d'existence et non pas seulement, avec S. Lie, au voisinage de la transformation identique : ce sont des études « intégrales » et non « locales ». Le but de ce Fascicule est de passer en revue, en se plaçant au point de vue « intégral », un certain nombre de problèmes fondamentaux que pose la théorie des groupes. [Cartan 1930 1166]

Ceci appelle deux remarques. Premièrement, c'est bien sur le couple local/global que porte le commentaire de Cartan et non plus simplement sur le rôle d'une discipline – l'*Analysis situs* – en théorie des groupes de Lie : l'interaction entre disciplines – qui seule jusque là était commentée par Cartan – est ramenée à une fondamentale dualité de points de vue sur les

⁴⁵ Dans un petit texte sur *Quelques souvenirs des années 1925-1950*, de Rham rapporte : « A côté du Collège où j'enseignais, se trouvait la petite bibliothèque de l'Ecole d'ingénieurs, où je pouvais jeter un coup d'œil sur les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Un jour, *ce fut la chance de ma vie*, je tombai sur la Note d'Elie Cartan, intitulée « Sur les nombres de Betti des espaces de groupe clos », signalant quelques problèmes d'*Analysis situs*, dont il montrait la grande importance, mais qui n'étaient pas résolus. » [Rham 1981 658]

objets de la théorie ; objets qui ont eux-mêmes changé, on le verra. Deuxièmement, pas plus que Hadamard une vingtaine d'années plus tôt Cartan n'utilise le terme « global » ou « *im Grossen* » pour faire couple avec « local » ; dans le même texte on voit Cartan utiliser également « non-local », plus tard l'improbable « en grand »⁴⁶ .

L'objet « groupe de Lie » a aussi profondément changé, et l'apport de Schreier est ici bien net. On se souvient du mode d'introduction qui prévalait depuis Lie : un groupe de transformation était donné par une série d'équations de la forme

$$x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r)$$

déterminant une famille de transformations (i.e. de transformations analytiques (localement) inversibles) des variables (x_i) , stable par composition, transformations elles-mêmes repérées par les paramètres essentiels (a_i) ; le développement de Taylor par rapport aux paramètres faisait apparaître les transformations infinitésimales du groupes, à partir desquelles les transformations finies pouvaient être obtenues par simple intégration. Les trois théorèmes fondamentaux de Lie identifiaient la structure algébrique propre aux transformations infinitésimales et assuraient la transparence de l'aller-retour entre l'infinitésimal et le fini. On est au plus loin de cette présentation lorsqu'on lit les premières lignes du Fascicule de Cartan : la notion première n'est plus celle de transformations d'un espace mais celle de variété. S'inspirant de la *Mengenlehre* de Hausdorff, il définit axiomatiquement :

Nous appellerons variété à n dimensions un ensemble d'éléments ou points tels qu'on puisse définir un système de sous-ensembles, appelés *voisinages*, satisfaisant aux conditions suivantes :

- A. *A chaque voisinage V est associé une correspondance biunivoque déterminée entre les points de V et les points d'une hypersphère Σ de l'espace euclidien à n dimensions. Les points de V qui correspondent à des points intérieurs à Σ seront dits intérieurs à V , les autres constituent la frontière de V .*
- B. *Tout point de la variété est intérieur à au moins un voisinage.*
- C. *Soit V un voisinage quelconque, Σ l'hypersphère qui lui est associée, M un point intérieur à V , m le point correspondant de Σ et σ une hypersphère de centre m intérieure à Σ . Il existe un voisinage V' intérieur à V tel que les correspondants dans Σ de tous les points de V' appartiennent à σ .*
- D. *Soit M un point appartenant à l'intérieur ou à la frontière de V , m son correspondant dans Σ , V' un voisinage contenant M à son intérieur. Il existe une hypersphère σ de*

⁴⁶ Dans la conférence de 1935 sur *La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie* [Cartan 1936].

centre m telle que les correspondants dans V de tous les points de Σ qui appartiennent à σ soient intérieurs à V' .

- E. Etant donnés deux points distincts M et N , on peut trouver deux voisinages ayant respectivement M et N à leur intérieur et n'ayant aucun point commun. [Cartan 1930 1167]

Peu après est ajouté par axiome l'existence d'un recouvrement fini ou dénombrable par des voisinages. Cette définition des variétés topologiques⁴⁷ ouvre un premier chapitre consacré à la notion de groupe topologique. On y retrouve l'essentiel de la présentation de Schreier ; les revêtements y sont en particulier introduits à partir de la distinction de deux types d'isomorphismes de groupes topologiques :

Un groupe G est dit *isomorphe* d'un groupe G' s'il est possible de faire correspondre à un élément de G' un élément déterminé de G de telle sorte que si A', B', C' sont trois éléments de G' satisfaisant à $A'B' = C'$, les trois éléments correspondants A, B, C de G satisfassent à $AB = C$. [Cartan 1930 1175]

On voit Cartan conserver le vocabulaire ancien – « isomorphisme » pour ce que nous nommons « homomorphisme » – pour distinguer ensuite les isomorphismes holoédriques et méridriques. L'essentiel tient toutefois dans l'introduction de la notion cousine :

Deux groupes finis et continus de même ordre G et G' sont dit *localement isomorphes* si l'on peut établir une correspondance biunivoque continue entre les éléments d'un voisinage V_0 de G contenant à son intérieur l'élément unité et ceux d'un voisinage V'_0 de G' contenant à son intérieur l'élément unité, cette correspondance satisfaisant à la condition que si A, B et C sont trois éléments de V_0 tels que $AB = C$, les éléments correspondants de V'_0 satisfassent à $A'B' = C'$. [Cartan 1930 1175]

Le passage aux revêtements est introduit par le théorème suivant : si G est simplement connexe, tout isomorphisme local entre G et G' se prolonge de manière univoque en un isomorphisme entre les deux. C'est seulement dans un deuxième chapitre que l'on passe des groupes topologiques aux groupes de Lie :

Nous dirons qu'un groupe abstrait fini et continu est un *groupe de Lie* si l'on peut trouver, dans un voisinage suffisamment petit V_0 de l'élément unité, un système de coordonnées ou paramètres (réels) a_1, a_2, \dots, a_r tels que les paramètres c_i de l'élément $C = AB$ résultant de la multiplication de l'élément A de paramètres a_i par l'élément B de paramètres b_i s'exprime par des fonctions

⁴⁷ Nous nous autorisons ce terme qui n'apparaît pas sous la plume de Cartan.

$$c_i = \varphi_i(a, b)$$

admettant des dérivées partielles continues des deux premiers ordres. [Cartan 1930 1179]

La structure différentielle sur la variété est installée implicitement à l'occasion de la formulation de l'hypothèse de différentiabilité de la multiplication. On est toutefois au plus loin de la formulation traditionnelle. Dans la période 1925-1930, on avait vu Cartan s'écarter de cette présentation traditionnelle en minorant le rôle de l'espace des variables transformées (x_i) et en mettant au centre de l'étude l'espace du groupe ; toutefois, les études étaient parfois implicitement locales, et les travaux globaux ne s'appuyaient pas sur une mise en place précise des objets. Cartan utilisait encore souvent une notion d'isomorphisme fondée sur l'isomorphisme des algèbres de Lie. Schreier lui fournit en 1930 les formulations permettant une rupture avec le schéma hérité de Lie et le renversement des priorités entre objets est achevé : on introduit d'abord les espaces (variétés), sur lesquels peuvent ensuite exister des structures de groupe, qui peuvent en outre être différentiables (auxquels cas on peut introduire les transformations infinitésimales), ces groupes peuvent enfin agir sur des espaces autres qu'eux-mêmes.

Un troisième et dernier aspect nous semble significatif de cette reconstruction autour du couple local/non-local, c'est l'effet de relecture de l'histoire de la théorie. Il est particulièrement visible dans le cas du troisième théorème fondamental de Lie, dont Cartan choisit dès sa préface de faire un exemple illustrant l'importance de la distinction entre point de vue « local » et « intégral » :

Dans la théorie même des groupes de Lie, signalons l'insuffisance des démonstrations ordinaires du troisième théorème fondamental qui ne prouve l'existence, un système de constantes c_{ijk} étant donné, que d'un *morceau de groupe*, incapable peut-être de se prolonger pour former un groupe complet. [Cartan 1930 1166]

Dans le texte même Cartan analyse avec beaucoup de pédagogie l'origine de cette « insuffisance ». Il commence par résumer la démonstration usuelle : les relations entre les constantes de structure c_{ijk} garantissent l'intégrabilité du système de Pfaff déterminant les transformations finies agissant sur des variables u_i . Il y pointe ensuite une double insuffisance :

Les ω_i sont des formes linéaires en du_1, du_2, \dots, du_r dont les coefficients sont des fonctions *analytiques entières* des variables u_i , mais le déterminant des coefficients des du_i n'est différent de zéro que dans un certain voisinage de l'origine $u_i = 0$. De plus le déterminant serait-il partout différent de zéro, cela ne suffirait pas pour assurer

l'existence de transformations finies du groupe valable dans tout l'espace des u_i .
[Cartan 1930 1181]

Double insuffisance qui conduit à une reformulation doublement locale du résultat usuel :

On a donc démontré en définitive l'existence d'un ensemble de transformations définies pour des valeurs suffisamment petites des paramètres, dans une région suffisamment petites de l'espace euclidien des u_i , et le produit de deux transformations de l'ensemble, dans le cas où ce produit est défini dans la région considérée, appartient encore à l'ensemble. On a obtenu en somme un morceau de groupe opérant dans un morceau d'espace. [Cartan 1930 1181]

Cartan explique ensuite que, des trois démonstrations données par Lie de son troisième théorème fondamental, la première est la meilleure, qui s'appuie sur le groupe adjoint. Lorsque le groupe est simple ou semi-simple, l'algèbre de Lie est celle d'un morceau de groupe *linéaire* qui peut alors se prolonger sans problème en un groupe. On notera que, dans sa relecture de l'énoncé et des démonstrations du troisième théorème fondamental de Lie, Cartan dénonce une insuffisance, une *erreur* de raisonnement : pas plus que Hadamard il n'interprète la prise en compte explicite du couple local/global comme un simple changement de point de vue, une évolution des conventions d'écriture et de lecture des mathématiques. Quoiqu'il en pense, Cartan n'écrit pas que Lie savait bien que ses théorèmes étaient purement locaux et qu'il ne faisait qu'écrire à l'ancienne manière, selon des conventions qu'il est souhaitable de faire évoluer aux vues de la récente moisson de résultats globaux.