Deuxième partie : évolution des cadres fondamentaux de l'Analyse.

Introduction.

Nous voudrions dans ce chapitre aborder la même période, dernier tiers du 19e siècle, en parcourant toutefois un autre corpus de textes et en changeant sensiblement le mode d'exposition.

Les auteurs que nous étudiions dans les chapitres précédents développent des théories globales, avec une palette de problèmes et d'outils déjà large. Mais ces problèmes et ces outils demeurent chacun largement dépendants de leur contexte propre, sans qu'une catégorie générale de « problèmes globaux » ou « problèmes de passages du local au global » ne soit clairement identifiée. Toutefois, une catégorie « interaction entre *Analysis situs* et Analyse » est, elle, clairement présente tout au long de la période, recouvrant la plupart des travaux globaux que nous présentions – pas toutefois la famille « Cousin » –, et il faudra expliquer en quoi elle diffère plus que par la simple formulation de la saisie des problèmes en termes de local/global. Sur un autre plan, une vaste gamme de *pratiques du lieu* se diversifie et, dans certains contextes, se stabilise : parcours, coupures, recollement bord à bord, recouvrement et recollement avec empiètement[1], décomposition simpliciale[2], procédés de dépliement d'un espace de base[3], transport vers un modèle local plus « naturel »[4], approximation par des compacts[5] etc. Cette variété de pratiques du lieu se détache toutefois sur fond d'une écriture des mathématiques qui laisse au lecteur du 21e siècle une impression d'étrangeté, par opposition à l'impression de familiarité à la lecture, par exemple, de l'*Idée de surface de Riemann* de Weyl [Weyl 1913]. En quelques années, ce passage à une écriture ensembliste – qu'il faudra bien sûr caractériser – est contemporain de l'émergence explicite d'une grille de lecture construite autour du couple local/global : la 3ème partie y sera consacrée. C'est pour l'heure une certaine évolution du mode d'écriture de l'Analyse qu'il s'agit de décrire, à la fois dans son *mode de référence* au lieu et dans la montée d'une *obligation de référence* au lieu. Le mouvement qui la porte, pour n'en être pas indépendant, n'est pas ce mouvement de

[1] Dans les méthodes de Schwarz et Neumann en théorie du potentiel, dans les théorèmes de la famille « Cousin »
[2] chez Poincaré dans les premiers travaux qualitatifs sur les équations différentielles et, en un certain sens, chez Neumann.
[3] par coupure et dépliement chez Riemann en 1857 puis chez Poincaré et Klein ([Poincaré 1884], [Klein 1883]), par considération de l'espace des classes d'homotopie (à extrémités fixes) de chemins chez Poincaré [Poincaré 1883a], par recollement de disques chez Poincaré en 1907 [Poincaré 1907].
[4] Démarche explicitée par Neumann

dévoilement de la *pertinence* du lieu que nous observions dans les chapitres précédents, en théorie des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes. Porté par ses problématiques spécifiques, son rythme et ses modalités en diffèrent ; une enquête historique d'une autre nature est appelée par cette évolution plus discrète que celle des grands théorèmes ou des vastes constructions innovantes, une évolution qui procède pas à pas par la mise en place de *structures syntaxiques* de plus en plus complexes et de *canons* d'écriture. Cette évolution du mode et de l'obligation de référence au lieu forme l'arrière plan, la condition historique d'apparition explicite du couple local/global, aussi bien dans sa version syntaxique que sous l'angle thématique de la légalité primitive du lieu.

Cette évolution des modes d'écritures est bien entendu, elle aussi, accompagnée par des développements théoriques, l'apparition de nouveaux concepts ou la démonstration de nouveaux théorèmes. On notait, en suivant la citation introductive de Morse, que le sens du couple local/global se transmet dans des lignées d'exemples dont un grand nombre relève de l'Analyse réelle élémentaire et non l'Analyse complexe ou de la théorie des fonctions sur une variété. Ainsi un étudiant est-il aujourd'hui, assez tôt dans sa scolarité, confronté à des théorèmes locaux d'existence comme le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles ordinaires, ou le théorème des fonctions implicites – dans sa version « fonctions implicites » ou « inversion locale ». On l'amène rapidement à distinguer entre la continuité et la continuité uniforme, entre la convergence simple d'une suite de fonctions et sa convergence uniforme, et l'on devine dans la citation d'Osgood donnée dans l'introduction l'importance de ce concept d'uniformité dans la formulation de la notion syntaxique du global. Un étudiant se voit démontré qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné y est uniformément continue mais – et c'est bien plus élémentaire – y admet aussi un maximum et un minimum, résultats qui peuvent permettre de faire sentir ce que la nature de l'espace, ici un intervalle fermé borné, impose aux fonctions qui y « vivent » ; résultats qui peuvent donc servir à faire émerger le thème de la légalité du lieu, dans un cadre de topologie ensembliste bien plus élémentaire que celui de la topologie algébrique. On voit que l'enquête historique doit s'élargir à l'analyse *réelle*, qui fournit des exemples nombreux, et des exemples élémentaires au sens où ils sont rencontrés tôt dans une formation mathématique post-weierstrassienne qui se met en place, si du moins l'on se fie dans un premier temps à la publication de manuels, dans la période 1880-1900, avec Dini, Genocchi-Peano, Jordan, Tannery, Stolz ou Osgood. Cet assemblage d'éléments théoriques de natures différentes –

[5] Chez Schwarz, par exemple. En un sens aussi chez Poincaré dans [Poincaré 1883a] et dans la méthode de continuité. L'usage du terme « compact » est bien entendu ici un anachronisme.

théorèmes locaux d'existence, notion d'uniformité, rôle des fermés bornés – est solidaire d'un mode d'écriture dans lequel la structure syntaxique

La fonction est [*propriété*] sur [*domaine*]

est à la fois fondamentale et obligatoire. On voit ainsi le même mouvement porter à la fois l'émergence des concepts et l'évolution des modes d'écriture ; il est aussi porteur, à un troisième niveau, d'une redéfinition des notions fondamentales des mathématiques : grandeur, ensemble, fonction, continu, espace. Soulignons que si l'enquête nous amène à rencontrer ces notions primitives, de même qu'elle nous conduit à fréquenter les textes que l'historiographie a regroupés dès la fin du 19e siècle dans le corpus des textes pertinents pour l'histoire des *fondements* de l'Analyse ou de la rigueur en Analyse, ce ne sont toutefois ni l'épistémologie de ces notions primitives ni les questions de fondement et de rigueur qui nous y conduisent.

Une autre raison nous fait tourner le regard vers le domaine réel, que nous exposons en mettant provisoirement entre parenthèses les questions d'histoire. Nous voulons dans cette deuxième partie étudier la distinction progressive chez les auteurs du dernier tiers du 19e siècle entre quatre niveaux de description des fonctions : *ponctuel, infinitésimal, local, global*. Donnons un exemple simple de chacun, pour une fonction f définie sur **R** : $f(2)$ est positive (propriété ponctuelle), $f'(2) = 0$ (propriété infinitésimale de f), f est continue en 2 (propriété locale), f est positive (propriété globale, avec élision du complément « sur **R** » permise par la déclaration préalable du domaine de définition). Il est malaisé de dépasser le stade des exemples pour chercher à donner des caractérisations abstraites ; bien que ce ne soit pas ici notre objectif, donnons quelques éléments simples qui nous serviront dans l'analyse historique. On peut caractériser abstraitement les propriétés ponctuelles et locales en utilisant une même idée : une propriété de f est ponctuelle en 2 si toute fonction g définie en 2 et telle que $f(2) = g(2)$ la possède également (stabilité par coïncidence ponctuelle) ; une propriété de f est locale en 2 si elle est une propriété du germe[6] de f en 2, autrement dit si elle est aussi possédée par toute fonction coïncidant avec f sur un voisinage de 2. En utilisant ce critère, on voit que les propriétés ponctuelles et infinitésimales sont aussi locales. Il est toutefois plus aisé de distinguer le ponctuel du local que l'infinitésimal du local ; on se contentera ici de dire que la propriété infinitésimale nécessite des hypothèses de dérivabilité, ou que, si l'on travaille sur une variété différentiable, elle nécessite pour être énoncée proprement le passage

[6] Rappelons la définition de cette notion que nous aurons à rencontrer plus d'une fois : soit x un élément d'un espace topologique E, notons X l'ensemble des couples (U,f) où U est un voisinage de f et f une fonction d'un type donné (quelconque, continue, analytique, rationnelle etc. selon les structures sur E) définie sur U. On dit que deux éléments (U,f) et (V,g) de X sont équivalents s'il existe un voisinage de x contenu dans $U \cap V$ sur lequel

à un autre espace que la variété sur laquelle la fonction primitive est étudiée, à un fibré tangent ou un fibré associé au fibré tangent ; à un espace de jets, si l'on dépasse le premier ordre. Si l'on cherchait à caractériser les propriétés globales par un critère du type « coïncidence sur » on n'obtiendrait qu'une condition triviale. Il semble qu'on pourrait caractériser syntaxiquement le niveau global par ceci que l'énoncé ne contient pas de désignation de point, par opposition au caractère *syntaxiquement ponctuel* commun aux énoncés des trois autres niveaux, mais cette approche syntaxique se révèle vite insuffisante. Ainsi, « être positive sur **R** » c'est être positif en chaque point de la droite réelle : propriété ponctuelle affirmée universellement. De plus, tous les énoncés globaux ne sont pas de ce type, ainsi « être bornée sur **R** » est-elle une propriété globale qui n'est pas simplement l'affirmation universelle d'une propriété d'un des trois autres niveaux, on le voit dans l'ordre des quantificateurs si on l'écrit formellement ; on sent d'ailleurs bien qu'« être borné » est une propriété *plus* globale qu'« être positive »[7], de même qu'« être uniformément continue » semble plus globale qu'« être continue » (qui n'est que l'affirmation universelle de la propriété locale de continuité en un point).

A quoi nous servent ces semi-caractérisations et ces ébauches de distinctions ? Premièrement, si elles n'épuisent pas la question de la distinction entre ces niveaux – objectif bien ambitieux, elles suffisent à entrer dans la question, quitte à raffiner ou modifier la grille d'analyse lorsque l'occasion s'en fait sentir. Deuxièmement, on verra ces distinctions émerger explicitement sous la plumes des nos auteurs dans la troisième partie : distinction entre *im Kleinen* et *im Grossen* chez Osgood et Weyl ; distinction entre l'infinitésimal, le local et le dépassement du local chez Hadamard. Il convient donc de chercher à repérer les conditions d'explicitation de ces différences de niveau, à comprendre en particulier en quoi ce découpage ne correspond pas à la pratique de l'Analyse pré-weierstrassienne qui est celle de Riemann, Poincaré ou Klein. Enfin ces distinctions nous permettent dans un premier temps de revenir sur la mise entre parenthèses du domaine analytique complexe au profit du domaine réel et non analytique. Lorsqu'on ne considère que des fonctions analytiques complexes, les différents niveaux entretiennent des relations si étroites que la théorie n'invite pas à l'explicitation de ces distinctions là. En un sens, toutes les propriétés d'une fonction analytique sont globales : la coïncidence locale de deux fonctions analytiques implique l'égalité globale (on suppose le domaine connexe), la connaissance de toutes les dérivées en un point (exhaustivité

---

f et g coïncident. Un germe de fonction (quelconque, continue, analytique, rationnelle etc.) en x est une classe d'équivalence pour cette relation.

[7] Ces distinctions ne sont pas absolues . Il suffit d'expliciter une constante pour glisser de l'un à l'autre, puisque « être positive » c'est, pour une fonction, être minorée par 0.

infinitésimale) détermine la fonction localement, donc globalement. Le lien entre les valeurs est si étroit qu'il conduisait Riemann à rejeter l'entrée par le ponctuel : on se souvient qu'il s'appuyait sur l'existence de la représentation intégrale d'une fonction harmonique dans un disque pour montrer qu'il est redondant d'aborder une telle fonction comme collection de valeurs associées aux états de la variable. D'autres spécificités invitent à des découpages entre niveaux qui ne sont pas ceux qui s'imposeront dans la réflexion sur la fonction réelle arbitraire. Ainsi, à un point du domaine où une fonction d'une variable complexe est analytique est associée un domaine naturel, le disque de convergence de la série représentant l'élément de fonction : non seulement la liste des valeurs des dérivées successives en ce point détermine-t-elle une écriture valable au voisinage de ce point (passage de l'infinitésimal au local) mais ce local est saisi par *un* domaine particulier et privilégié ; on verra la difficulté que nos auteurs auront, au contraire, lorsqu'il s'agira de préciser la notion de « voisinage » ou le sens de l'expression « au voisinage » dans le cas non-analytique, où la notion de voisinage contient un élément d'arbitraire étranger à celle de disque de convergence. On devine ce que le modèle analytique du passage de l'infiniment petit à un domaine fini privilégié peut suggérer de fausses pistes, d'indistinction entre l'infinitésimal et le local, de difficulté à saisir ce qui dans le local est indéterminé sans être infiniment petit. Par ailleurs, à un élément de fonction analytique (une série entière de rayon de convergence non nul) est naturellement associée une fonction et un domaine : la fonction résulte du prolongement analytique maximal de l'élément, le domaine est le domaine d'holomorphie. Non que ce domaine ne joue aucun rôle pour nos auteurs, bien au contraire : la manière dont il recouvre le plan une ou plusieurs fois, dont il peut être parcouru et découpé, sont essentiels à cette première forme privilégiée d'étude globale qu'est celle du *Gesamtverlauf*, du cours d'ensemble ; mais ce domaine est un horizon, peu propice à des énoncés syntaxiquement globaux. Cette existence d'un unique prolongement maximal d'un élément n'invite pas non plus à la création d'une catégorie autonome de « théorèmes locaux d'existence », pourtant si essentielle à la formation de celle des « problèmes de passage du local au global ». On observe donc chez les auteurs que nous lisions jusqu'ici la superposition de deux éléments : d'une part, une Analyse pré-ensembliste – nous adapterons l'expression de M. Epple en parlant de *monde de la grandeur* [Epple 2003] –, d'autre part un travail centré sur les fonctions analytiques d'une variable complexe. Si l'attention aux fonctions analytiques invite à la considération de problèmes syntaxiquement globaux (en particulier le *Zusammenhangszahl* du domaine d'étude) ; si le monde de la grandeur, on le verra, offre des ressources spécifiques permettant d'aborder ces problèmes, l'un et l'autre s'inscrivent dans des cadres et invitent à des distinctions de niveaux qui ne sont pas ponctuel / infinitésimal / local / global. On peut à ce propos citer Poincaré, qui tire, dans son éloge funèbre de Weierstrass, un petit bilan du mouvement de conquête de « rigueur » en Analyse :

> Aujourd'hui (…) on distingue deux domaines, l'un sans limite, l'autre plus restreint, mais mieux cultivé. Le premier est celui de la fonction en général, le second celui de la fonction analytique. Dans le premier, toutes les fantaisies sont permises et à chaque instant nos habitudes sont heurtées et nos associations d'idées rompues ; nous apprenons ainsi à nous défier de certains raisonnements par à peu près qui paraissaient convaincants à nos pères ; à nous abstenir de certaines conclusions qui leur auraient paru légitimes. Dans le second, au contraire, ces conclusions sont permises ; mais *nous savons pourquoi* ; [Poincaré 1899c 5]

Nous voudrions, dans cette partie, saisir plus précisément la manière dont s'opère cette cassure des solidarités implicites, cette forme de fin des évidences qui permet la distinction explicite de nos quatre niveaux et fait émerger des éléments thématiques et *méta*, tel que local/global, différents de ceux des « pères ».

Chapitre 4. Une sonde : évolution de la notion de maximum.

I. Maximum local, maximum global.

1. En 2007.

Pour marquer le contraste et justifier le choix de cette « sonde », on peut commencer par présenter la manière dont la notion de maximum est introduite de nos jours aux lycéens français. Le maximum d'une fonction est défini comme la plus grande des images, idée assez simple dans sa formulation en langue naturelle, mais dont l'écriture formalisée est déjà d'une assez grande complexité, par exemple :

« *Soit f une fonction définie sur un domaine D. Le nombre réel M est le maximum de f si les deux conditions sont vérifiées :*

1. *il existe x_0 dans D tel que $f(x_0) = M$*
2. *pour tout nombre x de D, $f(x) \leq M$* »

qu'on peut raccourcir en une formulation équivalente du point de vue mathématique mais pas du point de vue didactique :

« *Soit f une fonction définie sur un domaine D. Le nombre $f(x_0)$, où x_0 est un élément de D, est le maximum de f si pour tout nombre x de D, $f(x) \leq f(x_0)$* »

Ces définitions sont élémentaires au sens où elles n'utilisent aucune connaissance sur les fonctions, aucune technique particulière, mais seulement les éléments de base du monde fonctionnel : domaine de définition déclaré obligatoirement (qui peut ensuite être omis pour devenir référent de lieu implicite) ou domaine d'étude, élément du domaine, image d'un élément, fonction abstraite (sous-entendue univoque) comme objet-relation, distinction syntaxique entre la fonction f et le nombre $f(x_0)$… autant d'éléments si généraux, abstraits et quasiment vides qu'ils semblent ne former qu'un vocabulaire, vocabulaire dans lequel la définition du maximum est l'une des premières formulables qui possède un réel contenu sémantique, qui « dit vraiment quelque chose de la fonction ». Elémentaires aussi, ces définitions, en ceci qu'elles ne font jouer que les niveaux ponctuels et globaux. La propriété n'est toutefois pas trivialement globale, comme celles qui résultent de l'affirmation universelle d'une propriété ponctuelle (du type « être positive »).

Lorsque les élèves découvrent le calcul différentiel, la notion de maximum local est introduite, sans d'ailleurs qu'en général la notion élémentaire ait été explicitement qualifiée de globale. On peut envisager différentes formulations :

« *Soit f définie sur un domaine D. On dit que f admet un maximum local en* x_0 *s'il existe un réel strictement positif* δ *tel que*

1. $]x_0-\delta\,; x_0+\delta[\subset D$
2. $\forall x \in]x_0-\delta\,; x_0+\delta[\quad f(x) \leq f(x_0)$ »

Cette première formulation est la plus explicite, ne reprend pas le terme de maximum, n'introduit pas le terme de voisinage : c'est par l'apparition du nombre δ que cette définition diffère de celle du maximum. Autre formulation :

« *Soit* x_0 *un élément d'un domaine D. Une partie de D de la forme* $]\, x_0-\delta\,; x_0+\delta[$, *où* δ *est un réel strictement positif, s'appelle un voisinage de* x_0. *On dit que f a un maximum local en* x_0 *si elle a un maximum sur un voisinage de* x_0. »

Cette deuxième formulation a l'avantage de donner un exemple du procédé syntaxique de *localisation* d'une propriété globale. Le schéma en est le suivant : si P(*f*,D) désigne une propriété P d'une fonction *f* sur un domaine D, la propriété locale associée est $P_{loc}(f,x_0)$ = « il existe un voisinage V de x_0 sur lequel P(*f*,V) » [8]. Ce schéma syntaxique de localisation permet, au cours de la scolarité, de former « localement croissant », « localement borné », « localement intégrable » etc., permettant de construire une famille de propriétés locales et, en même temps, de donner un sens à l'adjectif « local ». Cette localisation est loin d'être transparente, même dans le cas du couple « maximum sur » / « maximum local en ». Ainsi, on pourrait croire qu'un maximum local est un type de maximum, que parmi les maximums [9] certains sont locaux et d'autres pas, que l'adjectif « local » permet de sélectionner certains maximums comme dans « vélo bleu » l'adjectif « bleu » permet de sélectionner certains vélos. Un élève interprétant ainsi l'ajout de l'adjectif « local » ferait bien sûr une erreur : un maximum local n'est pas en général un maximum, et une fonction peut avoir un maximum local sans avoir même de maximum. Si l'adjectif « local » semble, grammaticalement, qualifier le nom « maximum », il en va en fait autrement : « local » est un élément *méta* renvoyant à la transformation syntaxique par localisation. Autre difficulté : non seulement un maximum local n'est pas en général un maximum, mais réciproquement, le maximum, s'il existe, n'est pas toujours un maximum local ! Le jeu est ici différent : il ne s'agit pas du rôle

[8] En toute rigueur $P(f_{|V}, V)$. Pour ne pas alourdir l'exposé nous laisserons implicites certaines opérations de restriction.

[9] Nous suivrons l'usage scolaire actuel en préférant « maximums » à « maxima ».

des éléments *méta* dans le texte mathématique, mais des propriétés topologiques des domaines, par exemple de la distinction entre point intérieur et point au bord. On pourrait enfin envisager, pour la définition du maximum local, la formulation plus elliptique :

« *f admet un maximum local en x_0 si $f(x_0)$ est un maximum au voisinage de x_0* ».

Cette troisième formulation peut-être vue comme une reprise moins formalisée de la deuxième, elle ne peut toutefois être donnée comme définition du fait de l'imprécision de l'expression « au voisinage », à moins qu'il n'ait été préalablement stipulé que « au voisinage de x_0 » n'est pas une simple métaphore mais un élément auquel est substituable « sur un domaine de la forme $]x_0-\delta\ ;\ x_0+\delta[$, où δ est un réel strictement positif » [10]. L'intérêt de cette dernière formulation réside justement dans le fait que, pour un mathématicien, « au voisinage » possède *à la fois* un sens métaphorique et un sens précis résultant de la possibilité de substitution par « sur un voisinage », le terme « voisinage » ayant dans « sur un voisinage » un sens technique qu'il n'avait pas dans « au voisinage ». Mais cet équivalent technique du « au voisinage » n'en est pas une simple explicitation, il s'en faut de beaucoup. Ainsi peut-on penser que le « au voisinage » en tant que métaphore comprend, entre autres constituants sémantiques, les éléments « petit » et « indéterminé » : être au voisinage c'est n'être pas trop loin, mais pas à une distance déterminée. Le passage à « un voisinage » ne reprend pas l'élément de petitesse et entre en conflit apparent avec l'élément d'indétermination par son emploi du « un ». On verra ces éléments sémantiques jouer un rôle dans l'histoire de la notion de voisinage.

Dans l'enseignement secondaire actuel, les deux notions de maximum, local et global, ne sont donc pas présentées séparément, ce que la subtilité de leurs liens pourrait inviter à faire dans le but d'éviter une série d'erreurs et de confusions ; la notion globale est non seulement chronologiquement première, elle est aussi primitive puisque la notion locale en est dérivée par localisation. C'est là la première occasion de rencontre des élèves avec ce procédé ainsi qu'avec le terme « local ». Cette primitive simplicité de la notion de maximum (global) dépend elle-même d'une structuration ensembliste de l'univers fonctionnel qu'on sait spécifique du 20e siècle, dans ses versions savantes puis scolaires. Au delà des définitions et du langage théorique dans lequel les formuler, ces notions renvoient à des théorèmes ou des familles de problèmes, ce que les didacticiens nomment leur *écologie*. Ainsi la notion d'extrémum local n'est-elle actuellement introduite qu'à l'occasion des premières applications

[10] sans parler de « il existe un domaine contenu dans le domaine de définition et contenant un intervalle du type $]x_0-\delta\ ;\ x_0+\delta[$ ». Dans la suite de l'exposé nous utiliserons en général le terme de voisinage pour désigner les éléments d'une base de voisinages privilégiée par le contexte ; dans le cas réel, les intervalles ouverts.

du calcul différentiel, lorsqu'on doit mettre un mot sur ce qui se passe lorsque la fonction dérivée s'annule en changeant de signe. Le maximum global est rencontré dans de nombreux problèmes d'optimisation, qu'ils soient présentés abstraitement ou contextualisés, mais ne renvoie à aucun théorème général : le théorème selon lequel une fonction continue sur un intervalle fermé et borné a un maximum était enseigné (mais admis sans démonstration) en classe de Terminale scientifique jusqu'au début des années 1990, il a depuis quitté les programmes du Secondaire.

Il n'est pas ici question d'une étude complète des mouvements dans l'histoire des mathématiques et de leur enseignement aboutissant aux spécificités de la situation scolaire actuelle. La présentation assez détaillée de cette situation avait pour objectif d'expliciter certaines articulations, d'attirer l'attention sur certains points délicats ; d'informer, donc, la curiosité historique. Les questions de maximum nous semblent fournir une petite sonde intéressante à lancer pour au moins deux raisons. Premièrement, elle réalise l'objectif de changement de corpus et d'angle, permettant le parcours des traités d'Analyse dans leur exposé des notions les plus communes ; ni la pointe de la recherche, ni les débats sur les fondements : la banalité même, ce qui va sans dire (ou presque). Deuxièmement, elle permet d'étudier un point particulier d'articulation entre des notions locales et globales et, plus généralement, l'évolution du langage de l'Analyse et de ses modes de référence au lieu. Nous commencerons par une étude lexicale en suivant les usages du terme « maximum » dans une série de grands traités, de celui de Lacroix dans les premières années du 19e siècle à ceux de Jordan et Stolz dans les années 1890. Nous étudierons ensuite le contexte d'émergence, de formulation et de réception du théorème de Weierstrass affirmant l'existence d'un maximum pour une fonction numérique continue sur un intervalle fermé et borné (ou, plus généralement, sur une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^n$) [11]; le jeu consistera bien sûr à lire les formulations et reformulations en feignant d'oublier ce que nous « savons » que ce théorème dit. Les questions de maximum étant un moyen et non une fin, nous nous permettrons des digressions sur certains points importants d'évolution du mode d'appréhension du monde fonctionnel que ce fil rouge nous amène à rencontrer, aussi bien au niveau du style – en opposant par exemple un style narratif à un style ensembliste, qu'au niveau conceptuel, en insistant en particulier sur la co-évolution des notions de fonction et de continuité.

[11] Dans ce chapitre, c'est à ce résultat que renverront les expressions « théorème de Weierstrass » ou « théorème du maximum ».

2 Le terme « maximum » au 19e siècle.

i. Une saisie narrative.

On peut partir du *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* de Lacroix qui, dans les premières années du 19ème siècle, introduit le terme « maximum » dans un passage que nous citons un peu longuement pour en montrer le contexte et le style. Le paragraphe intitulé « Recherche des points singuliers des courbes, et examen des valeurs particulières que les coefficients différentiels prennent dans ces cas » commence ainsi :

> On appelle *points singuliers* d'une courbe ceux dans lesquels elle offre quelque circonstance remarquable. (…) La première question qui se présente est la détermination de la marche de la valeur des ordonnées y, pour savoir si elles croissent ou décroissent indéfiniment, ou bien si leur accroissement s'arrête lorsqu'elles ont atteint un certain degré de grandeur, et se change en décroissement, ou bien enfin, si après avoir atteint un certain degré de petitesse, leur décroissement se change en accroissement. La valeur qui a lieu dans le passage de l'accroissement au décroissement, étant plus grande que celles qui la précèdent et la suivent immédiatement, s'appelle un *maximum* ; (…) je dis immédiatement, parce qu'il y a des fonctions pour lesquelles ces alternatives ont lieu plusieurs fois. [Lacroix 1867 96]

Si l'on devait utiliser le couple local/global il s'agirait ici de la définition d'un maximum local. Il pourrait d'ailleurs difficilement en être autrement dans un contexte où les fonctions ne sont pas associées à des domaines, de définition ou d'étude. On note ensuite que cette définition intervient assez tardivement (p.96) dans un manuel dont la première partie est consacrée aux règles de dérivation de fonctions données par des expressions. La notion de maximum intervient, et sa simplicité en fait la première à intervenir, lorsque le point de vue sur les fonctions change : on ne les étudie plus comme des expressions à manipuler mais comme des objets associées à des courbes, des objets prenant des valeurs ; les registres géométrique et numérique sont introduits de concert pour pouvoir parler de singularité, point singulier ou valeur singulière. Le travail algébrique de la première partie, au contraire, procèdait indépendamment de toute valeur particulière – que le comportement y soit ordinaire ou singulier –, on y est, en un sens, indifférent aux valeurs. Le repérage des maximums par l'annulation (avec passage du positif au négatif) de la dérivée relève moins de la théorie générale des fonctions que de l'application du calcul différentiel à la géométrie ; il est du moins la première chose que l'on remarque lorsqu'on porte sur les fonctions un regard géométrique. Ce changement de point de vue et de registres (géométrique et numérique) relève d'une dialectique du général et du singulier : l'ancien registre ne traitait que du général (des grandeurs, donc, en tant que lettres entretenant des relations littérales), les nouveaux registres permettent de désigner le particulier dans le cas du singulier.

Ce changement de registre s'accompagne très nettement du passage à un *style narratif* : le texte expose moins des propriétés définies formellement qu'il ne raconte les « aventures de la fonction », le récit de ses différentes péripéties compréhensibles par un lecteur qui est invité soit à imaginer des variations numériques soit à suivre une courbe des yeux ; le terme de « marche des valeurs » s'inscrit, on le verra, dans la famille où il côtoie en français « le cours [de la fonction, des valeurs] » et en allemand « *Verlauf* ». Le maximum, comme tout point singulier, est avant tout un *événement*, une « circonstance remarquable », quelque chose qui « a lieu ». La dicibilité nouvelle du particulier dans les registres numérique et géométrique permet des énoncés « locaux » au sens suivant : non seulement l'énoncé fait référence à un point ou une valeur particulière (aspect syntaxiquement ponctuel), mais il renvoie à quelque chose qui se passe – événement – *quelque part* ; le lieu est un attribut (essentiel) de l'événement. Cet attribut essentiel est d'ailleurs autant lieu que moment – dualité permise par les registres numérique (appréhendé temporellement sous l'angle de la variation) et géométrique – et les métaphores du texte sont inextricablement temporelles et spatiales ; qu'on pense aux sens de l'adverbe « immédiatement ».

Un dernier point mérite commentaire. Le maximum sépare une plage de croissance d'une plage de décroissance, on dirait en termes modernes que la fonction est implicitement supposée monotone par intervalles. Mais surtout, puisqu'il est une circonstance exceptionnelle, il doit séparer des plages de comportement régulier et général : il n'y a pas un « théorème de Lacroix » établissant qu'un maximum est nécessairement isolé, il n'y a qu'une conséquence du mode de saisie du maximum comme singularité. Le comportement régulier et général demande des plages continues, et c'est la connexité de ces plages qui traduit l'idée de généralité, sans qu'aucune extension particulière n'ait à être évoquée, d'où l'impression que nous avons de lire des énoncés locaux à notre sens ; parallèlement, le comportement singulier ne peut que séparer deux telles plages qui l'entourent et l'isolent. On peut rapprocher ce mode d'appréhension du général et du particulier/singulier d'un autre trait général : même si l'on ne peut ici constituer le dossier documentaire appuyant cette affirmation, on voit les auteurs du premier 19^{e} siècle considérer que les fonctions sont à peu près tout ce qu'on veut « par intervalles » ou « par morceaux », et ce mode d'exploration de l'univers fonctionnel est aussi une convention de lecture. Ainsi lorsqu'Ampère, dans son célèbre Mémoire de 1806 intitulé

Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à l'expression finie des termes que l'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque, annonce, après avoir défini la notion de fonction dérivée, que son « premier but sera d'en démontrer l'existence » [Ampère 1806 149] **;** il faut savoir entendre ce terme d'« existence ». Les premières lignes de ce Mémoire sont justement consacrées à cette notion d'existence :

> Toute fonction de deux variables *x* et *i*, se change, lorsqu'on donne à *i* une valeur déterminée, en une fonction de *x*, à moins qu'elle ne prenne alors une valeur infinie ou nulle pour toutes les valeurs de *x*.
>
> Je dis pour toutes les valeurs de *x*, car si cette fonction ne devenait nulle ou infinie quand on donne à *i* cette valeur déterminée, que pour certaines valeurs de *x*, ce n'en serait pas moins une fonction de *x*, seulement cette fonction deviendrait nulle ou infinie pour ces valeurs de *x*. [Ampère 1806 148**]**

On voit ici Ampère changer de regard sur la fonction : la « fonction de deux variables *x* et *i* » est encore une expression en deux grandeurs littérales, la question de son existence se pose lorsqu'on change de point de vue pour aborder la question des valeurs numériques ; la fonction n'est plus simplement une relation entre lettres, elle fait aussi des choses avec des nombres. Si l'on fait abstraction du contexte particulier de cette explicitation, à savoir ce que devient la fonction de deux variables $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ lorsque *i* s'annule, on peut reformuler comme suit : une fonction qui prend la « valeur » nulle ou infinie pour toute valeur de *x* n'existe pas ; ce qui ne signifie pas qu'une fonction n'existe que si elle prend des valeurs finies non nulles pour toute valeur réelle de la variable : des exceptions isolées ne remettent pas en cause la notion d'existence. On le retrouve quelques lignes plus loin, où Ampère reformule son théorème : lorsque *i* s'évanouit, $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ reste fini,

> (…) ce qui arrive toujours, comme nous allons le démontrer, à l'exception de certaines valeurs particulières et isolées du point *x*. [Ampère 1806 149]

L'un des intérêts de ce texte réside justement dans le soin qu'il a d'expliciter cette notion d'existence et ce droit à éliminer ou à supposer éliminés des points singuliers nécessairement isolés. On voit comment cette façon de poser la question numérique de l'existence instaure un rapport au lieu qui était absent dans une démarche plus algébrique et formelle des fonctions, sans toutefois instaurer le rapport qui prévaudra dans l'analyse post-weierstrassienne. En particulier, on est au plus loin de l'obligation de déclaration systématique d'un domaine de définition, ou au moins d'étude ; des points peuvent être implicitement soustraits du domaine en cours de démonstration ; tout énoncé apparemment universel doit être interprété, selon une convention souvent implicite (s'il elle était nécessairement explicite il ne s'agirait pas d'une convention !) : « partout » peut signifier « sauf en d'éventuels points isolés », ou pire, « du moins sur un intervalle d'extension non nulle » [12].

ii. Stabilité du sens local.

Ce terme de « maximum » prend le même sens (pour nous local) quelques années plus tard sous la plume de Cauchy, dans le *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le Calcul Différentiel et Intégral* [Cauchy 1823] :

> Lorsqu'une valeur particulière de la fonction $f(x)$ surpasse toutes les valeurs voisines, c'est-à-dire toutes celles qu'on obtiendrait en faisant varier x en plus ou en moins d'une quantité très petite, cette valeur particulière de la fonction est ce qu'on appelle un maximum. [Cauchy 1823 37]

Le style est beaucoup moins narratif, avec une trace toutefois dans l'usage du conditionnel dans « obtiendrait » : les valeurs voisines ne sont là que potentiellement, elles ne surgissent que lorsqu'on décide explicitement de les considérer. La dimension temporelle a toutefois disparu, le registre géométrique a cédé la place à l'unique registre numérique. On pourrait aller jusqu'à penser que la définition de Cauchy n'est pas équivalente à celle de Lacroix, en ceci qu'elle ne suppose pas que le maximum sépare des plages de monotonie ; nous y verrions aujourd'hui une notion plus générale que celle de Lacroix, notre notion de maximum local. Si une telle lecture de ces lignes de Cauchy est possible, le contexte montre qu'elle relève de l'anachronisme. Cette définition est donnée, comme celle de Lacroix, dans le passage où est établi le lien entre maximum de f et annulation de f' ; Cauchy argumente comme suit : après avoir établi l'équivalence entre croissance de f et positivité de f', il explique

> Donc la fonction y ne pourra cesser de croître qu'autant que la dérivée y' passera du positif au négatif ou réciproquement. Il est essentiel d'observer que, dans ce passage, la fonction dérivée deviendra nulle si elle ne cesse pas d'être continue. [Cauchy 1823 37]

[12] Nous rejoignons ici des éléments de l'analyse proposée, sur une autre période, par M. Panza et G. Ferraro dans leur article *Developing into series and returning from series : a note on the foundations of eighteenth-century mathematics*, Historia Mathematica 30, 2003, p.17-46

Le style narratif est ici un peu plus marqué et le maximum sépare bien deux plages de monotonie. La définition du maximum donnée n'est pas le point de départ du paragraphe, elle ne constitue pas un moment autonome mais une simple étape d'explicitation dans la démonstration du théorème de repérage des extrémums locaux par le signe de la dérivée. Des extrémums locaux qui ne séparent pas des plages de monotonie, ce théorème n'a rien à dire, et rien ne montre que Cauchy en ait considérés. La fin de la dernière citation de Cauchy mérite aussi un petit arrêt. Un lecteur du 21^{e} siècle n'est, en un sens, pas dépaysé : de nombreux théorèmes nécessitent une hypothèse de continuité de la dérivée, ce type d'argument est familier. On est toutefois un peu surpris quand on se souvient que l'annulation de la dérivée en un extrémum local est démontrable par des arguments très simples, ne nécessitant pas qu'on ait établi le lien entre variations de *f* et signe de *f* ', et ne dépendant pas de la continuité de la dérivée ni même de la dérivabilité en un autre point que celui considéré. Cauchy établit l'annulation en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires à propos de *f* ' : de même que la maximum est saisi comme singularité, séparation de plages de comportement ordinaire, changement brusque de comportement, l'annulation de la dérivée est saisie comme changement de signe. Il ne s'agit pas d'établir que la fonction *f* ' *vaut* 0, ce qui relèverait d'un point de vue ponctuel, mais qu'elle *passe* par 0. Rappelons-nous, de plus, que Cauchy ne fait jamais d'hypothèse explicite de dérivabilité et que, dans tous ses cours, toute fonction semble indéfiniment dérivable ; mais ceci doit être lu avec la convention usuelle : sauf en d'éventuels points isolés. Pour établir l'annulation de *f* ' au maximum de *f* Cauchy précise *a posteriori* que son raisonnement n'est bien sûr pas valide si l'on est en un point singulier de *f* '. « Continue » n'est pas non plus tout a fait à entendre comme nous le faisons : ainsi Cauchy pense-t-il au comportement de $1/x$ en 0 lorsqu'il évoque une fonction discontinue en un point, et, en effet, la fonction inverse change de signe sans s'annuler, du fait de la « discontinuité » en 0. On voit que « discontinuité » est à entendre au sens plus général de « singularité », de même que « continu », bien que défini par Cauchy, joue plutôt ici un rôle *méta* puisqu'il est un rappel de la convention permettant d'éliminer en cours de route des points singuliers.

En avançant dans le siècle on observe à la fois l'évolution des formulations et la grande stabilité du sens local du terme « maximum ». Ainsi dans le premier tome du *Cours de calcul différentiel et Intégral* de Joseph-Alfred Serret (1868 [13]), un chapitre entier est consacré aux questions de maximums et minimums, après toutefois que tout le calcul différentiel des fonctions d'une ou plusieurs variables a été mis en place, jusqu'au développement de Taylor. Le chapitre s'ouvre sur la définition :

> Soient $f(x)$ une fonction de la variable x et x_0 une valeur particulière de x. Si l'on peut assigner une quantité positive ε, aussi petite d'ailleurs que l'on voudra, telle que l'on ait
>
> $$f(x_0+h) < f(x_0)$$
>
> pour toutes les valeurs h comprises entre -ε et +ε, on dit que la fonction $f(x)$ passe par un *maximum* quand x atteint la valeur x_0, et $f(x_0)$ est dite une valeur *maxima* de $f(x)$.[Serret 1900 198] [14]

Hormis l'absence du terme « local » ou de « voisinage » (d'ailleurs, pour ce dernier, facultatif dans la formulation contemporaine), rien ne s'oppose à ce que l'on donne aujourd'hui cette définition à un étudiant ; la quantification est parfaitement explicite et clarifie, à nos yeux du moins, le « faire varier x en plus ou en moins d'une quantité très petite » du texte de Cauchy. L'écriture n'est quasiment plus narrative et le point de vue ponctuel semble dominer : ainsi le (petit) intervalle autour de x_0 n'est-il plus un intervalle de *variation* de la grandeur x (comme chez Cauchy) mais un espace de *sélection*, une propriété ponctuelle étant affirmée pour chaque valeur de h pouvant être choisie dans l'intervalle [-ε , ε]. La suite du paragraphe nous ramène en terrain connu :

> Lorsqu'on fait croître x, la fonction $f(x)$ croît ou décroît, selon que la dérivée $f'(x)$ est positive ou négative ; il en résulte que la fonction $f(x)$ ne peut cesser de décroître pour croître, ou de croître pour décroître, que quand $f'(x)$ change de signe ; alors cette dérivée s'annule, à moins qu'elle ne devienne discontinue. Ainsi les valeurs de x qui répondent aux maxima et aux minima de $f(x)$ sont comprises parmi celles qui annulent la dérivée $f'(x)$ ou qui la rendent discontinue. On voit aussi qu'une fonction peut avoir alternativement plusieurs maxima et plusieurs minima qui se succèdent alternativement, du moins tant que $f(x)$ reste finie. [Serret 1900 198]

On observe dans ce paragraphe à deux reprises le jeu épistémologique de l'exclusion *a posteriori* de points singuliers isolés, dans l'évocation des discontinuités de f' puis de la finitude de f ; on observe aussi l'apparente équivalence entre continuité et « rester fini ». Comme on l'imagine, la suite du paragraphe est consacrée à la détermination des extrémums locaux grâce à la série de Taylor. Si proche que l'on soit de Cauchy, le contexte théorique autour du maximum ne se limite plus dans le manuel de Serret à cette application usuelle du calcul différentiel. Serret est le premier en France à publier dans un ouvrage largement diffusé

---

[13] [Serret 1900].

[14] Il semble que le symbole < puisse englober l'égalité, sans quoi cette définition (et celle que l'on lira un peu plus loin sous la plume de Weierstrass) est manifestement contradictoire.

la démonstration du théorème dit de l'égalité des accroissements finis reposant sur l'existence d'un maximum, qu'il reprend d'Ossian Bonnet. On procède de nos jours ainsi : par une transformation affine on se ramène à l'étude d'une fonction continue sur un intervalle [a , b], dérivable sur]a , b[et s'annulant au bord sans toutefois être identiquement nulle ; le théorème de Weierstrass garantissant l'existence d'un point α de [a , b] où la fonction atteint un extremum, il est trivial d'établir qu'au moins un tel point appartient à]a,b[et que la dérivée s'y annule. Notre démonstration repose sur un théorème d'existence de maximum (global) pour une fonction continue sur un intervalle fermé borné, et ne repose en rien sur des hypothèses de monotonie par intervalle ni sur le lien entre variations de *f* et signe de *f* ', lien qu'elle sert au contraire à établir. Serret ne procède toutefois pas exactement ainsi. Après s'être ramené de la fonction initiale *f* à la fonction auxiliaire φ s'annulant en aux bornes de l'intervalle [x_0 , X], notre auteur se lance dans une petite narration :

> (…) faisons croître x de x_0 à X ; la fonction $\varphi(x)$ est d'abord nulle. Si l'on admet qu'elle ne soit pas constamment nulle, pour les valeurs de x comprises entre x_0 et X, il faudra qu'elle commence à croître en prenant des valeurs positives, ou à décroître en prenant des valeurs négatives, soit à partir de x_0, soit à partir d'une valeur de x comprise entre x_0 et X. Si les valeurs dont il s'agit sont positives, comme $\varphi(x)$ est continue et qu'elle doit s'annuler pour x = X, il est évident qu'il y aura une valeur x_1 entre x_0 et X telle, que $\varphi(x_1)$ sera supérieure ou au moins égale aux valeurs voisines $\varphi(x_1+h)$, $\varphi(x_1-h)$, h étant une quantité aussi petite que l'on voudra. [Serret 1900 17]

C'est un maximum local qui joue ici le rôle fondamental dans la démonstration, sans d'ailleurs que le terme maximum ne soit ici utilisé (il n'est défini que 181 pages plus loin !). L'existence de ce maximum n'est pas démontrée comme elle le sera chez Weierstrass, elle est établie par une tactique épistémologique dans laquelle le style narratif joue un rôle essentiel. On a vu que lorsqu'il peut éviter ce style, Serret l'évite, et lorsqu'on lit l'énoncé et la démonstration de l'égalité des accroissements fini on est frappé par le fait que le passage que nous citions est le *seul* écrit dans ce style. Une fois passé en mode narratif, le récit rend « évident » le passage par un extrémum ; l'absence de maximum serait moins une impossibilité mathématique, au sens ou l'on pourrait exhiber une vérité préalablement établie avec laquelle elle entrerait en contradiction, qu'une impossibilité dans le récit. L'« évidence » de la monotonie par intervalle revient ici au premier plan.

Le fait que Weierstrass démontre l'existence du maximum (global) pour une fonction continue sur un intervalle fermé borné ne l'amène toutefois pas à modifier un vocabulaire bien établi, on le voit par exemple dans ses *Leçons sur le calcul des variations* (professées en 1882)[15], dans lesquelles « minimum » désigne toujours le minimum local :

> On dit d'une fonction $f(x)$ que sa valeur en le point $x = a$ est un *Minimum* si elle est plus petite en $x = a$ qu'en toutes les valeurs voisines de x, *i.e.* si l'on peut fixer une grandeur positive δ telle que
>
> $$f(a+h) - f(a) > 0$$
>
> dès que
>
> $$|h| < \delta.$$
>
> [Weierstrass 1927 V 9][16]

C'est exactement la même définition qu'on lit chez Jordan dans la troisième édition du premier tome de son traité d'Analyse [Jordan 1991a 379], dans le cours de calcul différentiel de Stolz [Stolz 1893 199] ou encore dans le très weierstrassien article de Paul du Bois-Reymond sur les fondements de l'Analyse dont le choix de termes est assez original :

> (...) on dit qu'une fonction a un maximum pour $x = a$ si les premières valeurs de la fonction [*die ersten Functionalwerthe*] pour $x \neq a$ qui diffèrent de $f(a)$ sont plus petites que $f(a)$. [du Bois-Reymond 1875 33] [17]

Signalons rapidement que si l'on quitte les traités et manuels, on trouve aussi un usage stable du terme « maximum » au sens local en théorie des séries trigonométriques. L'initiative en revient à Dirichlet qui, dans son article fondateur de 1829 *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, étudie longuement la convergence de la série associée à une fonction continue et monotone, puis relâche un peu les hypothèses en considérant une fonction qui peut admettre un nombre fini de solutions de continuité,

> (…) peut aussi avoir plusieurs maxima et minima dans ce même intervalle. [Dirichlet 1829 129] [18]

C'est d'ailleurs à propos de ce type de fonctions que du Bois-Reymond explicitait sa définition du maximum.

---

[15] *Vorlesungen über Variationsrechnung*, [Weierstrass 1927] vol.5.

[16] « *Von einer Funktion f(x) sagt man, ihr Werth an der Stelle x = a sei ein* Minimum*, wenn er für x = a kleiner als für alle benachbarten Werthe von x, d.h. wenn sich eine positive Grösse δ so bestimmen lässt, das f(a+h)-f(a)>0, sobald nur |h|<δ ist.* »

[17] « *(...) man sagt, dass eine Function für x = a ein Maximum hat, wenn die ersten Functionalwerthe für x≠a, die von f(a) verschieden sind, kleiner als f(a) sind.* »

[18] Pagination des *Œuvres.*

iii. Une place pour le maximum global ?

Autant le sens de « maximum » est simple et demeure inchangé dans la période post-weierstrassienne, autant les termes associés sont nommés différemment selon les auteurs. Weierstrass, on le verra, nomme « maximum absolu » la plus grande des valeurs prises par une fonction sur un intervalle donné ; on trouve donc notre notion de maximum (global). Serret faisait un choix de vocabulaire exactement contraire, et s'en expliquait ainsi :

> On peut avoir besoin de connaître la plus grande et la plus petite valeur que prend une fonction $f(x)$ de la variable x quand x varie entre deux limites données a et b ; un tel maximum ou minimum est dit un *maximum relatif* ou un *minimum relatif.* (…) Lorsque la fonction $f(x)$ a plusieurs maxima et minima absolus, entre les limites considérées, le plus grand des maxima est dit le *maximum maximorum*, et le plus petit des minima le *minimum minimorum* ; dans ce cas, le *maximum maximorum* satisfera à la condition du maximum relatif, s'il surpasse toutefois les valeurs extrêmes $f(a)$, $f(b)$. [Serret 1900 210]

Ce que Serret définissait p.198 comme simple « maximum » devient ici « maximum absolu », absolu au sens où il ne dépend pas du choix, arbitraire ou dicté par les circonstances particulières d'un problème, d'un domaine particulier d'étude. Puisqu'elle dépend de ce choix de domaine, la valeur que nous appelons aujourd'hui le maximum est pour Serret le « maximum relatif » : on ne pourrait exprimer plus clairement l'évidence selon laquelle l'objet n'est pas un couple (fonction , domaine de définition) mais une fonction de domaine indéfini possédant objectivement des singularités locales ; quant à l'étude sur un domaine fixé par avance, elle ne relève pas de la théorie générale – n'a donc à la limite pas sa place dans un tel manuel – bien que de nombreux problèmes particuliers puissent y conduire. Pour illustrer ses définitions, Serret choisit un problème géométrique conduisant à chercher le maximum d'une fonction affine (dépourvue, en tant que fonction, de « maximum absolu ») sur un intervalle déterminé par le contexte géométrique. C'est aussi un cas où le « maximum relatif » est atteint au bord et donc échappe au repérage par le calcul différentiel. Cette question du bord et des points intérieurs invite à l'introduction, après les « maximums [absolus] » et le « maximum relatif » du mixte qu'est le « maximum maximorum », plus grand des maximums locaux.

Le choix n'est pas tout à fait le même dans le traité de Stolz. Après avoir défini les extrémums (pour nous, locaux), il précise :

Les extrémums ainsi définis d'une fonction sont souvent dits absolus, car il dépendent de la totalité des valeurs de $f(x)$. Ils s'opposent aux extrémums relatifs, qui se présentent lorsque la variable indépendante x est au départ assujettie à une restriction, de sorte que le ξ des relations (1a) (resp. (1b)) ne peut prendre que certaines valeurs positives ou négatives. [Stolz 1893 200] [19]

Un lecteur du 21e siècle pourrait être surpris de voir le maximum (local) non seulement être qualifié d'« absolu », mais que cela soit justifié par le fait qu'il dépend de la « totalité » (*Gesamtheit*) des valeurs de la fonctions : autant d'éléments qui nous semblent au contraire caractéristiques du maximum global ! Stolz heureusement précise ce qui préside au choix de ces termes. Le ξ qu'il évoque est le h de la définition de Serret ou Weierstrass ; les maximums « relatifs » sont ceux atteints aux bornes d'un intervalle d'étude fixé d'avance et, tout comme chez Serret, ce choix conduit à ne regarder qu'à gauche ou qu'à droite d'un certain point, faisant apparaître des sortes de maximum qui n'en sont pas vraiment, comme dans le cas d'une fonction affine étudiée sur un intervalle fermé borné [20]. On comprend donc que l'idée de « totalité » des valeurs ne renvoie ici en rien à un domaine de définition, fût-il maximal lorsque cela à un sens (comme pour les fonctions analytiques), mais à l'idée de libre variabilité ; nous ne sommes pas face à une alternative local/global mais à une alternative variable libre / variable soumise à restriction, les deux termes de ce dernier couple n'étant pas d'égale dignité : une variable indépendante est libre *a priori* et comme par nature, seules des circonstances particulières peuvent conduire le mathématicien à *choisir* de ne considérer que certaines plages de valeur. La prégnance de cette alternative variable libre / variable soumise à restriction est confirmée quelques pages plus loin, à propos des extremums de fonctions de plusieurs variables :

C. Extremums relatifs (i.e. avec conditions auxiliaires)

On rencontre souvent des problèmes qui sont des cas particuliers du suivant : « Soit à déterminer les extremums d'une fonction de n variables $x_1,\dots,x_n$

$$u = f(x_1,\dots,x_n)$$

sous la condition qu'entre les $x_1,\dots,x_n$ on ait m (au plus n-1) équations

[19] « *Die jetzt definirten Extreme einer Function f(x) werden oft als absolut bezeichnet, da sie von der Gesamtheit der Werthe von f(x) abhängen. Ihnen stehen die relative Extreme gegenüber, welche dann auftreten, falls die unabhängige Veränderliche x von vornherein einer Beschränkung unterworfen wird, sodass ξ in den Relationen (1a) bezw. (1b) nur ausgewählte positive und negative Werthe annehmen kann.* »

[20] Stolz reprend p.209 l'exemple qu'on trouvait déjà chez Serret et l'attribue à Liouville.

$\varphi_\lambda(x_1,\ldots,x_n) = 0 \qquad (\lambda = 1,2,\ldots,m)$. » **[Stolz 1893 240]**[21]

Les extremums « relatifs » apparaissant lorsqu'on restreint l'unique variable à un intervalle sont donc conçus comme des cas particuliers d'une notion plus générale d'extrémum « relatif », ce que nous nommons un extrémum lié. Le couple structurant n'est donc pas local/global mais variables indépendantes / variables dépendantes ou liées ; le mode naturel de liaison est la donnée d'équations entre les variables, et le cas unidimensionnel où les conditions sur l'unique variable sont données par des inéquations et non des équations apparaît comme un cas bâtard, un mixte un peu difficile à caractériser mais qu'on doit mentionner dans un chapitre traitant des problèmes d'extremums. Le cas des extremums liés était aussi traité pas Serret sans qu'un terme particulier ne soit introduit : il s'agit des problèmes de maximums dans « le cas d'une fonction explicite de plusieurs variables liées par des équations données. » [Serret 1900 237]. Quant à Jordan, le terme « maximum d'une fonction » désigne chez lui, on l'a déjà signalé, notre maximum local, « maximum relatif » désigne comme chez Stolz le maximum (local) lié d'une fonction de plusieurs variables non indépendantes [Jordan 1991a 388]. Le cas d'une variable assujettie à rester dans un intervalle n'est pas évoqué dans le chapitre consacré aux « Minima et Maxima ».

On trouve toutefois chez Jordan une notion globale de maximum, et si la notion de maximum d'une fonction n'est définie qu'à la page 379, on trouve dès la page 22 une autre notion de maximum. Après avoir défini la notion d'ensemble E (sous-entendu de sous-ensemble de **R**) borné supérieurement (resp. inférieurement) :

> Il existe un nombre frontière M, lequel jouira de la double propriété : 1° que E ne contient aucun nombre > M (<M) ; 2° qu'il en contient qui sont > M-ε (<M+ε), quel que soit le nombre positif ε.
>
> Ce nombre M s'appellera la *borne supérieure* ou le *maximum* (borne *inférieure* ou *minimum*) de E. Il peut, suivant les cas, rester en dehors de l'ensemble E ou lui appartenir. On dit, dans ce dernier cas, que E *atteint* son maximum (son minimum). Cette circonstance se présentera nécessairement si E est un ensemble parfait. [Jordan 1991a 22]

Il ne s'agit donc plus ici du maximum d'une *fonction* mais du maximum d'une partie de la droite numérique. Nous sommes ici dans une toute autre écriture de l'Analyse que celle que l'on trouvait dans les cours de Calcul Différentiel de Lacroix, Cauchy, Serret ou encore chez

[21] « *Oft begegnet man Aufgaben, die als besondere Fälle der folgenden erscheinen. « Es sind die Extreme einer Function von n Veränderlichen* $x_1,\ldots,x_n$ $u = f(x_1,\ldots,x_n)$ *zu ermitteln unter der Bedingung, dass zwischen* $x_1,\ldots,x_n$ *m und zwar höchstens n-1 Gleichungen* $\varphi_\lambda(x_1,\ldots,x_n) = 0$ $(\lambda=1,2,\ldots,m)$ *bestehen.* »

Hermite, prédécesseur immédiat de Jordan à Polytechnique. Là où ces auteurs commençaient par l'étude des *fonctions*, souvent, on le verra, après quelques remarques sur la notion de grandeur variable, Jordan n'aborde les fonctions qu'après un chapitre consacré aux « ensembles », où sont étudiées les propriétés relevant pour nous de la topologie ensembliste – point limite, partie fermée (Jordan dit « parfait »), frontière, connexité (ensemble « d'un seul tenant ») – ou d'éléments de théorie de la mesure (ensemble mesurable), autant d'éléments directement repris de l'école de Weierstrass. Il est toutefois significatif que les deux sens de « maximum » ne communiquent guère dans le traité de Jordan : maximum d'une partie d'un côté, dans un chapitre introductif consacré aux notions ensemblistes nécessaires à toute l'Analyse et héritées de Weierstrass ; quatre cents pages plus loin, un chapitre consacré aux applications du calcul différentiel et reprenant les notions bien classiques et totalement locales de maximum d'une fonction, les problèmes de repérage au moyen de la série de Taylor et la variante « relative » dans le cas des variables liées. Notons aussi, comme on le voit dans la dernière citation, un vocabulaire qui n'est pas le nôtre : Jordan dit « borne supérieure ou maximum » où nous dirions « borne supérieure », parle de « maximum atteint » là où nous parlerions de plus grand élément. On trouve un choix de vocabulaire différent chez Stolz qui définit la notion de borne supérieure d'une partie de **R** dans son cours d'arithmétique et n'utilise jamais le terme de maximum à son propos.

II. Un théorème de Weierstrass et ses lecteurs.

La première conclusion partielle du petit repérage lexical du paragraphe précédent est bien sûr que « maximum » désigne, de façon stable, au 19e siècle ce que nous nommons « maximum local », et que des définitions conformes aux plus stricts critères de rigueur sont données, par exemple chez Serret, avant Weierstrass. On a vu dans le cas de Serret combien on aurait tort de lire les définitions sans les lier au contexte d'usage des notions, sans quoi on n'aurait vu ni la persistance – à côté et en dépit de la définition – d'une idée du maximum qui coïncide encore avec ce que permettait la saisie en style narratif ; ni combien l'idée que Serret se fait de la démonstration d'existence d'un maximum diffère de la nôtre. Cette prédominance du maximum local n'a en un sens rien d'étonnant, puisque cette notion n'est abordée que dans le cadre des applications du calcul différentiel, à l'occasion de l'exposition des méthodes de repérage des extrémums. La lecture des textes permet toutefois de repérer des éléments de la saisie du monde fonctionnel avant Weierstrass, saisie dans laquelle le style narratif recule sans disparaître ; où l'articulation fondamentale met face à face variables libres et variables liées, au point que l'étude en la « totalité » des valeurs puisse signifier l'étude locale en chaque point pour une variable libre, et que la restriction du domaine d'étude ne soit saisie que comme une détour par rapport à l'exposé général et une concession à la nécessité d'évoquer des applications de l'Analyse à des problèmes qui n'en relèvent pas en propre. Il peut sembler plus surprenant de constater la stabilité du sens local chez et après Weierstrass. Si dans le calcul différentiel il n'y a finalement aucun énoncé concernant le maximum global, il y en a un dans une Analyse fondée sur des éléments de topologie ensembliste et dans laquelle on dispose du théorème démontré par Weierstrass selon lequel une fonction continue sur un intervalle fermé borné admet un maximum. Cet énoncé qui nous semble si fondamental, si simple, et si propre à faire sentir l'opposition entre local et global ou à introduire la légalité du lieu, est dans le dernier tiers du 19^{e} siècle disponible mais n'est pas utilisé dans ces rôles. Il nous faut tout d'abord décrire le contexte et le mode de formulation de ce théorème global chez Weierstrass lui-même, puis comprendre comment il a été lu, reformulé, utilisé par les partisans d'une modernité en Analyse dans laquelle le couple local/global ne joue pas encore de rôle explicite.

1. Un théorème de Weierstrass.

i. Le cours de 1878.

On sait la difficulté d'accès aux cours de Weierstrass sur les fondements de l'Analyse, qui n'ont longtemps été connus que par les articles ou manuels rédigés par des auditeurs, tels Heine, Pincherle ou Dini. Nous nous appuyons sur les cours de 1878 noté par Hurwitz [Weierstrass 1878] et le cours de l'été 1886 reconstitué à partir de plusieurs séries de notes [Weierstrass 1886]. Le théorème sur le maximum se trouve, dans le cours de 1878, après l'exposé d'une construction des nombres réels et complexes, puis l'étude de classes de fonctions de plus en plus étendues, en partant de la classe simple des fonctions rationnelles. Les deux temps de cette première partie de l'exposé possèdent un certain parallélisme en ceci qu'on y part d'objets très simples et de nature en un sens arithmétique, nombres entiers d'un côté, fonctions rationnelles (d'une ou plusieurs variables réelles) de l'autre, puis on étudie les objets obtenus au moyen de séries infinies d'objets simples, nombres réels, séries de fonctions rationnelles – en particuliers séries entières. La fin du cours est consacrée aux fonctions analytiques d'une variable complexe dans lequel le problème de la multivocité, absent de la première partie, joue un rôle central. C'est entre ces deux parties [22] que Weierstrass aborde quelques aspects que nous dirions de topologie de **R** et étudie brièvement les fonctions sous la seule hypothèse de continuité. Un point important pour l'interprétation des passages relatifs à la topologie de **R** est que Weierstrass travaille toujours, sauf mention du contraire, dans ce que nous nommons la droite numérique achevée. Les nombres (positifs) sont introduits comme des agrégats, finis ou infinis, des éléments que sont l'unité et ses parties ($1/n$ où n est un entier strictement positif), l'agrégation se faisant par addition. Après définition de l'égalité et de l'ordre, il est immédiatement distingué deux cas :

> Nous dirons d'une grandeur numérique [*Zahlgröße*] a qu'elle a une valeur finie s'il existe des grandeurs c, plus grandes que a et formées d'un nombre fini d'éléments. (…) Si, au contraire, tout nombre c formé à partir d'un nombre fini d'éléments est une partie [*Bestandtheil*] de a, alors nous dirons que a est infiniment grand. [Weierstrass 1878 9] [23]

La partie topologique s'ouvre sur quelques points de vocabulaire permettant d'établir le liens entre les nombres (*Zahlen*) déjà étudiés et les grandeurs variables :

> On dit d'une grandeur réelle qu'elle est illimitée [*unbeschränkt*] lorsqu'elle peut prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$; la totalité des points d'une droite représente le domaine [*Gebiet*] d'une telle variable. Considérons l'association [*Verein*] de grandeurs variables illimitées. (On ne considère dans ce qui suit que des grandeurs réelles, tout se transposant aisément aux grandeurs complexes). On nomme point [*Stelle*] du domaine tout système déterminé des variables. Soient $x_1, x_2,\ldots,x_n$ les variables, $a_1, a_2,\ldots,a_n$ un point de leur domaine – il faut comprendre que dans le système des valeurs, on a $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2,\ldots, x_n = a_n$ –, alors $x_1', x_2',\ldots, x_n'$ est un point du voisinage δ [*der Umgebung* δ] du point $a_1,a_2,\ldots,a_n$ si $|x_1'-a_1| < \delta$, $|x_2'-a_2| < \delta,\ldots, |x_n'-a_n| < \delta$. x_ν' est entre $x_\nu-\delta$ et $x_\nu+\delta$.
>
> Supposons que dans le domaine d'une variable illimitée x soit définie, de quelque manière que ce soit, une infinité de points ; nous désignerons la totalité de ces points par x' ; les x' peuvent alors être représentés par une succession soit discrète soit continue de points d'une droite – on dit dans ce dernier cas qu'ils forment un continuum. On le définit analytiquement ainsi : les x' forment un continuum lorsque,

[22] c'est nous qui distinguons ces deux parties, pas Weierstrass.

[23] « *Von einer Zahlgröße a wollen wir sagen, sie habe einen endlichen Werth, wenn es Größen c giebt, die, aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehend, größer sind als a. (…) Wenn im Gegentheil jede Zahl c, die aus einer endlichen Anzahl von Elementen zusamengesetzt ist, Bestandtheil der Zahl a ist, so wollen wir a unendlich groß nennen.* »

> si *a* est un point du domaine défini *x*', la totalité des points d'un voisinage choisi suffisamment petit de *a* est dans le domaine *x*'. [Weierstrass 1878 83] [24]

Le travail de mise au point d'un vocabulaire précis réussit dans le cas des *continuums* (nous dirions des ouverts), la notion de δ-voisinage étant suffisante à les définir. Dans les lignes qui suivent, Weierstrass définit la notion de transition continue entre deux points d'un domaine, donc de composante connexe (par arc) d'un ouvert. Deux éléments de cette citation ne sont peut-être pas aussi heureusement mis en place. Ainsi l'appellation « illimité » n'a pas pour contraire ce que nous appellerions « borné » : une partie stricte de la droite numérique, par exemple celle obtenue en enlevant un point, n'est pas illimitée au sens de Weierstrass. Par ailleurs, le texte semble suggérer que l'alternative « discrète » / « continue » est complète, alors que les exemples de parties ni discrètes ni ouvertes ne manquent pas ; le couple renvoie moins à la mise en place d'une topologie ensembliste qu'à une distinction classique dans le monde de la grandeur, qu'on trouvait aussi comme première articulation dans le texte de Riemann sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie. Tout ce passage du texte est d'ailleurs caractéristique dans son projet non pas de rejeter le langage de la grandeur, mais d'en définir les termes d'une manière qui semble ensembliste. Weierstrass introduit ensuite la notion de « limite supérieure » (*obere Grenze*) [25] d'une variable réelle et énonce le résultat fondamental de ce passage :

> *g* s'appelle la limite supérieure d'une grandeur variable lorsqu'il n'existe aucune valeur de la variable qui soit supérieure à *g*, et qu'il se trouve toujours encore des points du domaine de la variable dans l'intervalle *g*-δ…*g*, si petite que soit la grandeur

---

[24] « *Eine unbeschränkt veränderliche reelle Größe ist eine solche, die alle Werthe zwischen* $-\infty$ *und* $+\infty$ *annehmen kann ; sämmtliche Punkte einer Gerade repräsentieren das Gebiet einer solchen Veränderlichen. Wir denken uns nun einen Verein von unbeschränkt veränderlichen Größen. (Im folgenden handelt es sich nur um reelle Größen ; auf complexe Veränderliche läßt sich alles folgende leicht übertragen.) Jedes bestimmte System der Veränderlichen heißt eine Stelle im Gebiete der Größen. Sind* $x_1,x_2,\ldots,x_n$ *die Variabeln,* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *eine Stelle in ihrem Gebiete – was so zu verstehen ist, daß* $x_1=a_1$, $x_2=a_2,\ldots$, $x_n=a_n$ *im Werthsystem ist -, so ist, wenn* $|x_1'-a_1|<\delta$, $|x_2'-a_2|<\delta$, …, $|x_n'-a_n|<\delta$, $x_1', x_2',\ldots,x_n'$ *eine Stelle in der Umgebung* δ *der Stelle* $a_1,a_2,\ldots,a_n$. x_ν' *liegt zwischen* $a_\nu+\delta$ *und* $a_\nu-\delta$. *In dem Gebiete einer unbeschränkt Veränderlich* x *sei irgend welcher Weise eine unendliche Anzahl von Stellen definiert ; die Gesammtheit dieser Stellen werde durch x' bezeichnet. Dann können die x' entweder durch discrete order durch continuierlich aufeinander folgende Punkte einer Gerade repräsentiert sein – im letztern Falle sagt man, sie bilden ein Continuum. Dieses ist analytisch so zu definieren : Ist a eine Stelle des definierten Gebietes x', und liegen in einer hinreichend klein gewählten Umgebung von a sämmtlichen Stellen dieser Umgebung in dem Gebiete x', so bilden die x' ein Continuum.* »

[25] Nous choisissons de ne pas traduire *Obere Grenze* par borne supérieure pour conserver dans le lexique non seulement le lien lexical allemand mais aussi le lien conceptuel chez Weierstrass entre limite supérieure et limite, on le verra explicitement dans le cours de 1886. Dans l'ensemble, nous traduirons *Grenze* par limite et non tantôt par limite (pour une fonction) et frontière (pour une partie) : cette distinction entre fonction (ou grandeur variable) et partie est justement ce qui est ici en jeu : nous viderions la problématique en introduisant une variation lexicale absente chez Weierstrass.

δ. (…) Il est indifférent que g et g' [26] elles-mêmes appartiennent ou non au domaine. (g peut être égal à ∞ et g' à $-\infty$).

« Tout domaine d'une grandeur variable admet une limite supérieure et une inférieure ». [Weierstrass 1878 84] [27]

La démonstration est faite dans le cas où « la variable ne peut prendre que des valeurs positives et ne peut devenir égale à l'infinie » [Weierstrass 1878 84][28], le cas général s'y ramenant aisément, nous dit Weierstrass. L'hypothèse supplémentaire selon laquelle la partie est, dirions-nous, majorée, est explicitée un peu plus loin en cours de démonstration : x' est par hypothèse « plus petite que G, où G est un nombre positif. » [Weierstrass 1878 85][29]. La démonstration consiste en la construction d'une suite strictement croissante de nombres de la forme a_i/a^i où a est un entier fixé une fois pour toute (par exemple 10) et les (a_i) une suite d'entiers ; cette suite détermine par son développement (par exemple décimal) un nombre g dont on montre qu'il répond à la définition de la limite supérieure. Il est même établi, sous l'hypothèse de majoration ajoutée pour la démonstration, que g est alors finie. Le même procédé sert ensuite à démontrer :

« Dans chaque domaine discret d'une multiplicité, domaine comprenant une infinité de points, il existe au moins un point distingué en ceci que dans chacun de ses voisinages, si petit qu'il soit, se trouvent une infinité de points du domaine. » [Weierstrass 1878 86][30]

Le « dans » est ici, au mieux, ambigu ; ici aussi, ce « point » peut bien sûr correspondre à un nombre fini ou infini, quoique la notion de voisinage de l'infini n'ait pas été explicitement introduite. Ici encore le résultat est démontré en ajoutant explicitement l'hypothèse « que les points définis sont compris entre deux limites g_0 et g_1 » [Weierstrass 1878 86][31], aucune indication n'est donnée ni sur la démonstration ni sur l'interprétation de l'énoncé initial dans le cas d'un domaine non borné. Weierstrass signale que la borne supérieure est le plus grand des points d'accumulations (*Verdichtungspunkte*), sans d'ailleurs avoir défini ce terme

[26] g' désigne la limite inférieure.

[27] « *g heiβt die obere Grenze einer Veränderlichen Gröβe, wenn es keine Werth der Veränderlichen giebt gröβer als g und wenn in dem intervalle g-δ...g , δ eine noch so kleine Gröβe, sich noch immer Stellen des Gebietes der Veränderlichen vorfinden. (...) Ob g und g' selbst dem Gebiete angehören oder nicht, ist gleichgültig. (g kann gleich ∞ und g' gleich -∞ werden.) « Jedes Gebiet einer veränderlichen Gröβe hat eine obere und eine untere Grenze. »* » Hurwitz met entre guillemets les énoncés de théorèmes.

[28] « (…) *die Veränderliche sei nur positiver Werthe fähig und könne nicht gleich ∞ werden*. »

[29] « *kleiner als G, wo G eine positive Zahl bedeutet.* »

[30] « *In jedem discreten Gebiete von einer Mannigfaltigkeit, welches unendlich viele Stellen enthält, giebt es mindestens eine Stelle, die dadurch ausgezeichnet ist, daβ in jeder noch so kleinen Umgebung derselben sich unendlich viele Stellen des Gebietes vorfinden .* »

[31] « *daβ die definierten Stellen innerhalb zweie Grenzen g_0 und g_1 enthalten.* »

[Weierstrass 1878 88]. Le résultat est ensuite démontré pour les domaines à *n* variables comportant une infinité de points, les domaines étant cette fois explicitement supposés bornés dès l'énoncé de la proposition à démontrer.

De ces propriétés des variables numériques, Weierstrass donne trois conséquences : la première est le théorème des valeurs intermédiaires, la seconde est le théorème d'uniforme continuité des fonctions continues en chaque point d'un intervalle fermé borné. Le troisième est celui qui nous intéresse ici, en voici l'énoncé général :

> Si à chaque point $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ d'un domaine correspond toujours un point y ; alors y est aussi une grandeur variable et possède donc une limite inférieure et une supérieure, nommons cette dernière g. Il existe alors au moins un point [dans le domaine des x] (il n'est pas nécessaire que ce point appartienne au domaine défini) tel que, quelque petit que soit le voisinage de ce point que je considère, si je considère les y associées aux points du domaine de x se trouvant dans ce voisinage, ces valeurs ont aussi une limite qui n'est autre que g. De même pour la limite inférieure. [Weierstrass 1878 91][32]

Cet énoncé très général ne concerne apparemment ni spécifiquement les fonctions numériques continues, ni les domaines fermés et bornés, ni même les domaines fermés (le point distingué dans la conclusion peut être au bord d'un domaine sur lequel aucune hypothèse n'est faite) ni les domaines bornés (le point distingué dans la conclusion peut correspondre à la valeur infinie) ; le concept abstrait de borne supérieure et la considération simultanée des nombres finis ou infinis permettent justement ce degré de généralité. Donnons la traduction de la démonstration de Weierstrass (dans le cas unidimensionnel), pour voir si elle confirme cette lecture de l'énoncé et pour illustrer le mode de démonstration commun à tous les théorèmes de cette partie ; *a* désigne ici un entier positif strict fixé au départ, μ parcourt les entiers relatifs :

> Démontrons cette proposition pour le domaine d'une variable x.
>
> Considérons la totalité des intervalles $\frac{\mu}{a}\ldots\frac{\mu+1}{a}$, dans lesquels se trouvent les x auxquels correspondent des y. Ces dernières admettent dans chaque intervalle $\frac{\mu}{a}\ldots\frac{\mu+1}{a}$ une limite supérieure g_μ. Pour au moins l'un des ces intervalles on a g_μ =

[32] « *Einer Stelle* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *eines Gebietes entspreche immer eine Stelle y ; dann ist auch y eine veränderliche Größe und hat also eine untere und obere Grenze ; die letztere sei g. Dann giebt es [in dem Gebiete der x] (Es ist nicht nötig, daß die Stelle zu dem definierten Gebiete gehört) mindestens eine Stelle von folgender Beschaffenheit : Wenn ich irgend eine noch so kleine Umgebung derselben betrachte und für die in dieser Umgebung liegenden Stellen des Gebietes x die zugehörigen Werthe y betrachte, so habe die Werthe von y auch ihre Grenze und dieselbe ist gerade g. Ähnliches gilt für die untere Grenze.* »

g, car la totalité des y considérés ensembles ont g comme limite supérieure. S'il existe plusieurs intervalles pour lesquels $g_\mu = g$, considérons-en un, par exemple le premier. Il existe donc une infinité de points $\frac{\mu}{a}$ (un pour chaque entier a) tels que pour $\frac{\mu}{a}\ldots\frac{\mu+1}{a}$ on a $g_\mu = g$; il existe par conséquent un point x_0 au voisinage duquel se trouvent une infinité des points $\frac{\mu}{a}$. Si l'on prend maintenant un domaine aussi petit que l'on veut x_0-δ…x_0+δ, on peut trouver une infinité de domaines $\frac{\mu}{a}\ldots\frac{\mu+1}{a}$ entre x_0-δ et x_0+δ. Par conséquent la limite supérieure de x_0-δ…x_0+δ est identique à celle de x_0-δ…x_0+δ, donc égale à g, *q.e.d.*. [Weierstrass 1878 91][33]

On voit que cette démonstration est incompatible avec au moins l'une des hypothèses de lecture de l'énoncé. Certes il n'est utilisé aucune hypothèse de continuité sur y, rien n'implique non plus que x_0 appartienne au domaine de définition de la fonction y. Par contre « Pour au moins l'un des ces intervalles on a $g_\mu = g$, car la totalité des y considérés ensembles ont g comme limite supérieure » n'est valide que pour les domaines bornés, qui ne sont rencontrés que par un nombre fini des intervalles $\frac{\mu}{a}\ldots\frac{\mu+1}{a}$. Cette finitude du nombre des intervalles d'une subdivision régulière de **R** rencontrant un domaine borné avait d'ailleurs été utilisée quelques lignes plus haut dans la démonstration de l'uniforme continuité, mais dans ce cas il était explicite que l'on travaillait sur un intervalle a…b et la finitude du nombre des intervalles rencontrant le domaine était explicitée dans la démonstration [Weierstrass 1878 89]. Dans cette dernière citation, soit Weierstrass commet une erreur de raisonnement, soit il faut considérer que l'hypothèse selon laquelle le domaine est borné, hypothèse faite dans l'énoncé démontré juste avant, est implicitement reconduite. Après la démonstration de cette propriété générale relative aux fonctions quelconques et aux bornes supérieures, Weierstrass aborde à titre de cas particulier le problème plus élémentaire et plus spécifique du maximum :

---

[33] « *Wir bewiesen diesen Satz für ein Gebiet einer Variabeln x. Wir betrachten sämmtliche Intervalle μ /a…μ+1 /a, in denen x liegen, für welche es zugehörige y giebt. Für letztere giebt es in jedem solchen Intervalle μ/a…μ+1 /a eine obere Grenze* g_μ. *Unter den sämmtlichen Intervallen muβ aber mindestens eins geben, für welches die obere Grenze* $g_\mu = g$ *ist, da ja sämmtlichen y zusammen betrachtet die obere Grenze g haben. Giebt es mehrere Intervalle, für die* $g_\mu= g$ *ist, so fassen wir irgend eine, z.B. das erste, derselben ins Auge. Es giebt nun unendlich viele Stellen μ /a (für jede Zahl a eine), so daβ für μ /a…μ+1 /a* $g_\mu = g$ *ist ; folglich muβ es eine Stelle* x_0 *geben, in deren Umgebung unendlich viele Stellen μ /a liegen. Nimmt man nun einen noch so kleine Bereich* x_0-δ...x_0+δ, *so kann man unendlich viele Bereiche μ /a…μ+1 /a finden, die zwischen* x_0-δ *und* x_0+δ *liegen. Folglich ist die obere Grenze von* x_0-δ...x_0+δ *identisch mit der von μ /a…μ+1 /a, also gleich g, q.e.d..* »

La question se présente souvent de savoir si, parmi les valeurs qu'une grandeur peut prendre se trouve un maximum ou un minimum (maximum ou minimum au sens absolu). Soit y une fonction continue de x, $y = f(x)$. x doit se trouver entre deux limites déterminées a et b. A quelles conditions y admet-elle un maximum et un minimum ? y admet une borne supérieure. D'après notre proposition, il doit exister un point x_0 du domaine des x tel qu'entre x_0-δ et x_0+δ la limite supérieure de y soit aussi g. x_0 est soit intérieur à $a\ldots b$ soit à la limite ($x = a$ ou $x = b$). [Weierstrass 1878 91]

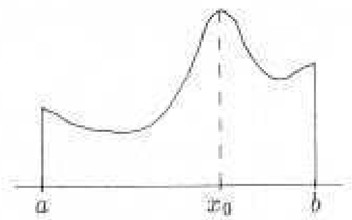
Arrêtons un instant pour souligner quelques aspects de la référence au domaine. Que x doive se trouver entre deux limites a et b pourrait s'interpréter comme l'hypothèse selon laquelle le domaine de x est borné, et c'est en effet ainsi que Weierstrass exprimait cette hypothèse dans les passages précédents. On voit toutefois à la fin de cette citation qu'il n'en est rien : a et b ne sont pas uniquement un majorant et un minorant, ils sont les limites ; on peut même supposer que x est une grandeur continue car il est peu probable que Weierstrass étudie le comportement d'une fonction continue d'une variable discrète. On est donc conduit à comprendre que le domaine de travail, celui de la variable x, est l'un des intervalles que nous notons $[a , b]$, $]a , b]$, $[a , b[$ ou $]a , b[$ (en supposant a<b) ; le partage entre intérieur et limite est identique pour ces quatre domaines, entre lesquels pour l'instant rien ne nous contraint à choisir. Poursuivons la lecture :

Dans le premier cas, $f(x_0)$ est un maximum. En effet, $f(x_0)$ doit être égal à g : comme $f(x)–f(x_0)$ peut être rendu aussi petit qu'on veut en choisissant $|x-x_0|$ assez petit ; comme par ailleurs, puisque x est dans x_0-δ…x_0+δ, $f(x)$ peut être prise aussi près qu'on veut de la grandeur g, on doit avoir $f(x_0) = g$. (Si on avait $f(x_0) = g+h$, on aurait $f(x) – f(x_0) = f(x) – g – h$, et $f(x)$ ne pourrait s'approcher arbitrairement de g si h n'était pas = 0).
Si au contraire x_0 coïncide avec a ou b, on ne peut affirmer de a (resp. b) que $f(a)$ (resp. $f(b)$) est un maximum que si $f(x)$ varie encore continûment en a (resp. en b).
Si x' est entre a et b et si $f(x') > f(a), f(b)$ alors la valeur x_0 ne peut se trouver qu'entre a et b. [Weierstrass 1878 91][34]

Les deux dernières phrases ne sont compatibles qu'avec l'interprétation suivante : être continu entre a et b n'implique pas la continuité en a ou en b, « entre a et b » désigne ce que nous

[34] « *Im erstern Falle ist $f(x_0)$ ein Maximum. Nämlich $f(x_0)$ muß gleich g sein : Da nämlich $f(x)$-$f(x_0)$ durch genügend klein gewähltes $|x-x_0|$ so klein gemacht werden kann, als man will, anderseits aber f(x), da x in dem Intervalle x_0-δ...x_0+δ liegt, der Größe g beliebig nahe gebracht werden kann, so muß $f(x_0) = g$. (Wäre $f(x_0) = g+h$, so wäre $f(x)-f(x_0) = f(x)-g-h$, und f(x) könnte dem g nicht beliebig nahe kommen, wenn nicht h=0 ist.) Stimmt aber x_0 mit a oder b überein, so kann man nur dann von a resp.b behaupten, daß f(a) resp. f(b) eine Maximum ist, wenn f(x) sich auch noch in a resp. b stetig ändert. Liegt x' zwischen a und b und ist f(x')>f(a), f(b), so kann der Werth x_0 nur zwischen a und b liegen.* »

notons] a , b [. L'avant dernière phrase permet de rendre compte, par exemple, de la situation suivante : soit f définie sur $[a,b]$ (Weierstrass parle en effet de $f(a)$ et $f(b)$), continue sur $]a,b[$, tendant vers $+\infty$ à droite en a mais valant 0 en a ; a est bien tel que la borne supérieure des valeurs de la fonction sur $[a,b]$, à savoir $+\infty$, est égale à la borne supérieure des valeurs prise sur tout voisinage de a, sans pour autant que $f(a)$ soit le maximum de f. De plus, sous l'hypothèse forte de continuité sur $[a,b]$, on ne lit pas très clairement les deux temps : la borne supérieure est finie (i.e. la fonction est majorée), cette borne supérieure est atteinte (il y a donc un maximum absolu) ; c'est au contraire parce qu'elle est atteinte qu'elle est finie. Notons que la figure qui accompagne cet énoncé dans les notes de Hurwitz est bien simple et sans ambiguïté [Weierstrass 1878 89] :



Elle n'illustre toutefois que le cas où x_0 est intérieur à l'intervalle.

Si « continu entre *a* et *b* » ne signifie pas nécessairement continu aussi *en a et b*, qu'en est-il du théorème démontré quelques pages plus haut sur l'uniforme continuité ? Son énoncé était :

> On peut donner de la continuité d'une fonction la définition suivante : « $f(x)$ (où x ne peut prendre que des valeurs réelles) est continue entre les limites $x= a$ et $x = b$, si après avoir choisi une grandeur arbitrairement petite ε on peut trouver un nombre δ tel que, pour toutes valeurs x_1 et x_2 pour lesquelles $|x_1-x_2| < \delta$, on a aussi $|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$. »
> On doit montrer que cette définition coïncide avec celle donnée précédemment. [Weierstrass 1878 88][35]

La définition donnée précédemment est celle de la continuité en un point. Elle est donnée dans une toute autre partie de l'exposé, à l'occasion de l'étude des fonctions les plus simples que sont les fonctions rationnelles, et repose sur la notion de grandeurs devenant simultanément infiniment petites :

[35] « *Man kann für die Stetigkeit einer Funktion folgende definition geben : « f(x) (wo x nur reelle Werthe annehmen soll) ist stetig zwischen den Grenzen x = a und x = b, wenn nach Annahme einer beliebig kleinen Größe ε eine Zahl δ von der Art gefunden werden kann, daß für alle Werthe x_1 und x_2 für welche $|x_1-x_2| < \delta$ ist, auch $|f(x_1)-f(x_2)| <\varepsilon$ wird. » Es soll zeigen werden, daß diese Definition mit der früher gegebenen übereinstimmt.* »

On dit d'une grandeur variable – qu'elle soit limitée ou illimitée – qu'elle peut prendre des valeurs infiniment petites (ou qu'elle admet de telles valeurs) lorsque, parmi les valeurs qu'elle peut prendre, il se trouve des grandeurs plus petites que toute grandeur prise arbitrairement.

Dire qu'une grandeur variable x devient infiniment petite en même temps qu'une autre y, signifie : « Après avoir choisi une grandeur arbitrairement petite ε on peut fixer à x une limite δ de sorte que, pour toute valeur de x pour laquelle $|x| < \delta$, la valeur associée de $|y|$ soit $< \varepsilon$. » [Weierstrass 1878 57] [36]

L'équivalence des deux définitions de la continuité, en un point et sur un intervalle (que Weierstrass ne nomme pas ici uniforme continuité), n'est pas triviale puisque la continuité sur un intervalle ne se réduit pas à l'affirmation de la continuité en chaque point de l'intervalle : c'est donc bien, semble-t-il, le théorème d'uniforme continuité des fonctions continues sur un intervalle fermé borné que Weierstrass s'apprête à démontrer en utilisant l'existence de points d'accumulation. La définition de la continuité « entre a et b », i.e. de l'uniforme continuité, doit donc concerner l'intervalle fermé $[a,b]$. Dans la démonstration on constate que seul le cas où le point d'accumulation est intérieur à l'intervalle est traité ; contrairement au théorème sur le maximum, le cas d'une convergence vers le bord ne fait l'objet d'aucune explicitation.

On voit qu'une certaine difficulté du cours de Weierstrass de 1878 ressort à la fois de sa densité conceptuelle – mais c'est un point qui devait sembler plus ardu aux contemporains de Weierstrass qu'à des lecteurs formés dès l'enfance à la topologie ensembliste – et d'une expression n'empruntant pas toujours les chemins de la plus grande lisibilité. Il n'est pas besoin de faire la liste des éléments conceptuels rencontrés dans les quelques passages que nous avons cités et jouant un rôle dans l'histoire de l'évolution et de l'émergence explicite du couple local/global : notion fondamentale et non ambiguë de voisinage d'un point permettant de préciser la notion d'ensemble ouvert, de composante connexe d'un ouvert, de point d'accumulation d'une partie de $\mathbf{R}^n$, la notion de frontière et d'extérieur aussi (dans une partie que nous n'avons pas citée [Weierstrass 1878 63]) ; caractère fondamental de la complétude de $\mathbf{R}$, saisie sous l'angle de l'existence de bornes supérieures (dans la droite numérique

[36] « *Wir sagen von einer veränderliche Größe – es sei nun unbeschränkt oder beschränkt veränderlich –, sie könne unendlich kleine Werthe annehmen oder sie sei solche Werthe fähig, wenn unter den Werthen, die sie annehmen kann, Größen sind kleiner als jede beliebig klein angenommene Größe. Eine veränderliche Größe x wird mit einer andern y gleichzeitig unendlich klein, heißt : « Nach Annahme einer beliebig kleinen Größe ε läßt sich für x eine Grenze δ feststellen, so daß für jeden Werth von x, für welchen |x| <δ, der zugehörige Werth von |y| < ε wird.* »

achevée), permettant de substituer des démonstrations à des arguments heuristiques : qu'on se remémore l'existence du maximum « démontrée » par Serret ; distinction fondamentale, enfin, entre la continuité *en* un point et la continuité (uniforme) *sur* un domaine. La mise au point d'un mode d'exposition non narratif passe par une interprétation de la notion classique de grandeur variable comme simple partie de, selon le contexte, **R**, $\overline{\mathbf{R}}$ ou **C**, partie stricte si la variable n'est pas « illimitée ». Cette transition n'est toutefois pas sans produire une figure un peu mixte, dans laquelle seules des parties infinies sont considérées, et l'alternative discret/continu demeure structurante. Si la mise au centre de cette nouvelle approche plus ensembliste des notions de point d'accumulation et de borne supérieure est une avancée conceptuelle, la grande généralité même de ces notions – appartenance indifférente à la partie considérée, existence garantie sans hypothèse (dans la droite achevée) – n'invite pas toujours à insister sur le rôle des parties qui contiennent réellement leur bord, les fermés, et des parties non seulement « limitées » mais bornées ; notons aussi tout simplement qu'il manque un terme à la fois pour « fermé » et pour « borné » : la première notion n'apparaît pas explicitement, la seconde à travers une série de périphrases qui vont du parfaitement ensembliste et explicite, au plus traditionnel et imagé (« devenir égal à l'infini »). La notation *a…b* pour les intervalles est silencieuse sur l'inclusion ou non des bornes. Les cartes sont encore un peu plus brouillées du fait que les démonstrations portent le plus souvent sur un cas particulier de l'énoncé – souvent en ajoutant comme hypothèse que le domaine est borné – et n'envisagent le plus souvent pas le cas où la suite de points converge vers le bord du domaine. Certaines hypothèses manquent parfois, on l'a vu, dans l'énoncé même. Le bord est traité différemment dans deux énoncés qui auraient pu être bâtis strictement sur le même modèle : celui d'uniforme continuité et celui d'existence du maximum pour les fonctions continues sur un intervalle fermé borné, bornes incluses. Notre théorème du maximum est énoncé de manière un peu complexe, et comme simple corollaire d'un théorème principal portant sur des domaines non nécessairement fermés et des fonctions non nécessairement continues. Le lecteur n'est pas non plus guidé par des indications *méta* dans lesquelles Weierstrass préciserait le rôle et l'importance relative des différentes notions et énoncés, insisterait sur la nécessité de reformulation de notions jusque là vagues, ou soulignerait, enfin, des erreurs classiques à ne plus commettre.

ii. Le cours de 1886.

Avant de voir comment certains auditeurs ou lecteurs de Weierstrass vont mener ce travail de simplification, de reformulation ou d'explicitation des enjeux, on peut brièvement décrire un certain mouvement de précision des concepts observable en comparant le cours de 1878 et celui de l'été 1886. On retrouve, mais de manière beaucoup plus développée, le paragraphe consacré à la formulation en topologie ensembliste des notions classiquement exprimées en termes de grandeur variable :

> On entend par grandeur variable [*veränderliche Größe*] une grandeur définie de telle sorte qu'une infinité de valeurs satisfont à cette définition. Par exemple, dans le domaine des nombres formés à partir d'une unité principale, les nombres qui sont formés de plusieurs fois cette unité forment des grandeurs variables. On peut distinguer entre les grandeurs variables dites réelles et complexes, ces dernières étant composées à partir de deux unités principales ; on doit toutefois dans chaque cas particulier préciser si l'on veut étendre la définition à l'un ou à l'autre type de grandeurs. Souvent on ne dit variables que les grandeurs qui peuvent prendre une infinité de valeurs ; une grandeur est déjà variable, en soi et pour soi, qui peut prendre des valeurs distinctes. On dit qu'une grandeur est à variation non limitée [*unbeschränkt veränderlich*] lorsque sa définition ne contient absolument aucune limitation. De telles limitations de la variabilité peuvent être faites de plusieurs manières, par exemple lorsqu'on se restreint aux valeurs réelles entre deux limites [*zwei Grenzen*] a et b, ou aux valeurs complexes correspondant à un morceau de surface limité [*begrenzten Flächenstück*] du plan de construction [37]. A la définition de grandeur est ensuite lié le concept de limite [*Begriff der Grenze*] de grandeurs variables. Demandons-nous quel concept on doit lui associer au sens arithmétique. Soit x une grandeur variable et a un point tel que dans chacun de ses voisinages [*Nähe*] se trouve une infinité de points appartenant au défini ; on dit que a est une limite de la grandeur variable dans le cas où il n'appartient pas au défini. Il peut visiblement exister plusieurs telles limites. Le nombre de ces limites peut même être infini (…). [Weierstrass 1886 57][38]

[37] On trouve selon les prises de notes, *Konstruktionsebene* ou *Zahlenebene,* cf. note 63 [Weierstrass 1886 238]

[38] « *Unter einer veränderlichen Größe versteht man eine Größe, die so definiert ist, daß es unendlich viele Größen gibt, die der gegebenen Definition entsprechen. So z.B. bilden im Gebiete der aus einer Haupteinheit gebildeten Zahlen diejenigen Zahlen, welche vielfach der Haupteinheit sind, veränderliche Größen. Man kann zwischen sog. reellen und komplexen veränderlichen Größen, welche letztere aus zwei Haupteinheiten*

On voit que l'alternative discret/continu n'est plus évoquée. La condition d'infinité des valeurs associées à une grandeur variable, qui était exigée en 1878, n'est plus considérée que comme usuelle en 1886 ; la notion de grandeur variable ne recouvre toutefois pas encore la simple notion ensembliste de partie, puisque la persistance de l'alternative constante/variable exclut du monde des variables les domaines ne contenant qu'une seule valeur. Pour ce qui est de la notion de voisinage, déjà non ambiguë en 1878, elle est définie quelques pages plus loin. Weierstrass donne deux définitions de ce qu'il nomme un voisinage d'un point $(a_1,\dots,a_n)$, l'une en $|x_i-a_i| < d$ (i=1,…,n), l'autre utilisant la distance euclidienne [Weierstrass 1886 64]. Il fait remarquer un peu plus loin encore que ces deux notions de voisinage définissent la même notion de continuité d'une fonction en un point [Weierstrass 1886 73]. La notion de variabilité illimitée ne semble pas avoir changé et donc, si l'on s'en tient strictement à l'énoncé, ne pas coïncider avec la notion de partie bornée ; les deux exemples donnés ensuite sont malheureusement des exemples de parties bornées. Quelques lignes plus bas on trouve toutefois, à l'occasion de l'introduction de la notion de *continuum* un exemple de domaine non illimité et non borné :

> Si nous devons considérer, par exemple, une fonction de deux variables indépendantes, ces dernières peuvent être soit à variations illimités – leur domaine est alors la totalité du plan infini –, soit définies pour un domaine limité. On dit alors couramment qu'on ne les considère que dans une partie [*Teil*] du plan ; on se rend toutefois compte que cette manière de s'exprimer ne convient pas, en considérant que souvent seuls des points isolés dans le plan sont exclus. [Weierstrass 1886 65][39]

La notion de partie bornée d'une multiplicité n-uple (entendre ici $\mathbf{R}^n$) fait l'objet d'une définition explicite : les points d'une famille ne s'étendent pas à l'infini (*ganz im Endlichen*

---

zusammengesetzt sind, unterscheiden; es muß aber in jedem einzelnen Falle angegeben werden, ob man die Definition auf die eine oder die andere Art von Größen ausdehnen will. Gewöhnlich nennt man also nur solche Größen veränderlich, die unendlich viele Werte annehmen können; an und für sich ist eine Größe schon veränderlich, die überhaupt verschiedene Werte annehmen kann. Man nennt unbeschränkt veränderlich die Größen, bei deren Definition man überhaupt keine Beschränkung macht. Solche Beschränkungen der Veränderlichkeit können in verschiedener Weise gemacht werden, so z.B. wenn man sich auf die reellen Werte zwischen zwei Grenzen a und b oder auf die komplexen Wert beschränkt, die einem begrenzten Flächenstück der Konstruktionsebene entsprechen. Mit der Definition einer veränderlichen Größe hängt nun zusammen der Begriff der Grenze von veränderlichen Größen. Es fragt sich, welchen Begriff man damit im arithmetischen Sinne zu verbinden hat. Ist x eine veränderliche Größe und ist a eine solche Stelle, daß in jeder Nähe derselben es unendlich viele gibt, die zu den definierten gehören, so ist a eine Grenze der veränderlichen Größe, falls a nicht selber zu den definierten gehört. Offenbar kann es solcher Grenzen mehrere geben. Ja, die Zahl solcher Grenzstellen kann sogar unendlich groß sein (…) »

[39] « *Haben wir z.B. eine Funktion zweier voneinander unabhängiger Variabeln zu betrachten, so können diese entweder unbeschränkt veränderlich, dann ist ihr Bereich die ganze unendliche Ebene, oder man kann sie für einen begrenzten Bereich definieren. Mann sagt dann gewöhnlich, man betrachtet sie nur für einen Teil der*

liegen) lorsque les valeurs absolues de $x_1,\ldots,x_n$ ne dépassent pas une certaine limite [Weierstrass 1886 64]. La notion de limite introduite en fin de citation est complétée un peu plus loin par celle de point d'accumulation : ce dernier peut ou non appartenir au domaine considéré ; il n'est appelé limite (*Grenzstelle*) que lorsqu'il n'y appartient pas. En cohérence avec cette condition imposée à la notion de point limite, la notion de frontière (*Grenze*) d'une partie n'est définie que dans le cas d'un *continuum*, d'un ouvert donc : un point appartient à la frontière d'une partie définie si chacun de ses voisinages contient des points du défini et des points qui n'appartiennent pas au défini [Weierstrass 1886 71] [40]. On se souvient enfin qu'en 1878 la notion de *continuum* coïncidait avec notre notion d'ouvert, sans contrainte de connexité : on peut toutefois considérer que ce choix du terme *continuum* était alors inapproprié, le terme même de *continuum* évoquant la connexité ; la contrainte de connexité est par contre présente en 1886 dans la définition du *continuum* [Weierstrass 1886 65], une connexité par bande d'ailleurs et non par arc, l'objectif étant de permettre le prolongement analytique.

On observe donc, s'appuyant sur une notion inchangée de voisinage d'un point, la poursuite du mouvement de passage du vocabulaire de la grandeur variable à celui des ensembles, ainsi qu'un travail visant à lever l'ambiguïté de certains termes usuels dans la désignations des propriétés du lieu. L'énoncé des théorèmes relatifs au comportement des fonctions continues sur les domaines fermés et bornés devrait donc gagner en lisibilité. Innovation par rapport à 1878, le cours de 1886 contient une notion de partie (ici les « points définis ») fermée :

> Lorsque tous les points au voisinage desquels se trouve une infinité des points définis appartiennent eux-mêmes au défini, on dit que l'ensemble de points [*Punktmenge*] est fermé [*abgeschlossen*]. [Weierstrass 1886 66][41]

L'expression « au voisinage duquel se trouvent une infinité de points » est ambiguë, ambiguïté que nous avons conservée dans la traduction alors que l'éditeur du texte en 1988 l'a levée en remplaçant par « dans chaque voisinage duquel ». Il ne s'agit bien entendu que d'un petit relâchement de l'expression, toute la construction de Weierstrass reposant clairement sur la possibilité de parler d'*un* voisinage et de *chaque* voisinage pour définir les notions locales, et non seulement sur une idée vague de travail *au* voisinage d'un point. Après cette définition, Weierstrass montre qu'à tout ensemble de points est naturellement associé un ensemble

---

Ebene ; daß aber diese Ausdruckweise nicht passend ist, erkennt man, wenn man bedenkt, daß oft nur einzelne Punkte der Ebene ausgeschlossen sind. »

[40] On prendra garde qu'un point de la frontière (*Grenze*) peut appartenir à la partie considérée, ce qui n'est pas le cas d'un point limite (*Grenzstelle*) selon la définition de Weierstrass.

fermé, obtenu en ajoutant au premier tous ses points limites ; il montre aussi qu'un tel ensemble fermé définit au sein de la multiplicité n-uple un ou plusieurs *continuums*, regroupant les points qui lui sont extérieurs. L'introduction explicite des fermés invite à un retour sur le vocabulaire précédemment introduit : les *continuums* (i.e. ouverts connexes) seront désormais appelés des *continuums* non fermés (*unabgeschlossen*), ils deviennent après adjonction de leurs points frontière des *continuums* fermés [Weierstrass 1886 73].

Le cours de 1886 ne reprend malheureusement pas le théorème du maximum, on doit donc s'appuyer sur le théorème d'uniforme continuité pour voir comment est formulé le caractère spécifique des domaines de validité. Avant d'introduire les deux notions de continuité, Weierstrass précise qu'il travaille sur un ouvert connexe :

> Définissons maintenant une fonction de n variables u_1, $u_2,\ldots,u_n$ pour un continuum non fermé, sans exclure qu'il puisse consister en la totalité de la multiplicité n-dimensionnelle. Nous excluons cependant les frontières du continuum, tout comme tout à l'heure pour les fonctions d'une variable, qu'elles soient définies pour toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ ou entre a et b, nous laissions indéterminé la question de savoir si les fonctions avaient un sens [*Sinn*] en ces limites. [Weierstrass 1886 73] [42]

Le choix d'un domaine ouvert connexe, non nécessairement borné, est ici parfaitement explicite, et bien adapté à la définition de la notion de continuité en un point d'une fonction définie sur ce domaine. Weierstrass rappelle ensuite la définition de l'uniforme continuité (qu'il appelle bien *gleichmäßige Stetigkeit*) pour une fonction d'une variable sur un intervalle (a…b), borné donc mais dont rien n'est dit sur le caractère fermé, et entreprend d'établir le lien entre les deux notions de continuité en partant de ce qu'il nomme le théorème fondamental de la science des grandeurs (*Fundamentalsatz aus der Größenlehre* [Weierstrass 1886 74] : l'existence d'un point d'accumulation (fini ou non) pour toute partie infinie de $\overline{R}$ [Weierstrass 1886 60]. La démonstration de l'uniforme continuité (définie sur (a…b), rappelons-le) sous hypothèse de continuité en chaque point est exactement la même qu'en 1878, et à aucun moment il n'y est évoqué le cas où la suite de points convergerait vers le bord. En cours de démonstration Weierstrass est amené à expliciter ce qu'il met derrière la

---

[41] « *Gehören nun alle jene Stellen, in deren Nähe unendlich viele definierte Stellen liegen, selber zu den definierten, so nennt man die Punktmenge eine abgeschlossene.* »

[42] « *Wir definieren jetzt eine Funktion von n Variabeln* $u_1,u_2,\ldots,u_n$ *für ein unabgeschlossene Kontinuum, wobei nicht ausgeschlossen ist, daß die gesammte n-fach Mannigfaltigkeit das Kontinuum bilde. Die Grenzen des Kontinuums nehmen wir jedoch aus, gerade so, wie wir früher bei Gelegenheit der Funktionen einer Variabeln, sei es wo diese für alle Werte von* $-\infty$ *bis* $+\infty$ *oder zwischen a und b definierten, es unbestimmt ließen, ob die Funktion für diese Grenzstellen auch einen Sinn habe.* »

notation ($\frac{\mu}{n} \dots \frac{\mu+1}{n}$), où n est un entier positif provisoirement fixé et μ un entier parcourant **Z** : il entend par là $\frac{\mu}{n} \leq x < \frac{\mu+1}{n}$ [Weierstrass 1886 74]; cette explicitation est adaptée au dessein d'obtenir une partition de **R**, rien ne laisse penser qu'elle a valeur générale. Après la démonstration, la conclusion et son commentaire n'insistent nullement sur le rôle spécifique des intervalles fermés bornés :

> La proposition est ainsi entièrement démontrée ; la continuité uniforme est déduite comme conséquence de la continuité. L'importance de cette proposition réside en ceci que pour une fonction particulière dont on a prouvé la continuité, la preuve de la continuité uniforme est désormais superflue, une preuve vraisemblablement très fastidieuse dans beaucoup de cas particuliers. [Weierstrass 1886 76][43]

Weierstrass donne ensuite la démonstration pour n variables en l'annonçant ainsi :

> Poursuivons en étendant maintenant aux fonctions d'un nombre quelconque de variables la proposition démontrée pour une variable. Soit $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une fonction univoque des n variables $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, définie pour un continuum fermé ou non fermé, continue dans le domaine où elle est définie. [Weierstrass 1886 76][44]

La formulation est, au mieux, malheureuse. On apprend aussi en cours de démonstration que la notation ($a..b$) est ici à interpréter comme $a \leq x \leq b$.

2. Réception et usages d'un énoncé.

On voit qu'en dépit de la mise au point d'un arsenal conceptuel et d'un vocabulaire précis – voisinage, *continuum* non-fermé (i.e. ouvert connexe), point d'accumulation, partie fermée, frontière, partie ne s'étendant pas à l'infini (i.e. bornée), continuité en chaque point ou uniforme sur un domaine, borne supérieure – on peine à lire chez Weierstrass – du moins dans les notes de cours – des énoncés simples de quelques théorèmes globaux relatifs aux parties fermées et bornées de $\mathbf{R}^n$. On y trouve aussi peu d'indications *méta* sur le mode de lecture attendu, précisant le rôle de ces énoncés, explicitant ce qu'ils illustrent ; on ne trouve donc en

[43] « *Damit ist der Satz vollständig bewiesen; die gleichmäßige Stetigkeit ist als eine Folge der Stetigkeit überhaupt abgeleitet worden. Die Wichtigkeit dieses Satzes besteht eben darin, daß man bei einer speziellen Funktion, deren Stetigkeit nachgewiesen ist, des Nachweis der gleimäßigen Stetigkeit nunmehr überhoben ist, ein Nachweis, der in speziellen Fällen wahrscheinlich oft sehr mühsam sein würde.* »

[44] « *Wir schreiten nunmmehr dazu fort, den für Funktionen einer Variablen bewiesene Satz auf Funktionen beliebig vieler Variablen auszudehnen. Es sei $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ eine eindeutige Funktion von n Variablen* (u_1,

particulier aucune constitution explicite d'une catégorie « exemples d'énoncés globaux en Analyse », et le théorème sur le maximum n'est jamais mis au service d'une distinction entre approches locales et globales dans la description des fonctions. Il nous reste à voir comment le travail d'interprétation et de reformulation a été fait par la première génération des lecteurs ou auditeurs de ces cours de Weierstrass. Nous procéderons simplement par ordre chronologique de publication en lisant successivement Cantor, Heine et Darboux ; nous élargirons ensuite le type de textes en comparant les utilisations de ce théorème du maximum par Klein et Poincaré, dans leurs travaux croisés sur les fonctions fuchsiennes.

i. Cantor.

Cantor utilise le théorème du maximum dans un bref article de 1870 sur l'unicité de la représentation par une série trigonométrique [Cantor 1870]. Le ressort principal de sa démonstration est le lemme suivant, dans lequel le « quotient différentiel second » de F désigne la limite, quand α tend vers 0, de $\dfrac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{\alpha^2}$:

> Si l'on s'en tient pour la fonction $F(x)$ aux deux données :
>
> I. elle est continue au voisinage [*in der Nähe*] de chacune des valeurs de x
>
> II. la limite de son quotient différentiel second est nulle pour chaque valeur de x lorsque α diminue à l'infini
>
> on peut alors montrer que $F(x)$ est une fonction entière du premier degré $cx+c'$. La preuve suivante m'a été communiquée par Monsieur Schwarz (Zürich). [Cantor 1870 141][45]

Sans entrer dans le détail, la démonstration suit les grandes lignes de celle du théorème de l'égalité des accroissements finis à la manière d'Ossian Bonnet : on introduit une fonction auxiliaire et l'on procède par l'absurde en localisant la contradiction avec les hypothèses infinitésimales (ici sur le quotient différentiel second) au point où un maximum est atteint. Si la reprise de ce procédé de démonstration est en soi intéressante pour l'histoire des modes de démonstrations de théorèmes globaux, c'est pour la note infrapaginale qui l'accompagne que nous lisons cet article de Cantor :

$u_2,\ldots,u_n$), die für ein abgeschlossenes oder unabgeschlossenes Kontinuum definiert ist, welche in dem Gebiete, für welche sie definiert ist, stetig ist. »

[45] « *Halten wir diese beiden data für die Function F(x) fest : I. dass sie stetig ist in der Nähe eines jeden Werthes von x, II. Dass die Grenze ihres zweiten Differenzquotienten mit unendlich abnehmendem α für jeden Werth von*

> Cette démonstration repose essentiellement sur la proposition qu'on trouve usuellement, avec sa démonstration, dans les cours de Weierstrass : « Une fonction continue φ(x) donnée dans un intervalle (a…b) (limites incluses) de la variable réelle x, *atteint* le maximum g des valeurs qu'elle peut prendre, pour au moins une valeur x_0 de la variable, de sorte que $\varphi(x_0) = g$. »
>
> Ossian Bonnet a construit une démonstration du théorème fondamental du calcul différentiel reposant sur cette démonstration ; on la trouve dans le Cours de calcul différentiel et intégral de J.A. Serret, tome 1 p.17-19, Paris 1868. [Cantor 1870 141] [46]

Le théorème de Weierstrass et le procédé de démonstration inspiré de Bonnet sont encore suffisamment neufs en 1870 pour que leur usage puisse mériter d'être explicitement signalé, fût-ce en note. Dégagé de tout objectif de mise en place de la topologie de $\mathbf{R}^n$, le théorème de Weierstrass est cité dans sa version minimale mais simple, avec explicitation du caractère fermé de l'intervalle ; explicitation qui tend à confirmer qu'il ne s'agit pas là d'une convention de lecture universelle de la notation (*a*…*b*) ou du terme « intervalle ». Cantor revient l'année suivante sur son article de 1870 en publiant, toujours dans le Journal de Crelle [Cantor 1871], un petit article de compléments à sa démonstration. Si les deux premiers compléments sont d'une nature classique, le troisième porte uniquement sur un point de formulation :

> Qu'on me permette enfin de modifier une *expression* [*Ausdruck*] du travail en question.
>
> J'y introduisais dans une note la proposition :
>
> « Une fonction continue donnée dans un intervalle (*a*…*b*) (les limites incluses) de la variable réelle x atteint le *maximum g* des valeurs qu'elle peut prendre, pour au moins une valeur x_0 de la variable, de sorte que $\varphi(x_0) = g$. »
>
> J'entendais par là, comme il ressort du sens, par *maximum* non la notion habituellement liée à ce terme (qui contient déjà le fait d'être atteint), mais la *limite supérieure* [*Obere Grenze*] de la fonctions φ(x), et c'est cette expression qu'il faut préférer.

---

x gleich Null ist, so lässt sich daraus zeigen, dass F(x) eine ganze Function ersten Grades cx+c' ist. Der folgende Beweis hiervon ist mir von Herrn Schwarz in Zürich mitgetheilt worden. »

[46] « *Dieser Beweis stützt sich im Wesentlichen auf den in den Vorlesungen des Herrn Weierstrass häufig vorkonnenden und bewiesen Satz : « Eine in einem Intervalle (a…b) (die Grenzen incl.) der reellen Veränderlichen x gegebene, stetige Function φ(x)* erreicht *das Maximum g der Werthe, welche φ(x) annehmen kann, zum Mindesten für einen Werth x_0 der Veränderlichen, so dass $\varphi(x_0) = g$. Einen ähnlichen, auch hierauf beruhenden Beweis für den Fundamentalsatz der Differentialrechnung hat* Ossian Bonnet *geführt ; derselbe*

De la notion *d'ensemble de valeurs* [*Wertmenge*] *donné* (défini) dans un domaine fini on déduit qu'il possède toujours une limite supérieure, c'est-à-*dire une grandeur g entretenant avec l'ensemble de valeurs la relation suivante : pour une valeur positive quelconque fixée ε, il existe au moins une valeur de l'ensemble qui soit plus grande que g-ε et plus petite que (ou égale à) g, mais il n'existe aucune valeur de l'ensemble qui soit plus grande que g.*

Prenons à titre d'exemple l'ensemble des valeurs constitué de la totalité des valeurs prises par une fonction finie, univoque $\varphi(x)$ donnée dans un intervalle $(a \ldots b)$ (en incluant les limites), cet ensemble de valeurs a donc une limite supérieure. Si l'on ajoute l'hypothèse de continuité de $\varphi(x)$ tout du long, on déduit de plus que la limite supérieure g est aussi atteinte par la fonction, c'est-à-dire qu'il existe une valeur x_0 de x pour laquelle $\varphi(x_0) = g$. C'est là le sens de la proposition mentionnée, conformément aux sources citées. [Cantor 1871 295][47]

Cantor explicite dans cette note ce qui différencie le maximum *à la* Weierstrass de ce qu'on trouve dans la démonstration du manuel de Serret. Deux aspects sont soulignés par Cantor : le premier porte sur la notion de valeur *atteinte*, la notion de borne supérieure ne préjugeant pas, contrairement à celle de maximum, du fait d'être atteint. Par contrecoup, la question « la borne supérieure est-elle atteinte ? » devient clairement formulable. Le deuxième aspect souligné très longuement par Cantor réside dans la distinction entre des aspects ensemblistes et des aspects fonctionnels, les premiers plus fondamentaux que les seconds au sens où l'on peut parler d'ensembles sans parler de fonctions, alors qu'on a besoin des ensembles pour parler avec rigueur des fonctions. La formulation simple du théorème du maximum est ainsi

---

findet sich in « Cours de calcul différentiel et intégral », par J.A. Serret*, Paris, 1868 » im ersten Bande, Seite 17-19.* »

[47] « *Schliesslich sei mir gestattet einen* Ausdruck *in der hier besprochene Arbeit zu verändern. Ich führe daselbst in einer Note den Satz an : « Eine in einem Intervalle (a…b) (incl. Der Grenzen) der reellen Veränderlichen x gegebene, stetige Function φ(x) erreicht das* Maximum *g der Werthe, welche sie annehmen kann, zu Mindesten für einen Werth x_0 der Veränderlichen, so dass φ(x_0) = g. » Ich verstand hierbei, wie aus dem Sinne hervorgeht, unter* Maximum *nicht den gewöhnlich mit diesem Worte verbundenen Begriff (in welchem das Erreichtwerden schon liegt), sondern die* obere Grenze *der Funktionswerth von φ(x) ; und es würde dem entsprechend auch der letzte Ausdruck vorzuziehen sein. – Aus dem Begriffe einer in einem endlichen Bereiche* gegebenen *(definierten) Werthmenge* wird gefolgert, dass dieselbe stets eine obere Grenze besitzt, *d.i. eine Grösse g, welche eine solche Beziehung zur Werthmenge hat, dass bei beliebige angenommener positiver Grösse ε zum wenigsten ein Werth der Menge vorhanden ist, der grösser als g-ε und kleiner oder gleich g ist, dass es aber keinen Werth der Menge giebt, welcher grösser wäre als g. – Nimmt man beispielsweise die Werthmenge, welche aus sämmtlichen Werthen einer in einem Intervalle (a…b) (mit Einschluss der grenzen) gegebenen, endlichen, eindeutigen Function φ(x) besteht, so hat also diese Werthmenge eine obere Grenze g. Fügt man noch die Bedingung der durchgängigen Stetigkeit von φ(x) hinzu, so folgert man weiter, dass die obere Grenze g von der Function auch erreicht wird, d.h. dass es eine Werth x_0 von x giebt, für welchen φ(x_0) = g. Dies ist der Sinn des angeführten Satzes, im Einklange mit der für ihn angeführten Quelle.* »

décomposée en trois temps : (1) une partie finie (comprendre « bornée ») de **R** admet une borne supérieure – aspect purement ensembliste ; (2) à une fonction (continue ou non) définie sur un intervalle fermé borné on peut associer un ensemble de valeurs, que Cantor n'appelle pas encore l'ensemble image ; la question de savoir si cet ensemble contient sa borne supérieure se pose alors ; (3) la réponse est positive si l'on suppose la fonction continue. Notons que Cantor n'évoque pas le fait qu'on peut démontrer qu'une fonction continue sur un intervalle fermé et borné est elle-même bornée : il semble l'inclure dans ses hypothèses.

ii. Heine.

On trouve le théorème du maximum en 1872 dans un contexte assez différent, dans l'article de Heine sur les *Eléments de théorie des fonctions*[48]. L'objectif est explicitement de présenter au public les notions fondamentales enseignées mais non publiées par Weierstrass. L'article se compose de deux parties d'égales longueurs, la première consacrée à la construction des nombres irrationnels à partir des rationnels selon le procédé de Cantor (que Heine remercie au passage). La seconde partie est consacrée aux fonctions et présente successivement deux aspects élémentaires assez différents : le premier consiste à établir l'existence de quelques fonctions simples, les polynômes et les fonctions circulaires (définies par leur série entière), la question étant d'établir que leur définition n'est pas ambiguë pour les irrationnels ; le second aspect concerne la continuité, sa définition et les conséquences qu'on peut en tirer. C'est bien sûr dans ce dernier temps de l'exposé qu'on trouve le théorème du maximum, ainsi qu'un travail de mise en place précis des différents aspects de la continuité. Ainsi la continuité « en une valeur déterminée particulière » [49], dont Heine précise de manière informelle :

> Une fonction n'est qu'un agrégat de valeurs particulières [*einzelnen Werthen*] (A. §1. Def.) ; c'est la continuité qui, la première, instaure une liaison [*Zusammenhang*] entre elles, telle que chacune découle des valeurs au voisinage. [Heine 1872 182] [50]

On voit comment ce type d'exposé dont le point de départ est la fonction (univoque) la plus générale, celle sur laquelle on ne fait aucune hypothèse, amène à ajouter peu à peu des hypothèses dont on essaye non seulement de déduire des conséquences, mais aussi – plus informellement – de préciser la nature ; ce mode d'exposition, qui va peu à peu s'imposer

[48] *Die Elemente der Functionenlehre* [Heine 1872].
[49] « *bei einem bestimmten einzelnen Werthe* ».
[50] « *Eine Function ist nur ein Aggregat von einzelnen Werthen (A. §1 Def.) ; ein Zusammenhang zwischen denselben, so dass ein Werth aus den Werthen in der Umgebung ergiebt, wird erst durch die Continuität hergestellt.* »

dans les bons manuels d'Analyse à partir du modèle donné par cet article de Heine ou de celui de du Bois-Reymond [du Bois-Reymond 1875], ouvre un espace à remplir par un discours *méta* isolant et caractérisant – à mesure que les fonctions étudiées sont soumises à des hypothèses plus riches – des familles de propriétés … on n'est encore qu'au niveau des conditions de possibilité de formation d'une catégorie des « propriétés locales », dont on verra qu'elle n'est constituée explicitement qu'une génération plus tard. L'échantillon de ce type de discours qu'on lit dans cette brève remarque de Heine est encore modeste : on peut toutefois y voir la distinction entre le niveau ponctuel et le niveau local ; le niveau ponctuel est le seul niveau d'accès aux fonctions les plus générales, les valeurs étant comme isolées les unes des autres avant que la continuité n'instaure une solidarité locale. Le terme « voisinage » n'est pas défini dans le texte de Heine, non plus qu'aucune des notions de topologie ensembliste. Cette remarque annonce en fait le principal théorème relatif à la continuité en un point, affirmant que si f est continue en X alors $f(x_n)$ tend vers f(X) pour toute suite (x_n) de valeurs tendant vers X. Heine en déduit qu'une fonction continue est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur les rationnels. Après la continuité en une unique valeur déterminée, il introduit deux nouvelles notions de continuité :

> *Définition*. Une fonction $f(x)$ est dite *continue* de $x = a$ jusqu'à $x = b$ lorsqu'elle est continue (B.§2, Def.1) en chaque valeur particulière $x =$ X entre $x = a$ et $x = b$, valeurs a et b incluses ; elle est dite uniformément continue de $x = a$ jusqu'à $x = b$ (…) [Heine 1872 184][51]

Le travail est ici plus explicite que chez Weierstrass, tant par la précision sur l'inclusion des bornes que par l'autonomisation de la notion de continuité sur un intervalle comme affirmation universelle de la propriété syntaxiquement ponctuelle, alors que Weierstrass comparait directement continuité en un point et continuité uniforme sur un intervalle. Cette convention d'inclusion des bornes de l'intervalle et l'usage systématique de la syntaxe « la fonction est [*propriété*] sur [*domaine*] » ne laisse chez Heine aucune ambiguïté dans des énoncés tels :

> *Proposition*. Toute puissance entière de x est uniformément continue entre deux limites données quelconques. [Heine 1872 184][52]

Après démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, l'auteur énonce :

---

[51] « Definition. *Eine Function f(x) heisst* continuirlich *von x=a bis x=b, wenn sie bei jedem einzelnen Werthe x=X zwischen x=a und x=b, mit Einschluss der Werthe a und b, continuirlich ist (B.§2, Def.1). Sie heisst gleichmässig continuirlich von x=a bis x=b* (…) »

[52] « Lehrsatz. *Jede ganze Potenz von x ist zwischen irgend welchen gegebenen Grenzen gleichmässig continuirlich.* »

> *Proposition*. Si la fonction *f*(x), continue (pour chaque valeur particulière de x) de $x = a$ jusqu'à $x = b$ n'est jamais négative de $x = a$ à $x = b$, mais devient entre ces limites plus petite que toute grandeur assignable, alors elle *atteint* aussi la valeur nulle. [Heine 1872 186] [53]

Le rappel du domaine d'étude est presque insistant (deux « de $x=a$ jusqu'à $x=b$ » et un « entre ces limites ») et accompagne chacune des trois hypothèses. La démonstration procède par intervalles emboîtés sur lesquels la fonction « devient arbitrairement petite ». Les cas de convergence à l'intérieur ou au bord ne sont pas distingués. Quelques petites bizarreries, du moins pour un lecteur du 21[ème] siècle, permettent de conjecturer le rôle que Heine fait jouer à cette démonstration. Ainsi commence-t-elle par :

> Puisque *f*(x) possède une valeur déterminée pour chaque x déterminé, elle ne peut pour un tel x devenir inférieure à toute grandeur assignable qu'en s'y annulant. Soit donc maintenant x_1 et x_2 deux nombres tels qu'ils s'en trouvent entre eux pour lesquels *f*(x) devient arbitrairement petite ; (…) [Heine 1872 186] [54]

Le travail porte donc, semble-t-il, sur la notion d'arbitrairement petit. La première partie de l'article, consacrée aux irrationnels, insistait sur le fait qu'une suite tendant vers 0 *est* le nombre zéro lui-même, de même que toute nombre est une classe d'équivalence de suites de rationnels ; que le système des nombres ainsi construit ne laisse aucune place pour des infiniment petits. L'objectif de la partie fonctionnelle, annoncé dès l'introduction générale, est de démontrer les propriétés des fonctions

> (…) valides pour la définition des nombres irrationnels mise ci-dessous au fondement, dans laquelle on dira que des nombres sont égaux s'ils différent de moins que toute grandeur assignable (…) [Heine 1872 172][55]

Ainsi éliminée pour les nombres eux-mêmes, la question de l'arbitrairement petit peut encore se poser pour les fonctions : c'est ce que présente le début de la démonstration ; la proposition garantissant que 0 est atteint permet d'éliminer l'arbitrairement petit du domaine des fonctions. Nous ne faisons certes que proposer ici une hypothèse de lecture, Heine ne faisant aucun commentaire sur cette démonstration ; mais cette hypothèse nous semble pouvoir s'appuyer sur l'objectif général et explicite de l'article, sur les premières phrases de la

[53] « Lehrsatz. *Wenn die (für jedes einzelne x) von x=a bis x=b continuirliche Function f(x) von x=a bis x=b nie negativ, aber zwischen diesen Grenzen kleiner wird als jede angebbare Grösse, so* erreicht *sie auch den Werth Null.* »

[54] « *Da f(x) für jedes bestimmte x auch einen bestimmten Werth besitzt, so kann es für ein solches x nur dann kleiner als jede angebbare Grösse sein, wenn es dort verschwindet. Es seien nun* x_1 *und* x_2 *zwei derartigen Zahlen, dass zwischen ihnen andere liegen, für welche f(x) beliebig klein wird ;* (…) »

démonstration ainsi, par exemple, que sur l'absence de tout contre-exemple faisant intervenir une fonction discontinue, ou une fonction continue sur un domaine qui ne fût pas un intervalle fermé et borné. De sa proposition sur le zéro, Heine tire sans plus de commentaire ni définition des termes introduits :

> *Corollaire*. Si une fonction continue (pour chaque valeur particulière) de $x = a$ jusqu'à $x = b$ ne prend pas partout une même valeur, alors elle atteint pour une valeur déterminée de x un Maximum, de même un Minimum. [Heine 1872 188][56]

En l'absence de démonstration, on ne peut se prononcer sur la manière dont Heine aurait articulé les deux temps, démontrer tout d'abord qu'une fonction continue sur un tel intervalle est bornée, conclure en utilisant le théorème précédent, qui garantit que la borne est atteinte. On va voir que ce point est délicat chez Darboux.

iii. Darboux.

Non content de traduire et de publier des articles de Weierstrass dans son *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, Gaston Darboux donne au début des années 1870 deux articles dans lesquels il montre son talent dans l'Analyse telle qu'on ne la pratique alors qu'en Allemagne, s'inspirant de et citant Weierstrass, Schwarz, Hankel (et son principe de condensation des singularités) ou le Riemann de l'article sur les séries trigonométriques. Le premier de ces articles, *Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions* [Darboux 1872] est, contrairement aux articles de Cantor et Heine, intégralement consacré à la démonstration du théorème du maximum – ici pour les fonctions de deux variables. Il présente entre autres, pour nous, l'intérêt de motiver la recherche dans un long passage introductif :

> Parmi toutes les démonstrations connues du théorème fondamental de la théorie des équations, une des plus simples et des plus fréquemment reproduites est certainement celle que Cauchy a donné dans le *Cours d'Analyse algébrique*. L'illustre géomètre, voulant démontrer que toute équation algébrique $f(z) = 0$ a une racine réelle ou imaginaire, établit d'une manière irréprochable que le module R de la fonction $f(z)$ ne peut avoir d'autre minimum que zéro. (…) Cependant la démonstration de Cauchy et toutes celles qu'on peut lui substituer et qui sont fondées sur la théorie des contours,

[55] « (…) *für die unten zu Grunde gelegte Definition der irrationalen Zahlen gültig, bei welcher Zahlen gleich gennant werden, die sich um keine noch so kleine angebbare Zahl unterscheiden* (…) »

[56] « Folgerung. *Wenn eine (für alle einzelne Werthe) von x=a bis x=b continuirliche Function nicht überall gleiche Werthe besitzt, so erreicht sie für einen bestimmten Werth von x ein Maximum und ebenso ein Minimum.* »

> pèchent en un point essentiel, que M. O. Bonnet a signalé le premier. Elles admettent toutes, en effet, que si une fonction continue reste comprise entre deux limites fixes, et ne décroît pas, par conséquent, en dessous d'une certaine quantité, *elle atteint nécessairement la valeur qui marque la limite inférieure de toutes celles qu'elle peut avoir*.
>
> Ainsi la démonstration de Cauchy prouve bien que, si le module a un minimum, ce minimum ne peut être que zéro ; mais l'existence même de la valeur faisant acquérir cette valeur minimum n'est pas démontrée et demeure sujette à contestation. On peut d'ailleurs former des fonctions prenant, par exemple, toutes les valeurs supérieures à un nombre a, sans jamais acquérir une valeur égale à ce nombre. Il est vrai que ces fonctions ne sont pas continues ; mais, du moment qu'un principe n'est pas vrai pour toutes les fonctions, il n'est pas contenu clairement dans la définition des fonctions continues, il devient indispensable d'en donner la démonstration. [Darboux 1872 307]

Le rôle du théorème est ici clair : parmi les rôles possibles – illustrer par une application le théorème fondamental d'existence d'une borne supérieure dans la droite achevée (comme chez Weierstrass), illustrer le couplage dans les propositions d'Analyse entre aspects purement topologico-ensemblistes et aspects proprement fonctionnels (comme chez Cantor), tirer une conséquence d'une construction des irrationnels à partir des rationnels ne laissant aucune place aux grandeurs arbitrairement petites (comme chez Heine), illustrer le fait qu'on peut établir des résultats d'Analyse (autres que le théorème des valeurs intermédiaires) sous la seule hypothèse de continuité (comme chez Weierstrass et Heine) – Darboux choisit celui de la distinction entre borne inférieure et minimum ; cette question du « atteint ou pas » était bien sûr aussi présente chez Weierstrass, Cantor et Heine. Une partie des usages de ce théorème semble n'avoir jamais été dans l'ordre des préoccupations de Darboux : ni dans cet article ni dans le suivant, en 1875, il n'est fait allusion à la construction des réels à partir des rationnels ; la complétude de **R** – dans sa version « intervalles emboîtés » – est systématiquement utilisée par Darboux, sans jamais mériter une remarque. En fait, les seuls rôles sur lesquels *aucun* de nos auteurs ne met l'accent explicitement sont ceux que nous allions chercher : distinguer entre propriété locale et globale, entre apport de l'outil du calcul différentiel et l'apport de la topologie ensembliste ; illustrer aussi la spécificité des domaines que sont les parties fermées et bornées de **R** ou $\mathbf{R}^n$ dans les énoncés globaux et l'importance de la structure syntaxique « la fonction est [*propriété*] sur [*domaine*] » pour des énoncés corrects en Analyse. Le fait que Darboux n'imagine, dans la fin de son introduction, que des fonctions discontinues pour ne pas atteindre la borne inférieure de leurs valeurs ne laisse pas présager un accent mis sur la compacité. C'est confirmé à la lecture du théorème tel que Darboux l'énonce :

> Si une fonction continue de deux variables prend, pour tous les points situés à l'intérieur d'un contour fermé, des valeurs qui demeurent comprises entre deux nombres H et K, elle obtient nécessairement pour un système au moins de valeurs des deux variables indépendantes, la valeur qui marque la limite minimum ou maximum de toutes les valeurs qu'elle peut prendre. [Darboux 1872 308]

Si le caractère borné du domaine est bien marqué, la question de savoir si la fonction doit être définie et continue y compris sur le contour, ou si le système de valeurs réalisant le minimum ou le maximum peut être sur le contour, n'est pas évoquée. Ici bien sûr le terme « intérieur » n'est pas à prendre au sens topologique, et on peut parfaitement imaginer que la convention de lecture de ce type d'énoncé en France en 1872 est que la frontière est incluse dans le domaine ; on peut aussi penser qu'il n'y a justement *pas* de convention de lecture sur ce point. On n'est en tout cas pas fixé en lisant la démonstration de Darboux. Comme Weierstrass, celui-ci découpe son domaine en rectangles de taille provisoirement fixée et choisit à chaque étape un rectangle sur lequel la limite maximum (la « limite supérieure » de Weierstrass) des valeurs est la même que celle sur tout le domaine ; la taille des rectangles tendant vers 0, on identifie un « point-limite » [Darboux 1872 313] où l'on fait jouer l'hypothèse de continuité. Il n'est jamais distingué deux cas, selon que ce point est au bord ou non ; la figure qui illustre le raisonnement présente le cas d'un point intérieur (au sens topologique) au domaine, intériorité aussi manifeste dans l'utilisation de la continuité. Notons aussi que Darboux ne travaille pas dans la droite achevée et ajoute l'hypothèse selon laquelle la fonction est bornée pour pouvoir introduire la limite maximum ; il ne cherche donc pas à démontrer qu'une fonction continue sur un fermé borné du plan réel est bornée. Si l'on s'attache à ce que Darboux souligne explicitement on doit noter, outre la distinction entre limite maximum et maximum atteint et les erreurs de raisonnement classiques de ceux qui manquent à la voir, que c'est la définition de la continuité qui retient son attention. Comme Heine et sa continuité « en chaque valeur particulière de x », Darboux insiste sur le fait qu'il définit une notion de « continuité *point par point*, pour ainsi dire (…) » Darboux 1872 308], marquant par son usage de l'italique et le « pour ainsi dire » qu'il ne s'agit pas là de la notion usuelle alors en France ; il en attribue la paternité à Ossian Bonnet. Il insiste aussi, quelques lignes plus loin, sur le fait que cette définition de la continuité d'une fonction de deux variables est strictement plus forte que la continuité en chacune des deux variables [Darboux 1872 309].

L'article de 1875 intitulé *Mémoire sur les fonctions discontinues* [Darboux 1875] est d'une toute autre ampleur que le modeste article de 1872, ce qui n'enlève rien à la valeur exemplaire de ce dernier. Des traits essentiels demeurent, en particulier la volonté d'importer en France la rigueur allemande en matière de fondements de l'Analyse et de combattre certaines erreurs ou illusions usuelles dans l'enseignement supérieur français. L'article s'ouvre sur les théorèmes sur les fonctions continues (d'une variable) pris chez Weierstrass ou Heine, poursuit sur l'intégrale de Riemann, importe la notion weierstrassienne de convergence uniforme en théorie des séries (en particulier pour les questions de continuité, d'intégration ou de dérivation terme à terme) et complète les travaux de Hankel sur la condensation des singularités et la construction de fonctions plus ou moins pathologiques ; Schwarz et Klein sont aussi mentionnés. Helène Gispert a montré l'incompréhension profonde et la froideur avec laquelle ces travaux de Darboux ont été reçus en France [Gispert 1983][57], froideur en partie explicable envers un auteur décidant, deux ans après la défaite française face à la Prusse, de donner raison à Weierstrass contre Cauchy ! Seules les premières pages de cet article nous concernent, consacrées à la notion générale de fonction continue et à l'énoncé de quelques théorèmes les concernant ; précisons qu'il n'est question dans cet article que de fonctions d'une variable (réelle), cas dans lequel la mise au point d'un vocabulaire précis de topologie ensembliste n'est pas absolument nécessaire à l'énoncé rigoureux des propositions. Après avoir rappelé la définition de la continuité en un point, Darboux énonce le premier théorème :

> Théorème I. Etant donnée une fonction $f(x)$, qui reste comprise, quand x prend les valeurs x_0, x_1 et toutes les valeurs intermédiaires, entre deux limites fixes A et B, on peut assigner deux nombres M, m donnant lieu aux propriétés suivantes : M est supérieur ou égal aux diverses valeurs de la fonction, et il y a au moins une valeur de

[57] Citons quelques passages de la correspondance entre Darboux et Houël, où Darboux s'exprime sur un ton plus libre et se heurte à l'incompréhension (certes amicale) de son correspondant : « Permettez-moi de vous faire remarquer qu'il y deux écoles de géomètres ici et ailleurs. 1. Ceux qui admettent sans démonstration beaucoup de choses vraisemblables comme celle-ci par exemple : toute fonction positive qui n'atteint pas zéro a un minimum (proposition parfaitement fausse du reste). Cauchy l'admet dans la démonstration que toute équation a une racine, ce qui rend la démonstration illusoire. 2. Ceux qui veulent une rigueur absolue et prétendent tout démontrer et préciser, excepté bien entendu les axiomes. » (Darboux à Houël, 1872) ; « Cauchy démontre que si le module a un minimum, ce minimum ne peut être que 0, mais il ne démontre pas que le module a un minimum. Cela vous paraît-il évident, soit. Mais comment se fait-il que ce ne soit pas exact pour les fonctions non continues. Il semble que si vous prenez la fonction Ax^2, A étant un de ces facteurs singuliers qu'on peut former dans le calcul intégral égal à 1, pour toute valeur de x entre 0 et 1, égal à 0 pour $x = 1$ par exemple, la fonction Ax quand x tend vers 1 se rapproche d'un maximum 1, mais ne l'atteindra pas pour $x = 1$ puisqu'elle devient nulle, alors. Cependant on pourrait le démontrer, il est évident que si elle a un maximum ce maximum est 1. » (Darboux à Houël, 26/4/1872), on notera que « entre 0 et 1 » désigne ici [0,1[ou]0,1[. « Et bien il n'est pas évident qu'une fonction continue ait une valeur maximum qu'elle atteigne effectivement (…) » (Darboux à Houël, 30/4/1872). [Gispert 1983 83]

la fonction supérieure à M-ε, ε étant aussi petit que l'on peut. De même m est inférieur ou égal à toutes les valeurs de la fonction, et il y a au moins une valeur de la fonction inférieure ou égale à m+ε. [1875 p.61]

L'intérêt réside plus, pour nous, dans la formulation du théorème que dans sa démonstration. Cette dernière tient en quelques lignes, Darboux utilisant comme une évidence (et sans faire la moindre allusion à une construction ou une axiomatique des réels) que toute suite croissante majorée converge. La formulation du théorème est intéressante quand on la compare à celle de Cantor ou même de Weierstrass : là où ces derniers instauraient un moment ensembliste autonome, Darboux énonce comme un théorème fonctionnel le résultat qui ne dit finalement pas autre chose que : une partie majorée de **R** admet une borne supérieure. Ce résultat d'existence des limites maximum et minimum permet à Darboux d'introduire la notion d'oscillation M-m d'une fonction (bornée) sur un intervalle ; rappelons que l'objectif de cet article est d'étudier des fonctions éventuellement très discontinues, en particulier leur intégrabilité, d'où l'importance de fonder une notion d'oscillation qui ne dépende pas de l'existence d'extremums. Darboux donne ensuite deux exemples élémentaires, ce qui est d'autant plus intéressant qu'on ne trouvait d'exemples ni chez Weierstrass, ni chez Cantor, ni chez Heine.

Par exemple, la fonction

$y = x$, pour x différent de 1,

$y = 0$, pour $x = 1$,

a 1 pour limite maximum quand x varie de 0 à 1 ; elle ne devient jamais égale à 1. [Darboux 1875 61]

Cet exemple, qui, certes, illustre bien clairement la distinction entre borne supérieure et maximum ainsi que le rôle de la continuité, est représentatif de la série des exemples simples utilisés dans cette première partie du texte ; tous sont obtenus en partant d'une fonction continue et en modifiant arbitrairement une valeur, aucun n'est obtenu en faisant varier, pour une même expression par exemple, le domaine d'étude : on imagine dans un cours actuel étudier ensuite la fonction $y = x$ sur [0,1] puis sur]0,1[ou **R**. C'est justement le choix que fera Osgood dans son manuel, en 1906, où il illustre le rôle de l'hypothèse de fermeture de l'intervalle dans le théorème du maximum en considérant la fonction affine $f(x) = 2x+3$ où $0<x<1$ [Osgood 1912 13]. Le deuxième exemple donné par Darboux surprend un peu plus que le premier :

> L'énoncé du théorème précédent indique que la fonction doit demeurer comprise entre deux limites A,B. Il ne suffit pas, pour qu'il en soit ainsi, que la fonction $f(x)$ demeure finie pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle ou égale aux valeurs extrêmes. Par exemple, la fonction définie par les équations
>
> $$y = \frac{1}{x}, \quad \text{pour } x \text{ différent de zéro,}$$
>
> $$y = 0, \quad \text{pour } x = 0$$
>
> ne devient pas infinie dans l'intervalle (0,1) ; elle ne reste pas non plus comprise entre deux limites fixes. [Darboux 1875 62]

Relevons d'abord que Darboux écrit « toute valeur de x comprise dans l'intervalle ou égale aux valeurs extrêmes », ce qui ferait pencher pour une convention de lecture des intervalles comme ouverts, ou du moins contredit l'idée d'une convention universelle (ne nécessitant donc pas d'explicitation) de lecture comme intervalles fermés. C'est ici encore le rôle de la continuité et non celui de la fermeture de l'intervalle qui est souligné : Darboux ne souligne pas que la fonction inverse est continue mais non bornée sur]0,1], il montre qu'une fonction discontinue sur [0,1] peut ne pas être bornée. L'interprétation donnée par Darboux de ce petit exemple *ad hoc* laisse un peu perplexe : la fonction « ne devient pas infinie dans l'intervalle » ! Nous avions jusqu'ici interprété « ne pas devenir infini » comme « être borné », interprétation cohérente dans la lecture de Cantor ou Weierstrass et, à l'occasion, explicitée par ce dernier. Nous reviendrons sur ce point spécifique dans quelques pages, contentons-nous pour l'instant de remarquer que la mise au point pédagogique de petits exemples pathologiques met à mal le vocabulaire classique : ce dernier décrivait efficacement les fonctions *usuelles* dans des contextes *familiers* à la communauté des mathématiciens, quand bien même on peut considérer qu'il manque de précision ou laisse certaines zones dans l'ambiguïté, par exemple de savoir si un intervalle doit être considéré bornes incluses ou non ; le double mouvement de recherche de rigueur conceptuelle et d'étude de fonctions sous des hypothèses à la fois plus faibles et explicites nécessite soit une (re)définition des termes usuels soit la création de nouveaux termes, ce qui ne va pas sans tâtonnement chez un même auteur (on le voit chez Weierstrass, ici chez Darboux) ni sans petites incompréhensions entre auteurs. On trouve une trace de cette perte des repères usuels dans la correspondance entre Darboux et Houël où, toujours à propos du théorème du maximum et de son rôle dans la démonstration de l'égalité des accroissements finis, Darboux écrit que pour certaines fonctions discontinues, « (…) l'idée de maximum ou de minimum disparaît complètement. » [Gispert 1983 95].

Terminons sur le théorème du maximum lui-même :

> Théorème III. Etant donnée une fonction de x finie et continue dans l'intervalle (a,b), cette fonction atteint ses limites maximum et minimum pour une ou plusieurs valeurs de x comprises dans l'intervalle, et par conséquent elle passe par toutes les valeurs intermédiaires entre M et m. [Darboux 1875 62]

On entend dans la fin de l'énoncé l'écho du théorème des valeurs intermédiaires, démontré juste avant (théorème II). L'hypothèse de finitude de la fonction laisse ici encore un peu perplexe. Rappelons que le caractère borné des parties de **R** ayant une borne supérieure n'était pas nécessaire aux énoncés de Weierstrass, ce dernier admettant les nombre infinis $+\infty$ et $-\infty$ comme bornes ; il établissait en cours de démonstration et dans les cas particuliers la finitude de la borne, sans d'ailleurs souligner ce point dans les énoncés. Cantor, lui, parlait comme ici Darboux de fonctions *finies* et *continues* ; de même Heine, dans la mesure même où son théorème principal portait sur l'annulation des fonctions continue admettant 0 comme borne inférieure, indiquait la minoration dans les hypothèses ; le lien avec le théorème du maximum était, on le notait plus haut, implicite. A ce petit flottement s'ajoute chez Darboux le choix du terme « fini » dont le sens, clair chez les autres auteurs, est ici problématique. Darboux est au contraire plus clair que ses prédécesseurs sur un point : à la fin de la démonstration, il évoque le cas où la suite converge vers l'une des deux bornes de l'intervalle :

> Le raisonnement se ferait à peu près de la même manière si α était une des limites extrêmes a, b de l'intervalle primitif. [Darboux 1875 64]

Cet aspect de la démonstration était systématiquement omis chez Weierstrass, il l'était aussi chez Heine.

III. Périodes et enjeux.

1. De la numérisation de l'Analyse à l'autonomisation du niveau ponctuel.

i. Cauchy et la numérisation de l'Analyse.

La manière dont les auteurs que nous citions, avant Weierstrass et parfois après, échangent facilement les termes « discontinu » et « infini », la difficulté à cerner la notion de fonction ou de partie bornée, l'absence de convention notationnelle permettant de préciser si les bornes d'un intervalle lui sont adjointes ou non … invitent à examiner les passages des manuels dans lesquels ces points sont traités explicitement. Ces passages exposent une conception du monde fonctionnel, proposent une manière de parler des fonctions et instituent des conventions de lecture dont nous voyons la difficulté à se départir. Il nous semble fondamental de partir des cours de Cauchy, en particulier de l'*Analyse algébrique* de 1821, et de ce qu'on peut appeler son programme de *numérisation* de l'Analyse.

On sait la manière dont ce programme est présenté dans la préface, se réclamant d'une rigueur qui passe par le rejet des arguments tirés de la généralité de l'Algèbre. La conséquence qui en est tirée, dès la préface, est que les égalités fonctionnelles doivent être considérées non comme des égalités entre expressions transformables l'une en l'autre mais comme des égalités numériques, égalités numériques dont le domaine de validité doit être précisé. Cette numérisation prend une deuxième forme dès les premières lignes de *l'Analyse algébrique* [Cauchy 1821] et du cours de calcul différentiel et intégral [Cauchy 1823], lorsque Cauchy place au commencement de l'Analyse la notion de limite, fondement des notions de continuité, de dérivée et d'intégrale. A cette numérisation de l'égalité fonctionnelle et ce fondement de l'Analyse sur la notion de limite, s'ajoute, dans la suite du cours et dans les volumes suivants, consacrés au calcul différentiel et intégral puis aux équations différentielles, la mise en place d'une série de théorèmes d'existence fonctionnels reposant sur cette conception numérique de la fonction. Ainsi les questions de convergence des séries numériques, en particulier des séries de puissances, deviennent-elle un moyen d'établir l'existence de fonctions pour des plages de valeurs de la variable, en particulier la fonction exponentielle. Non seulement la question du domaine de définition apparaît ici au premier plan mais, plus fondamentalement, Cauchy crée une nouvelle catégorie de questions – les questions d'existence – au moment même où il apporte une série de modèles de réponses. Le cas de l'intégrale est particulièrement frappant. Si l'on compare avec ce que faisait Lacroix sur ces questions, on remarquait alors trois temps successifs distincts : la notion d'intégrale indéfinie – de primitive – était introduite la première ; la recherche de primitive était décrite comme le problème inverse de la dérivation, problème traitable formellement dans les cas élémentaires. Ce premier moment de définition de la notion de primitive et de présentation de méthodes usuelles de recherche de primitives ne laissait aucune place à une question d'existence de primitives. Dans un deuxième temps, la notion de primitive servait à définir l'intégrale définie entre deux bornes. Dans un troisième temps enfin étaient présentées des méthodes d'approximation numérique des intégrales définies ne reposant pas sur le développement en série entière de la fonction à intégrer, par exemple la méthode des trapèzes. Dans son cours de calcul différentiel et intégral, Cauchy non seulement renverse cet ordre mais il institue dans ce renversement la question de l'existence. Il commence par établir l'existence de l'intégrale définie (sur un intervalle de continuité) en montrant que certaines sommes convergent ; en rendant ensuite variable l'une des bornes d'intégration il obtient l'existence des fonctions primitives sur les plages de continuité de la fonction initiale. Cauchy fait preuve de la même originalité dans son cours sur les équations différentielles ordinaires où, en plus de l'exposé des méthodes d'intégration des types d'équations les plus usuels, il pose et résout dans le cas non singuliers la question de l'existence des solutions. Ici encore, la fonction dont on démontre l'existence n'est pas donnée par une expression générale, elle est un objet numérique ; comme dans le cas de l'intégrale, Cauchy reprend une méthode classique d'approximation – ici la méthode d'Euler – et il modifie son rôle pour que la preuve de convergence de la suite fournie par cette méthode établisse l'existence fonctionnelle. Les conséquences en termes d'association entre fonctions et domaines sont ici plus profondes que dans le cas de l'intégration, où seule intervenait la notion d'intervalle de continuité. Premièrement, de même que l'intégrale définie dépend de la fonction à intégrer *et* des bornes d'intégration, l'intégrale particulière d'une équation différentielle ordinaire est donnée par la conjonction de l'équation *et* de conditions initiales numériques, invitant à distinguer les points ordinaires des points singuliers pour lesquels le théorème principal ne s'applique pas. Deuxièmement, le mécanisme même de la preuve numérique d'existence rend nécessaire des recherches de majorations qui aboutissent à formuler explicitement le caractère local du résultat ; sans entrer dans le détail, on en voit l'enchaînement, par exemple, dans l'énoncé du premier théorème de la Leçon 8 (où χ désigne $\mathrm{d}f/\mathrm{d}y$) [58] :

> 1er Théorème. Concevons que, les expressions
>
> $$f(x_0,y_0)\ ,\ \ \chi(x_0,y_0)$$
>
> étant des quantités finies, on désigne par A, C deux nombres supérieurs à leurs valeurs numériques, et par *a* une quantité positive ou négative, choisie de telle manière que, pour des valeurs de *x* renfermées entre les limites x_0, x_0+a, et pour de valeurs de *y* renfermées entre les limites y_0-Aa, y_0+Aa, les deux fonctions $f(x,y)$, $\chi(x,y)$ restent continues par rapport aux variables x,y, et demeurent comprises, la première entre les limites –A et +A, la seconde entre les limites –C et +C. Dans cette hypothèse, les théorèmes 1,2,3,4 de la leçon précédente subsisteront encore, si l'on a pris pour X une moyenne [59] entre les deux quantités x_0 et x_0+a. [Cauchy 1981 55]

[58] Il s'agit bien sûr d'équations différentielles du premier ordre.
[59] Cauchy nomme moyenne entre deux nombres réels *a* et *b* toute moyenne pondérée à coefficients positifs. Il s'agit donc de l'intervalle entre *a* et *b*, ouvert ou fermé selon que « positif » est compris au sens large ou strict.

Les théorèmes 1,2,3,4 étaient ceux établissant la convergence de la méthode d'Euler sur l'intervalle allant de x_0 à X. Cauchy tire quelques pages plus loin les conséquences du caractère local de son résultat d'existence de la solution F, en abordant la question du prolongement maximal :

> Si d'ailleurs les fonctions $f(x,y)$, $\chi(x,y)$ restent continues dans le voisinage du système de valeurs particulières $x = x_0+a_1$, $y = F(x_0+a_1)$, on déterminera encore une valeur de x située au delà de la limite x_0+a_1, et vers laquelle on pourra faire converger la quantité X dans la fonction $F(\mathrm{X})$. Désignons par x_0+a_2 cette nouvelle limite, et continuons de même. Les quantités
>
> (35) x_0+a , x_0+a_1 , x_0+a_2 , &c…,
>
> formeront une suite croissante ou décroissante, et leurs valeurs numériques finiront pas dépasser tout nombre donné, ou par s'approcher indéfiniment d'une certaine limite. Dans le premier cas, la quantité X pourra croître ou décroître indéfiniment, de manière à devenir supérieure ou inférieure à toute quantité donnée. Dans le second cas, la quantité X pourra s'approcher indéfiniment de la limite vers laquelle convergeront les différents termes de la série (35). Soit Ξ cette même limite. La limite correspondante vers laquelle convergeront les valeurs de $y = F(\mathrm{X})$, pourra être désignée par $f(\Xi)$; et, pour qu'on ne puisse plus faire passer la quantité X au delà de la limite Ξ, dans la fonction $F(\mathrm{X})$, il sera nécessaire, ou que la quantité $F(\Xi)$ soit infinie, ou que l'une des fonctions
>
> (36) $\varphi[x,F(x)]$, $\chi[x,F(x)]$,
>
> devienne infinie pour la valeur particulière $x = \Xi$, ou enfin que l'une de ces fonctions devienne discontinue dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. [Cauchy 1981 63]

La discussion est d'une grande clarté. Il pourrait sembler, aussi bien dans l'énoncé des théorèmes que dans les discussions des problèmes d'interaction entre fonction et domaines, que seuls les termes *méta* tels « conclusion locale », « théorème d'existence » ou « prolongement maximal » distinguent de la nôtre l'écriture mathématique de Cauchy.

ii. Continuité et discontinuité selon Cauchy.

On sait toutefois que, quelque fondamental que soit le lien entre fonction et domaines instauré par cette Analyse *à la* Cauchy, elle diffère de la nôtre sur plusieurs points. Par exemple la dérivabilité n'y est pas distinguée de la continuité – l'une impliquant implicitement l'autre, sauf, on l'a vu, en d'éventuels points isolés ; tous les échanges de limites sont possibles inconditionnellement : les limites de suites continues sont continues, on peut dériver sous le signe d'intégration etc. ce qui fait dire aux auteurs post-weierstrassiens que Cauchy, tout comme Ampère ou Lagrange, fait des hypothèses implicites d'uniformité : uniforme convergence des suites de fonctions, uniforme continuité des fonctions continues, uniforme dérivabilité. On a vu aussi Darboux reprocher à Cauchy de ne pas distinguer entre borne inférieure et minimum, reproche qu'on peut aussi adresser à Ampère dans sa démonstration de la dérivabilité (par intervalles) des fonctions continues [Ampère 1806]. Essayons de démêler quelques fils en reprenant les questions qui nous amenaient à lire Cauchy. Si l'on s'en tient aux définitions, il semble que ce que Cauchy entend par « continu » soit ce que nous entendons aussi par là :

> Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces deux limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence
>
> $$f(x+\alpha) - f(x) ,$$
>
> qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique [60] de la différence
>
> $$f(x+\alpha) - f(x) ,$$
>
> décroît indéfiniment avec celle de α. [Cauchy 1821 34]

Le terme d' « infiniment petit » n'est pas une simple métaphore, il a été défini quelques pages plus haut :

> On dit qu'une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro. [Cauchy 1821 26]

La définition de la continuité semble supposer x fixé et α variable, toutefois la notion n'est définie que pour un intervalle. C'est dans un deuxième temps qu'il y a localisation de la notion de continuité :

[60] La « valeur numérique » de Cauchy est notre valeur absolue. [Cauchy 1821 2]

> On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toute les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très-rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit. [Cauchy 1821 35]

Ainsi la formation de propriétés locales à partir de propriétés syntaxiquement globales que nous nommions *localisation* dans le premier paragraphe, à propos des notions modernes de maximum local, de fonction localement intégrable etc. est ici utilisée très explicitement dans le cas d'une notion de continuité qui s'exprime chez Cauchy de manière syntaxiquement globale, par intervalles ; cette localisation ne débouche toutefois pas sur la notion weierstrassienne de continuité en *un* point, une fonction pouvant être continue en un point sans l'être sur aucun voisinage de ce point. Notons que le terme *voisinage* est dans cette citation de Cauchy un terme *méta* : Cauchy définit la « continuité au voisinage d'un valeur particulière », ce syntagme n'étant pas la conjonction de la notion syntaxiquement globale de « continuité sur un intervalle » et d'une notion de « voisinage » comme type de partie de la droite réelle ; la différence entre ces deux points de vue est manifeste dans l'emploi par Cauchy de « au voisinage » ou « dans le voisinage », mais jamais de « sur un voisinage ». L'indicateur *méta* « dans le voisinage » renvoie à un type d'étude ou de propriété lui-même caractérisé par l'intervention de certains domaines possédant la double caractéristique d'être subordonnés à un point de référence (étude au voisinage *d'un* point) et de présenter un degré d'indétermination. Cauchy présente ensuite sa notion de discontinuité :

> Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle devient alors *discontinue*, et qu'il y a pour cette valeur particulière *solution de continuité*. [Cauchy 1821 35]

On observe la dissymétrie : la notion de continuité, syntaxiquement globale, doit être localisée pour former la contrepartie syntaxiquement ponctuelle ; c'est par contre d'emblée *en* une valeur particulière de x qu'une fonction est discontinue. Si cette dissymétrie est parfaitement logique – le contraire d'être continue en chaque point d'un intervalle c'est bien être discontinu en un point – on sait que cela contribue à renforcer l'image de fonctions continues par intervalles, par un glissement imperceptible de la notion de valeur « particulière » – qu'on pourrait, de manière neutre, interpréter comme valeur « déterminée » – à celle de valeur « isolée ».

Il nous semble qu'on ne comprendrait pas ce que fait Cauchy en ne lisant que les déclarations générales de la préface, les principales définitions abstraites ou les démonstrations des grands théorèmes. Ainsi les définitions relatives à la continuité sont-elles immédiatement suivies dans le texte de leur application aux fonctions usuelles et cette interaction entre des énoncés généraux – présentant pour nous à la fois une grande familiarité et une certaine étrangeté – et des cas usuels permet non seulement de comprendre le sens des définitions mais aussi l'arrière-plan qui les motive. Cauchy envisage onze « fonctions simples », qui avaient été introduites dans le premier chapitre, juste avant la notion de fonction composée [61] ; ces fonctions étaient : $a+x$, $a-x$, ax , $\frac{a}{x}$, x^a , A^x , Lx (L désigne un logarithme) , *sin x* , *cos x* , *arc sin x* , *arc cos x*.

> (…) chacune de ces fonctions sera continue dans le voisinage d'une valeur finie attribuée à la variable x, si cette valeur finie se trouve comprise
>
> Pour les fonctions
>
> $a+x$ entre les limites … $x = -\infty$, $x = +\infty$
>
> (…)
>
> pour la fonction
>
> $\frac{a}{x}$ 1.° entre les limites $x = -\infty$, $x = 0$
>
> 2.° entre les limites $x = 0$, $x = \infty$;
>
> (…)
>
> *arc sin x* entre les limites … $x = -1$, $x = +1$ [Cauchy 1821 36]

Ces cas usuels ne posent pas de problème et présentent bien des intervalles de continuité limités par des points singuliers au sens large, des points où il se passe quelque chose. Les cas de l'*arcsin* et de l'*arccos* auraient pu mériter une petite remarque sur la continuité à gauche ou à droite, mais rien de tel sous la plume de Cauchy ; on peut aussi penser que « entre » est ici à prendre au sens strict, les intervalles de continuité – plus précisément, au voisinage des points desquels les fonctions sont continues – étant ouverts, les cas d'*arcsin* et *arccos* en –1 et +1 relevant de l'étude ultérieure des points singuliers, de même que le cas de a/x en 0. De cette liste de cas usuels, Cauchy tire une seule remarque :

> Parmi les onze fonctions que l'on vient de citer, deux seulement deviennent discontinues pour une valeur de x comprise dans l'intervalle des limites entre lesquelles ces mêmes fonctions restent réelles. Les deux fonctions dont il s'agit sont

[61] Notre composition de fonction est ce que Cauchy désigne comme formation de « fonctions de fonctions » ; sa notion de composition recouvre, outre les fonctions de fonctions, d'autres procédés pour combiner des fonctions connues en de nouvelles, par exemple la formation de la fonction tangente à partir du sinus et du cosinus [Cauchy 1821 23]

$\frac{a}{x}$ et x^a (lorsque $a = -m$).

> L'une et l'autre deviennent infinies, et par conséquent discontinues, pour $x = 0$. [Cauchy 1821 36]

On ne se fait une image complète de la conception de Cauchy de ces fonctions usuelles qu'en lisant le paragraphe suivant consacré aux valeurs singulières. La construction est la même que dans le paragraphe sur la continuité ; on commence par une explication générale avant de passer à la liste des fonctions simples. L'explication générale ne se présente cette fois pas sous la forme d'un enchaînement de définitions, mais sous celle d'un diagnostic :

> Lorsque, pour un système de valeurs attribuées aux variables qu'elle renferme, une fonction d'une ou de plusieurs variables n'admet qu'une seule valeur, cette valeur unique se déduit ordinairement de la définition même de la fonction. S'il se présente un cas particulier dans lequel la définition donnée ne puisse plus fournir immédiatement la valeur de la fonction que l'on considère, on cherche la limite ou les limites vers lesquelles cette fonction converge, tandis que les variables s'approchent indéfiniment des valeurs particulières qui leur sont assignées ; et, s'il existe une ou plusieurs limites de cette espèce, elles sont regardées comme autant de valeurs de la fonction dans l'hypothèse admise. Nous nommerons *valeurs singulières* de la fonction proposée celles qui se trouvent déterminées comme on vient de le dire. Telles sont, par exemple, celles qu'on obtient en attribuant aux variables des valeurs infinies, et souvent aussi celles qui correspondent à des solutions de continuité. [Cauchy 1821 45]

La continuité était une *propriété* définie, la singularité, elle, est un *problème* auquel Cauchy apporte une solution procédurale : le prolongement par passage à la limite. Le passage aux cas usuels commence sans surprise :

> Pour la fonction
>
> $a+x$ (a désignant une quantité quelconque) $\qquad a+\infty = \infty \ldots a-\infty = -\infty$
>
> (…)
>
> $\frac{a}{x}$ a désignant une quantité positive $\qquad \frac{a}{\infty} = 0, \ \frac{a}{0} = \pm\infty, \ \frac{a}{-\infty} = 0$
>
> [Cauchy 1821 46]

La fonction inverse prend donc deux valeurs en 0, ces deux valeurs étant infinies. On aborde des cas moins banals avec le *sinus* :

> $sin\,x \qquad sin((-\infty)) = \mathrm{M}((-1,+1))\ , \ sin((\infty)) = \mathrm{M}((-1,+1))$
>
> (…)

> La notation M((-1,+1)) désigne ici, comme dans les préliminaires, une quelconque des quantités moyennes entre les deux limites –1 et +1. [Cauchy 1821 46]

Il était précisé en effet dans les préliminaires que les doubles parenthèses servent à désigner l'une des valeurs possibles parmi une infinité ; ainsi M(-∞,0) désigne « toute quantité négative » [Cauchy 1821 18], M((-∞,0)) une quantité négative quelconque. Sur ce « *sin*((-∞)) = M((-1,+1)) » on ne trouve rien d'autre sous la plume de Cauchy. Qu'on nous permette, pour compléter notre modèle, un petit aller-retour chronologique. La question est reprise plus explicitement presque un siècle plus tard dans le traité de Stolz. Après avoir défini la notion de limites d'indétermination (*Unbestimmtheitsgrenzen*) – nous dirions les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une fonction selon un filtre – puis celle de limite, il met en garde contre l'apparente simplicité de cette dernière notion :

> Soulignons encore que si $f(x)$ possède une limite déterminée pour un passage à la limite déterminé [*bei einem bestimmten Grenzübergang*] lim $x = a$, on ne peut pas toujours conclure que $f(x)$ possèderait la même limite pour une autre lim $x = a$. Ainsi, par exemple, $\lim_{n=+\infty} \sin n\pi = 0$ lorsque n est un nombre entier, alors que par passage continu lim $x = +\infty$, sin x ne possède pas de limite, mais –1 et +1 comme limites d'indétermination [*Unbestimmtheitsgrenzen*]. Si toutefois $f(x)$ a une limite lors du passage continu de x à la limite a [*bei stetigem Übergange*], il en va de même pour tout autre passage à la limite a. [Stolz 1893 6][62]

La notion de limite (qui pour Stolz recouvre une notion d'unicité) dépend non seulement de la valeur limite (numérique ou infinie) a de la variable mais aussi du mode de passage à la limite, le *Grenzübergang*. Parmi tous ces modes de passage, l'un est privilégié, le passage continu à la limite ; on peut ainsi illustrer la dernière phrase en disant que si $f(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers +∞ au sens suivant : à tout nombre positif strict ε on peut associer un nombre réel A tel que $|f(x)-1| < \varepsilon$ dès que x est entre les limites A…+∞ (les domaines considérés pour x sont des intervalles, c'est en cela que le passage à la limite est continu) ; alors quelle que soit la suite (x_n) tendant vers +∞, on a aussi $\lim_{+\infty} f(x_n) = 1$. On voit comment les définitions des limites données par Weierstrass imposent le mode continu et lèvent une

[62] « *Es sei noch hervorgehoben , dass wenn f(x) bei einem bestimmten Grenzübergang lim x = a einen Grenzwerth besitzt, man nicht immer schliessen darf, dass f(x) auch für einen anderen lim x = a denselben Grenzwerth habe. So ist* $\lim_{n=+\infty}\sin n\pi = 0$*, wenn n eine natürliche Zahl bedeutet, während sin x bei stetigem Grenzübergange lim x = +∞ gar keinen Grenzwerth, sondern die Unbestimmtheitsgrenzen –1 und +1 hat. Hat indess f(x) bei stetigem Übergange des x zum Grenzwerthe a einen Grenzwerth, so auch bei jedem anderen zu demselben Grenzwerthe a.* »

partie de l'indétermination contenue jusqu'alors dans la notion de limite [63]. Nous pensons pouvoir à la lumière de ces explicitations tardives comprendre rétrospectivement ce qu'écrit Cauchy à propos de la fonction *sinus* en l'infini : lorsqu'on envisage toutes les manières qu'à une variable réelle de tendre vers $+\infty$ (ce qui signifie, de manière statique : de quelque manière qu'on choisisse une partie infinie non majorée parmi les valeurs du domaine d'une variable réelle x), on voit $\sin x$ tendre vers tous les réels compris entre -1 et 1. On comprend de même les autres exemples que donne Cauchy d'étude des valeurs singulières de fonctions simples par passage à la limite, par exemple :

$$\tan((\infty)) = \mathrm{M}((-\infty,+\infty)), \qquad \tan\left(\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \pm\infty \qquad \text{[Cauchy 1821 47]}$$

On comprend que, s'il peut être nécessaire de considérer une fonction sur un intervalle – ainsi les fonctions logarithmes, lorsqu'on ne souhaite pas passer aux nombres complexes, ne peuvent-elles être considérées qu'entre les limites 0 et $+\infty$ –, on n'a jamais à considérer des fonctions sur un intervalle ouvert ; les bornes sont toujours implicitement ou explicitement annexables, qu'elles révèlent ou non des valeurs singulières. Il n'est pas ici question de restriction ou de prolongement : la fonction recouvre de droit ce que nous nommerions l'adhérence de son graphe dans le produit cartésien de la droite numérique achevée par elle-même. Cauchy écrit-il ainsi :

$$\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{[Cauchy 1821 47]}$$

On voit dans ce cadre qu'une fonction non majorée est une fonction qui prend la valeur $+\infty$; qu'une fonction prenant une valeur positive plus petite que toute constante strictement positive prend la valeur 0 : au pire 0 est atteint en l'infini ; sinon, c'est que 0 est atteint en une valeur numérique finie de la variable. Plus généralement, la borne inférieure des valeurs est atteinte, éventuellement au bord du domaine de régularité. C'est exactement le raisonnement que tient Cauchy dans sa démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre que nous voyions critiquée par Darboux. Cauchy étudie la fonction numérique positive $|f(z)|$ de la variable complexe z, où f est un polynôme. Dans un premier temps, il établit que cette fonction tend vers l'infini lorsque z tend vers l'infini [Cauchy 1821 334] ; c'est donc en un point dans le fini que le minimum, positif ou nul, est atteint ; Cauchy établit ensuite que ce minimum ne peut être strictement positif, c.q.f.d. Dans cette saisie de l'univers fonctionnel,

[63] Les définitions de Weierstrass sont plus fortes que celles de Cauchy et rendent la notion de limite indépendante du *Grenzübergang*, sans même devoir se restreindre aux passages continus. Ainsi si le domaine de

les valeurs singulières sont aussi toujours indiscernablement des valeurs prises par la variable *et* des valeurs atteintes par la variable ; atteintes selon tous les *Grenzübergänge* possibles, quitte à former des fonctions multivoques. C'est ainsi que Cauchy réagit face à la discontinuité (finie) en 0 de la série de Fourier de terme général $\frac{\sin nx}{n}$. A ceux qui y voient un contre-exemple infirmant sa démonstration de continuité des limites de séries à termes continues [Cauchy 1821 131], Cauchy rétorque (en 1853, certes[64]) que la série ne converge pas lorsque la variable x prend la valeur 0, on s'en rend compte en considérant le *Grenzübergang* $x = \frac{1}{n}$.

iii. Fonction arbitraire et niveau ponctuel.

On comprend mieux les remarques de Darboux dans l'article de 1875 sur les fonctions discontinues. Elles s'inscrivent dans une première partie consacrée à la notion de continuité, dans laquelle l'objectif de Darboux est de *combattre* la convention de complétion par passage à la limite, modifiant ainsi la notion même de fonction. Les premières lignes de l'article sont significatives, on peut les lire comme une réponse directe aux passages de Cauchy que nous citions :

> I. Des fonctions et de la continuité.
>
> Une fonction $f(x)$ est dite *bien déterminée* quand à chaque valeur de x correspond une valeur unique de $f(x)$.
>
> Il peut arriver qu'une fonction généralement bien déterminée de x devienne indéterminée pour certaines valeurs x_0, x_1, x_2,… de la variable x. Alors il faut compléter la définition de la fonction en assignant les valeurs qu'elle prend pour $x = x_0$, $x = x_1$, …, c'est-à-dire en définissant
>
> $$f(x_0)\ ,\ f(x_1)\ ,\ f(x_2)\ ,\ \ldots$$
>
> *Cette définition peut se faire d'une manière arbitraire.* [Darboux 1875 59]
>
> (…) Il existe donc des fonctions qui tendent vers une valeur limite quand x s'approche d'un nombre fixe x_0, mais qui pour $x = x_0$ ont une valeur différente de leur valeur limite. [Darboux 1875 60]

x est l'ensemble des $(-1)^n/n$, l'éventuelle limite en 0 d'une fonction de x ne dépend pas du fait de converger vers 0 par la gauche ou par la droite. On trouve des explications sur ce point dans le cours de Dini [Dini 1878 22].

64 [Cauchy 1853], cité dans [Lakatos 1978].

On peut aussi replacer dans ce contexte la remarque de Heine sur la continuité comme première source de solidarité entre valeurs prises par une fonction en différents points. Nul n'a jamais douté que la continuité fût une forme de solidarité, le point de Heine est que la continuité, ne serait-ce qu'en un point, est une propriété particulière et ne relève pas *a priori* de la simple notion de fonction. On peut considérer une fonction sans faire sur elle aucune hypothèse, on parle alors de la fonction « en général »[65] ; Heine l'exprimait un peu maladroitement :

> *Définition*. On nomme *fonction univoque* d'une variable x une expression [*Ausdruck*] définie sans ambiguïté pour chaque valeur particulière, rationnelle ou irrationnelle, de x. [Heine 1872 180] [66]

On peut penser que Paul du Bois-Reymond est un peu plus heureux dans son explication, en particulier en évitant la notion d' « expression », dans son article de 1875 sur les fondements de l'Analyse. Le point de départ est ici la fonction sur laquelle il n'est fait aucune hypothèse (*die voraussetzungslose Function*), analogue de la fonction « en général » de Heine ou de la fonction arbitraire chez d'autres auteurs :

> I. La fonction sur laquelle n'est faite aucune hypothèse
>
> La fonction mathématique, lorsqu'on ne dispose d'aucune détermination particulière la concernant, est une table idéale semblable à une table de logarithmes, par laquelle est associée à toute valeur numérique supposée pour la variable indépendante une valeur indéterminée de la fonction, ou plusieurs valeurs, ou une valeur entre des limites données par la table. Aucune des lignes de la table n'a d'influence quelconque sur aucune autre, autrement dit, chaque valeur dans la colonne des valeurs fonctionnelles existe par elle-même et peut être modifiée sans que la colonne cesse de représenter une fonction mathématique. [du Bois-Reymond 1875 21][67]

On est au plus loin d'un monde fonctionnel dans lequel une fonction ne peut, sans cesser d'être concevable comme *une*, qu'être continue par intervalles ; dans lequel une fonction prend « naturellement » aux bornes de ses intervalles de continuité – les points singuliers – les valeur(s) (finies ou non) limite(s) associée(s) à toutes les possibilités d'approche de ces points

---

[65] Le titre du paragraphe est « *Functionen im allgemeinen* » [Heine 1872 180]

[66] « Definition. Einwerthige Function *einer veränderlichen x heisst ein Ausdruck, der für jeden einzelnen rationalen oder irrationalen Werth von x eindeutig definirt ist.* »

[67] « *I. Die voraussetzungslose Function. Die mathematische Function, falls keine besondere Bestimmung für sie vorliegt, ist eine Logarithmentafeln ähnliche ideale Tabelle, vermöge deren jedem vorausgesetzten Zahlenwerthe der unabhängige Veränderlichen eine Werth, oder mehrere, oder ein zwischen Grenzen, die in der Tabelle gegeben sind, unbestimmter Werth der Function zugehört. Keine Horizontalreihe der Tabelle hat irgend einen Einfluss auf die anderen, d.i. jeder Werth in der Columne der Functionalwerthe besteht für sich und kann für sich geändert werden, ohne dass die Columne aufhört eine mathematische Function darzustellen.* »

par la variable. Non seulement on en est au plus loin, mais on peut penser que ce passage a justement pour objectif de faire sentir cette distance, de marquer tout ce qui sépare la fonction arbitraire de la fonction usuelle. Du Bois-Reymond a-t-il quelque chose à dire de cette fonction quelconque ? Dans le cadre ensembliste tel qu'il est devenu au 20e siècle, la réponse serait oui : les notions de maximum (global), de fonction bornée, d'injectivité, de surjectivité, de variations … sont formulables à propos des fonctions numériques d'une variable réelle les plus générales ; on voyait déjà Cantor introduire la notion de partie image d'un intervalle, dont il pouvait se demander si elle est bornée, si elle comprend ses bornes etc. Rien de tel n'est abordé par du Bois-Reymond : de cette fonction quelconque il n'a rien à dire, et il le dit ! Le passage que nous citions plus haut sur la table idéale s'achève sur la remarque :

> Le concept de fonction mathématique ne contient rien de plus ni rien de moins, il est ainsi complètement épuisé. [du Bois-Reymond 1875 22] [68]

L'étude ne commence pour du Bois-Reymond que lorsqu'on ajoute certaines hypothèses, intégrabilité (au sens de Riemann), puis continuité (point par point), puis dérivabilité etc. schéma qui sera repris dans le cours d'Analyse de Jordan (à partir de la deuxième édition). Plus généralement, on est frappé chez du Bois-Reymond mais aussi chez Heine par le fait que, quoique l'insistance sur le caractère arbitraire de l'association entre valeurs semble relever de notre notion générale d'application, on s'en éloigne par l'absence de toute considération relative à un domaine de définition ou d'étude. La fonction générale est quelconque en tant qu'association, pas en tant qu'elle peut être définie sur un domaine quelconque ; on en voit la conséquence sur l'étude des fonctions de moins en moins quelconques : le jeu porte entièrement sur l'ajout d'hypothèses sur la fonction en tant que loi d'association, à aucun moment le type de domaine de définition ou le jeu des restrictions et des extensions n'interviennent comme éléments pertinents de contrôle de la situation ; il en était de même dans les exemples pathologiques-pédagogiques proposés par Darboux pour faire comprendre ce qu'il s'autorise à considérer sous le terme de « fonction » et le sens qu'il donne aux termes de continu et discontinu. Cette insistance sur l'indépendance *a priori* absolue entre les valeurs prises par une fonction pour les différentes valeurs de la variable s'inscrit par contre clairement dans le mouvement de différenciation des différents niveaux en Analyse, en contribuant à autonomiser le niveau ponctuel par rapport au niveau local. On a vu que chez Cauchy les énoncés syntaxiquement ponctuels ne renvoient jamais uniquement au niveau ponctuel ; qu'une valeur particulière prise par la variable n'est pas uniquement une valeur

[68] « *Mehr enthält der Begriff der mathematischen Function nicht und auch nicht weniger, er ist damit völlig erschöpft.* »

substituable à l'indéterminée mais aussi une valeur limite vers laquelle la variable peut tendre ; que les énoncés relatifs à *chaque* valeur de la variable indépendante x – par exemple dans la définition de la continuité, de la dérivabilité ou de la convergence d'une suite de fonctions – n'empêchent pas de faire varier x en même temps que les autres éléments. Dans cette saisie du monde fonctionnel, le ponctuel n'est pas clairement distinguable du local ; il n'est pas non plus distinguable clairement de l'uniforme. On comprend mieux, dans les cours de Weierstrass et plus encore dans la première génération des travaux qui s'en inspirent, l'association entre point de vue purement ponctuelle sur la fonction arbitraire, distinction entre continuité point par point et continuité uniforme sur un intervalle, distinction aussi entre convergence simple et uniforme des suites de fonctions.

2. Un contexte dominant : atteint / pas atteint.

Si l'on quitte les questions de formulation et de démonstration pour revenir à celle du rôle et de la signification du théorème du maximum, on voit que c'est Darboux qui, en 1872, est le plus explicite : on doit dissiper les erreurs anciennes en distinguant clairement la borne supérieure (qui peut exister sans être atteinte) du maximum (atteint) et établir des conditions sous lesquelles la borne supérieure est atteinte. On peut raisonnablement penser que cette question du « atteint / pas atteint » est aussi l'arrière plan principal de ce théorème *spécifique*, s'ajoutant bien entendu aux éléments de contexte communs à la série des théorèmes sur la continuité : passage du monde de la grandeur variable à un monde topologico-ensembliste permettant de fonder l'Analyse sans recours aux infiniment petits, sans hypothèses implicites de régularité par intervalle, sans confusion entre l'uniforme et le ponctuel affirmé universellement ; mise au point, aussi, d'une écriture intégralement non narrative de l'Analyse.

On peut évoquer deux problèmes profonds d'Analyse à propos desquels Weierstrass a été amené à s'interroger sur cette question du « atteint / pas atteint ». Le premier est le « principe de Dirichlet », tel que Weierstrass en présente et en critique la démonstration dans sa communication de 1870 à l'Académie des Sciences de Berlin [Weierstrass 1894-1927 II 49-54]. Il commence par présenter la démonstration donnée par Dirichlet dans son cours de 1856, en s'appuyant sur les notes de Dedekind. Rappelons que l'objectif est de démontrer l'existence, sur un espace t « fini et d'un seul tenant » (« *ein endlicher zusammenhängender Raum* » [Weierstrass 1894-1927 II 49]) d'une fonction harmonique prenant sur la surface bordant cet espace des valeurs continues données. Dirichlet commence par obtenir l'existence d'une fonction répondant à un problème auxiliaire, un problème de minimisation :

> Il est en effet clair que parmi toutes les fonctions *u* variant – ainsi que ses dérivées premières – partout continûment dans *t* et prenant les valeurs prescrites sur la frontière de *t*, il y en a une (ou plusieurs) pour laquelle l'intégrale étendue à tout l'espace *t*
>
> $$U = \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dt$$
>
> prend sa plus petite valeur. [Weierstrass 1894-1927 II 50][69]

Il montre ensuite qu'une fonction réalisant ce minimum de U est harmonique. C'est le premier point qui est critiqué par Weierstrass, la fonctionnelle U étant positive (donc minorée) sans que cela puisse permettre d'affirmer qu'il existe une fonction (dans un espace fonctionnel assez particulier, qui plus est) réalisant un minimum :

> [le premier point] n'est toutefois valide que si l'on sait démontrer qu'il existe une fonction *u* pour laquelle la valeur de l'expression
>
> $$\int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dt$$
>
> est un minimum (absolu). Cela ne se laisse en aucune manière déduire des hypothèses de Dirichlet ; on peut simplement affirmer qu'il existe une limite inférieure [*untere Grenze*] pour l'expression en question, dont elle peut s'approcher arbitrairement près, sans devoir l'atteindre réellement [*wirklich erreichen*]. Voilà qui invalide le procédé de démonstration de Dirichlet. [Weierstrass 1894-1927 II 52] [70]

Weierstrass termine en donnant un exemple de fonctionnelle qui, sur un espace de fonctions décrit précisément, a 0 pour borne inférieure sans toutefois s'annuler jamais. Signalons que, bien qu'il ne soit pas explicitement fait allusion à ce problème dans l'article de Heine de 1872, on en trouve la trace dans un article de 1870 sur les séries de Fourier où il est dit à propos du « principe de Dirichlet » :

---

[69] « *Es ist in der That einleuchtend, dass unter Functionen u, welche überall nebst ihren ersten Derivirten sich stetig in* t *ändern und auf die Begrenzung von* t *die vorgeschriebenen Werthe annehmen, es eine (oder mehrere) geben muss, für welche das durch den ganzen Raum* t *ausgedehnte Integral (...) seinen kleinsten Werth erhählt.* »

[70] « (…) *gilt nur in dem Falle, wo sich zeigen lässt, dass es eine Function* u *gibt, für welche der Werth des Ausdrucks (...) ein (absolute) Minimum ist. Dieses lässt sich aber keineswegs folgern, sondern es kann nur behauptet werden, dass es für den in Rede stehenden Ausdruck eine bestimmte untere Grenze giebt, welcher er beliebig nahe kommen kann, ohne sie wirklich erreichen zu müssen. Hiernach erweist sich Dirichlet's Schlussweise als hinfällig.* »

> On sait que Messieurs Kronecker et Weierstrass ont depuis longtemps exprimé leurs doutes sur l'acceptation de l'existence du minimum (…). [Heine 1870 360][71]

Outre le problème de la démonstration du principe de Dirichlet, on trouve un autre point central dans la réflexion de Weierstrass sur les fondements de la théorie fonctions où la question de l'annexion du bord, du « atteint / pas atteint » joue un rôle fondamental, bien qu'il ne soit pas ici directement question de maximum. On trouve ce point développé en détail dans la deuxième partie du cours de 1886. Après avoir présenté le procédé de prolongement analytique d'un élément de fonction, c'est-à-dire d'une série entière à variable complexe de rayon de convergence non nul, Weierstrass entreprend de montrer l'insuffisance de ce procédé. Par exemple, si l'on part du développement en $y = \sqrt{1+x}$ en $x = 0$ et avec la détermination $\sqrt{1} = 1$ de la racine carrée, le prolongement ne permet pas d'atteindre le couple de valeurs $x = -1$, $y = 0$, qui devrait pourtant appartenir à la fonction. On a pensé combler cette lacune, nous dit Weierstrass, en considérant d'abord la configuration formée de tous les couples de valeurs (a,b) obtenus par prolongement analytique puis en lui adjoignant les couples limites, les points limites (*Grenzstellen*) de la configuration initiale. Or ce procédé, s'il est satisfaisant pour les fonctions finiment multivoques comme les fonctions algébriques, ne peut être généralisé à des fonctions infiniment multivoques. Weierstrass se propose de le montrer en considérant le fonction

$$y = \frac{A}{2i\pi}\log\left(\frac{x-\alpha}{x_0-\alpha}\right) + \frac{A'}{2i\pi}\log\left(\frac{x-\beta}{x_0-\beta}\right) + \frac{B}{2\pi}\log\left(\frac{x-\gamma}{x_0-\gamma}\right) + \frac{B'}{2\pi}\log\left(\frac{x-\delta}{x_0-\delta}\right)$$

où x_0, α, β, γ, δ sont deux à deux distincts. Si l'on développe en série entière au voisinage de x_0 en partant de chacune des déterminations de chacun des quatre logarithmes, on obtient comme valeurs prises par y en $x = x_0$ tous les nombres de la forme $mA+m'A'+inB+in'B'$, où m,n,m',n' parcourent les entiers relatifs. Si l'on choisit A, A', B, B' réels de sorte que A/A' et B/B' soient irrationnels, cet ensemble de valeurs est, dirions-nous, dense dans le plan complexe :

> Nous avons par conséquent une fonction qui, pour chaque valeur de x, peut s'approcher arbitrairement de toute valeur donnée. [Weierstrass 1886 126] [72]

Si l'on décidait d'annexer à la configuration tous les points frontières, on associerait à chaque valeur de x la totalité des nombres complexes, ce qui ne rend pas bien compte de la nature de

---

[71] « *Bekanntlich haben die Herren Kronecker und Weierstrass schon von längerer Zeit ihre Bedenken über die Annahme geäussert, dass ein Minimum existiren müsse* (…) »

[72] « *Wir haben hiernach eine Funktion, die für jeden Wert von x jedem vorgeschriebenen Wert beliebig nahekommen kann.* »

la multivocité de cette fonction et rend absurde la notion de fonction inverse [Weierstrass 1886 127]. Cet exemple, et quelques autres tirés de Jacobi, servent à Weierstrass à motiver sa notion de configuration analytique (*analytisches Gebilde*) ; dans l'immédiat, il lui fournit une occasion de revenir sur l'importance, trop souvent négligée en Analyse nous dit-il, de la question du « atteint / pas atteint », ou encore, de la question de savoir si les points frontières sont à considérer ou non comme faisant partie de la figure :

> On doit en effet distinguer, pour chaque grandeur variable, entre les valeurs qu'elle peut réellement prendre d'après sa définition, et celles dont elle peut s'approcher arbitrairement sans jamais les atteindre en réalité. C'est là une chose qu'on ne néglige pas dans les mathématiques usuelles, il doit sembler d'autant plus frappant de voir qu'on n'y prête pas attention en Analyse. [Weierstrass 1886 127][73]

On retrouve ici explicitement, dans un contexte beaucoup moins élémentaire, le thème commun à Darboux et du Bois-Reymond du refus de la complétion automatique par passage à la limite. On voit plus généralement que le petit théorème sur le maximum n'est pas qu'un corollaire de l'existence de bornes supérieures dans $\overline{R}$, il est aussi lié pour Weierstrass à un ensemble de questions fondamentales en Analyse – utilisation d'arguments variationnels pour établir des théorèmes d'existence, bonne notion de fonction analytique englobant les cas infiniment multivoques – dans lesquelles la question du bord est fondamentale.

On peut présenter un dernier exemple d'utilisation du théorème du maximum, qui confirme nos deux conclusions : le caractère central de la question du « atteint / pas atteint » dans la première réception de ce théorème et la difficulté qu'ont pu avoir les contemporains à saisir l'hypothèse de compacité du domaine. Ainsi, Felix Klein utilise-t-il le théorème du maximum en 1883 dans ses *Nouvelles contributions à la théorie riemannienne des fonctions*[74] comme ingrédient essentiel de sa « preuve par continuité » (*Continuitätsbeweis*). Sans entrer dans la problématique particulière à cet article, on peut retenir que le théorème fondamental à démontrer nécessite la mise en place de deux multiplicités M_1 et M_2 dont on cherche à établir qu'une relation donnée entre elles est bi-univoque ; grossièrement, chaque point de M_1 correspond à une classe de surfaces de Riemann munie d'un découpage canonique, et chaque point de M_2 correspond à une classe de fonctions automorphes d'une variable complexe. Le

---

[73] « *Man hat nämlich bei jeder veränderlichen Größe diejenige Werte, die sie vermöge der Definition wirklich annehmen kann, von denen zu unterscheiden, denen sie vermöge derselben beliebig nahekommen kann, ohne sie in wirklichkeit jemals zu erreichen. Es ist dies etwas, das in der gewöhnlichen Mathematik gar nicht übersehen wird, so daß es umso auffälliger erscheinen muß, daß man in der Analysis nicht beachtete.* »

[74] *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie* [Klein 1883].

regroupement en classes a permis d'établir que les deux multiplicités sont de même dimension, et on sait à chaque élément de M_2 associer un unique élément de M_1. La démonstration de bi-univocité procède alors en deux temps : Klein montre au §3 de la quatrième partie que cette association univoque est, dirions-nous, injective, cette démonstration reposant sur des arguments spécifiques à la théorie des fonctions automorphes ; au §4, la démonstration de ce que nous nommerions la surjectivité emprunte une toute autre voie, reposant sur des « considérations générales de la théorie des multiplicités » [Klein 1883 143][75]. Klein commence par concéder qu'il doit supposer l'application analytique, sans pouvoir l'établir.

> Sous cette hypothèse, les considérations de continuité usuelles [*Continuitätsvorstellungen*] pour la relation entre les deux multiplicités M_1 et M_2 prennent leur pleine valeur. A ce propos, rappelons en particulier deux propositions. Tout d'abord, rappelons-nous qu'un système de *m* fonctions et d'autant de variables peut être univoquement inversé au voisinage de chaque point où le déterminant fonctionnel ne s'annule ni ne devient infini, et que réciproquement, lorsque l'inversion n'est pas multivoque au voisinage d'un point, on conclut au comportement régulier du déterminant fonctionnel. Rappelons-nous ensuite la proposition de Weierstrass selon laquelle une fonction analytique atteint toujours réellement la limite supérieure des valeurs dont elle est susceptible dans un domaine. [Klein 1883 211][76]

Klein poursuit bien sûr en raisonnant par l'absurde : si tout M_1 n'était pas atteint on pourrait trouver un point à la frontière d'un îlot (*Inseln*) formé de points non atteints. Ce point frontière doit être atteint (d'après le théorème de Weierstrass), auquel cas il est entouré de points tous atteints ce qui contredit son caractère de point frontière de l'image. Klein note en conclusion :

> Je n'ai guère besoin de faire remarquer l'analogie entre le procédé de démonstration décrit ici et une démonstration connue du théorème fondamental de l'algèbre. [Klein 1883 212][77]

---

[75] « *allgemeine Mannigfaltigkeitsbetrachtungen* ».

[76] « *Auf Grund dieser Prämisse kommen für die Beziehung der beiden Mannigfaltiugkeiten M_1 und M_2 die gewöhnlichen Continuitätsvorstellungen zur vollen Geltung. Ich erinnere in diesem Betracht insbesondere an zwei Sätze. Zunächst daran, dass ein System von m analytischen Functionen von ebensoviel Variabeln in der Nähe jeder Stelle, für welche die Functionnaldeterminante weder verschwindet, noch unendlich wird, eindeutig umgekehrt werden kann, - dass aber auch rückwärts, wenn die Umkehr in der Nähe einer Stelle nicht vieldeutig wird, das regulär Verhalten des Functionnaldeterminante folgt. Dann aber an den Weierstrass'schen Satz, dass eine analytische Function die obere Grenze derjenige Werthe, deren sie in einem Bereiche fähig ist, allemal auch wirklich erreicht.* »

[77] « *Ich brauche kaum auf die Analogie aufmerksam zu machen, welche zwischen dem hiermit geschilderten Beweisgange und einem bekannten Beweis des Fundamental Satz der Algebra Statt an.* »

Le problème est que cette démonstration du théorème fondamental de l'algèbre est soit celle de Cauchy-Serret, auquel cas il manque un argument, soit elle considère le polynôme comme application de la sphère de Riemann dans elle-même, auquel cas la compacité est garantie. On le voit dans la manière dont Klein cite le résultat de Weierstrass, aucune hypothèse topologique sur le domaine n'est mentionnée ; de fait, Klein n'en a pas établi à propos de la variété M_1. L'année suivante, dans son article-bilan *Sur les groupes des équations linéaires* [Poincaré 1883], Poincaré souligne longuement cette erreur de Klein, et la plus grande partie de l'article est consacrée à l'étude des situations dégénérées correspondant aux points bordant la variété des paramètres, à la compactification du domaine dirait-on de manière parfaitement anachronique. Le problème topologique général est présenté sommairement par Poincaré, S et S' désignant deux multiplicités connexes de même dimension :

> Supposons toujours qu'à tout point *m* de S corresponde un point *m*' et un seul de S' de telle façon que les coordonnées de *m*' soient des fonctions analytiques de celles de *m*, à moins que *m* ne vienne sur le bord de la multiplicité S, dans le cas où cette multiplicité en aurait un. Supposons qu'à aucun point de S' ne puisse correspondre plus d'un point de S. Si S est une *multiplicité fermée*, nous serons certains qu'à tout point de S' correspondra un point de S. Si, au contraire, S est une *multiplicité ouverte* présentant un *bord*, une *frontière*, nous ne pouvons rien affirmer. [Poincaré 1884 330]

Analysant rapidement le cas des multiplicités de paramètres que Klein et lui considèrent, Poincaré porte le diagnostic :

> Ainsi, il n'est pas évident que S soit une multiplicité fermée et il est nécessaire de le démontrer, par une discussion spéciale à chaque cas particulier, avant d'affirmer qu'à tout point de S' correspond un point de S. C'est ce que M. Klein a négligé de faire. *Il y a là une difficulté dont on ne peut triompher en quelques lignes*. [Poincaré 1884 332]

On voit que, si Poincaré a pleinement conscience de la nécessité d'une hypothèse topologique pour pouvoir établir la surjectivité de l'application, il formule cette hypothèse dans un style plus géométrique que topologique. Les exemples que nous ne citons pas montrent qu'il oppose plus le cas de la sphère (fermée, sans frontière) au cas, par exemple, d'un disque (surface ayant un bord) dont on ne saurait pas si la fonction est définie ou non au bord.

3. Eléments de périodisation.

Dans les dernières années du siècle, on voit W.F. Osgood utiliser systématiquement un couple *im Kleinen* / *im Grossen* dans ses exposés d'Analyse ; une étude détaillée y est consacrée dans la troisième partie de ce travail. Pour l'heure, nous voudrions simplement contribuer à la périodisation en étudiant la façon dont les éléments que la sonde « maximum » a révélés pertinents pour comprendre les évolutions du mode d'appréhension du monde fonctionnel sont repris en 1906 dans le cours d'Analyse d'Osgood [Osgood 1912]. Nous voyions dans les paragraphes précédents une première génération d'auteurs – Cantor, Heine, du Bois-Reymond, Darboux, Dini, plus tard Jordan ou Stolz – se réclamer ou s'appuyer sur les cours de Weierstrass pour forger un nouveau langage en Analyse dont on perçoit mieux les éléments saillants lorsqu'on le compare à celui de Cauchy, du Cauchy de 1821-23 du moins. De l'approche de l'Analyse proposée dans ses cours par Cauchy, nos auteurs retiennent et poursuivent l'élimination du style narratif, dont on voyait déjà le recul progressif chez Cauchy puis Serret. Plus fondamentalement, ils héritent de la numérisation de l'Analyse dont les éléments fondamentaux sont mis en place par Cauchy : rejet des arguments fondés sur la généralité de l'Algèbre, sens numérique de l'égalité fonctionnelle conduisant à la recherche de domaines numériques de validité, définition numérique de l'existence fonctionnelle conduisant à démontrer l'existence sur des domaines explicités, place centrale de la notion de limite et des hypothèses de continuité sur des intervalles à expliciter. On voit combien cette numérisation fait du rapport au lieu un élément fondamental sans toutefois que ce rapport prenne les contours qui nous sont familiers : la fonction n'est pas définie *a priori* sur un domaine, elle structure le domaine numérique de manière dissymétrique en plages de régularité et points singuliers ; l'exposé général peut conduire à chaque étape à exclure d'éventuels points singuliers nouveaux pour retrouver une plage de régularité ; la complétion « naturelle » par passage à la limite ferme tous les domaines, introduit les infinis et la dépendance envers le mode de passage à la limite, fait de l'infinité le paradigme de la discontinuité et plus généralement de toute singularité, interdit la distinction entre maximum et borne supérieure, entre fonction majorée et fonction atteignant l'état de grandeur ∞. Une grandeur variable entretient avec le domaine des valeurs qu'elles peut prendre un rapport qui n'est jamais de pure substituabilité, le domaine est toujours lieu de variation en plus d'être lieu de sélection d'une valeur possible. Dans ce cadre, pour toutes les notions fondamentales dont la définition passe par l'introduction de variables auxiliaires indépendantes de la variable principale x – ainsi dans l'expression $f(x+h)$-$f(x)$ pour la continuité, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pour la dérivation, $f_n(x)$ pour l'étude des suites ou séries de fonctions – la notion primitive de variation indépendante interdit la distinction entre une saisie point par point et une saisie uniforme.

On voit clairement chez nos auteurs de la première génération post-weierstrassienne la mise en place d'un nouveau mode de description du monde fonctionnel qui rompt avec ces éléments. On voyait déjà chez Weierstrass la redéfinition des termes usuels liés à la grandeur variable dans des termes relevant de la topologie ensembliste, elle-même fondée sur une construction de **R** (ou de la droite numérique achevée) à partir des rationnels. Les anciennes notions usuelles se dédoublent en un couple *point par point* / *uniforme*, ainsi pour la continuité d'une fonction ou la convergence d'une série de fonctions, mais il nous semble que l'accent principal n'est pas mis sur, par exemple, la distinction entre énoncé syntaxiquement ponctuel et énoncé syntaxiquement global, ou encore sur la différence fondamentale entre le travail sur un intervalle ouvert et celui sur un fermé borné. C'est presque la notion de continuité *en un* point qui semble la principale nouveauté pour nos auteurs, chez Darboux ou Heine par exemple, et cette notion est en effet en rupture avec la structuration traditionnelle en plages de régularité / points singuliers.

Le fond commun à ces évolutions est un changement du sens de la généralité en Analyse. La numérisation de l'Analyse par Cauchy instaure un mode de traitement et d'exposition général qui se présente comme une alternative au mode d'accès général par le développement de Taylor proposé quelques années plus tôt par Lagrange ; mais il s'agit d'un mode de traitement *général* des fonctions *usuelles*. La fonction est alors un objet *qui se présente*, par une formule implicite ou explicite, par une équation algébrique ou différentielle (ou aux dérivées partielles), ou *qu'on forme* à partir d'autres fonctions par des procédés réglés, la composition par exemple ; chaque objet fonctionnel possède une unité naturelle et c'est seulement la recherche d'une description précise de son comportement qui conduit à étudier la manière dont il structure le domaine numérique [78]. Les textes que nous citions de Heine, Darboux ou du Bois-Reymond sont au contraires héritiers d'une autre forme de réflexion, portant cette fois sur la fonction « en général » (Heine), la fonction « générale » (Poincaré), la fonction arbitraire (Dirichlet, Riemann), la fonction sur laquelle n'est faite aucune hypothèse (du Bois-Reymond) … ils ne cherchent plus une écriture générale du monde des « fonctions qu'on rencontre », mais une écriture se mettant paradoxalement au défi de pouvoir parler de la fonction arbitraire, quand bien même, de celle-ci, il n'y aurait rien à dire. La fonction arbitraire n'est pas encore un objet d'étude, et en ceci la structuration du monde fonctionnel n'est pas encore ensembliste au sens où elle reposerait sur la notion d'application entre ensembles. Cette fonction arbitraire n'est pas un objet d'étude mais une *place*

[78] On trouve de très belles pages de Borel sur ce point, dans sa *Notice sur les travaux scientifiques de M. Emile Borel* [Borel 1912 120 et suiv.]

épistémologique nécessaire à l'organisation nouvelle de la théorie, y jouant un double rôle : elle est ce à quoi on ajoute des hypothèses pour former des classes de fonctions dont il y a quelque chose à dire ; elle donne le droit de considérer comme contre-exemple légitime des objets construits artificiellement comme contre-exemples. Se donner l'obligation de redéfinir toutes les notions usuelles à partir des seuls outils disponibles pour décrire la fonction arbitraire, c'est faire apparaître comme le plus fondamental de tous le point de vue ponctuel, celui de la fonction comme table de valeurs dont les lignes sont *a priori* totalement indépendantes. Encore notre expression est-elle ici imparfaite : il ne s'agit de pas de décrire le passage au premier plan d'un point de vue ponctuel qui aurait toujours été là, à l'arrière plan, mais de l'instauration d'un point de vue inédit. Que ce nouveau point de vue, par sa primauté, permette la distinction entre l'uniforme et le « point par point », qu'il permette de rejeter la complétion automatique par les limites, cela est entendu. En interdisant toute saisie narrative de ce que la fonction « est en train de faire en ce point », l'autonomisation du ponctuel permet aussi la différenciation des niveaux ponctuels, infinitésimaux et locaux, nous y reviendrons longuement. Pour ce qui est des éléments de l'émergence du global – dans ses aspects syntaxiques et de légalité du lieu – qu'on pensait voir émerger très explicitement dans le travail sur le théorème du maximum, ce n'est pas la première génération de l'Analyse weierstrassienne qui les met en avant. Certes les éléments de topologie ensembliste sont progressivement mis en place et permettent de dire sans ambiguïté, par exemple, qu'une partie est fermée et bornée, ou encore connexe, mais le réseau conceptuel est dense, d'une richesse parfois un peu touffue ; des conventions notationnelles simples font défaut, par exemple dans le cas des intervalles ; la (re)définition ensembliste de termes déjà courants dans le monde de la grandeur variable crée une apparente continuité qui n'aide pas toujours à saisir les points de rupture. A un second niveau, *méta*, le travail de simplification et de mise en avant de l'essentiel mené, discrètement chez Weierstrass, plus explicitement chez d'autres, porte sur d'*autres* éléments que la distinction entre notions locales et globales de maximum, ou sur la différence entre les propriétés globales des fonctions continues sur un domaine ouvert ou sur un domaine fermé et borné.

Une génération plus tard, c'est un autre système de formation du simple à partir des mêmes éléments complexes qu'on voit se déployer dans le traité d'Analyse d'Osgood. Sur trois points, par exemple, on observe des choix différents de ceux de Heine, Darboux ou du Bois-Reymond. Premièrement la notion générale de fonction combine chez Osgood deux éléments, une loi d'association entre valeurs *et* un domaine fixé au départ pour la variable ; là où nos auteurs de première génération post-weierstrassienne ne mentionnaient pas de domaine de définition et faisaient porter l'accent sur le caractère *a priori* arbitraire de l'association, c'est au contraire sur la nécessaire définition d'un domaine et le rôle de ce domaine qui est souligné par Osgood comme caractéristique du point de vue « moderne » sur les fonctions [Osgood 1912 3] : on est passé de la fonction arbitraire *d'une* variable réelle à la fonction arbitraire *sur* un domaine déclaré d'emblée, Osgood allant jusqu'à affirmer que le domaine est premier par rapport à la loi d'association. Second point, on voit les conséquences de ce changement de point de vue dans la présentation des notions de maximum et de borne supérieure d'une fonction. Si cette distinction était, on l'a vu, l'élément central dans la réception du théorème de Weierstrass dans les années 1870, on voyait nos auteurs passer quasiment sous silence le caractère fermé et borné du domaine d'étude ; il était ainsi frappant de voir Darboux illustrer les enjeux de ce théorème en faisant varier dans la série des exemples l'aspect « continuité de la fonction » mais jamais l'aspect « topologie du domaine ». Osgood bien entendu fait jouer successivement l'un puis l'autre, utilisant l'exemple d'une fonction affine considérée sur un intervalle ouvert et borné, ou la fonction $1/x$ sur $]0,1]$ [Osgood 1912 13]. Dernier point, on avait vu la transition entre deux modes d'accès au monde fonctionnel créer un certain flou autour de la notion de fonction bornée, par exemple chez un Darboux considérant que pour les fonctions discontinues la notion de maximum perdait quasiment tout sens. Le partage est clair chez Osgood qui définit sans problème la notion de fonction finie (*endlich*) sur un intervalle comme une fonction dont toutes les valeurs sont inférieures à une constante donnée [Osgood 1912 12] et qui démontre le théorème de Weierstrass en deux propositions distinctes : il est d'abord établi qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée, [Osgood 1912 13] puis qu'elle a un maximum et un minimum [Osgood 1912 14].

On oublierait presque de mentionner un dernier point fondamental : le terme « maximum » chez Osgood renvoie au maximum global, la notion de maximum local n'est pas introduite dans son manuel : l'usage séculaire est renversé.

Chapitre 5. La fin du monde de la grandeur.

Nous devons une fois encore changer de démarche pour mieux saisir les conditions de possibilité d'émergence explicite du couple local/global ; un point de méthode préalable s'impose ici. Nous présentions dans la première partie (chapitres 1-3) un corpus qui nous était désigné par les auteurs qui, dans les premières années du 20^e siècle, jettent sur lui un regard rétrospectif informé de manière essentielle par la distinction entre résultat local et résultat global ; nous relevions alors avec une certaine exhaustivité – sans chercher toutefois à nous départir d'une certaine naïveté – les modes de référence au lieu utilisés par nos auteurs. On ne doit toutefois pas porter un regard naïf sur cette naïveté : ce qui nous surprend ou nous laisse une impression de flou à la lecture d'un texte de la seconde moitié du 19^e siècle ne relève pas d'une question anhistorique de psychologie cognitive ; ce qui surprend, c'est l'écart avec ce à quoi nous sommes accoutumés, avec le monde mathématique dans lequel nous avons été formés dans la seconde moitié du 20^e siècle : un écart *objectif*, un écart qui est le *fruit d'une histoire*, un écart que nous utilisons comme outil pour saisir cette histoire même. Nous voudrions à présent dépasser la liste des étonnements pour chercher à en rendre compte de manière raisonnée ; passer de la liste au système, voilà – sinon l'annonce du résultat – du moins le mouvement de la pensée.

Nous nous appuierons sur les deux corpus étudiés jusqu'ici, le corpus de recherche en théorie des fonctions étudié dans la première partie et le corpus d'Analyse réelle, d'Analyse enseignée, d'Analyse souvent élémentaire survolé par la sonde « maximum ». Nous suivions jusqu'ici largement l'ordre des matières, soit que nous parcourions un corpus formé de grands textes qui se répondent, soit que nous nous laissions porter de proche en proche dans un réseau dessinant des liens mouvants entre fonction, continuité, maximum, domaine etc. Notre démarche sera, dans cette section, plus analytique. Nous voudrions utiliser les éléments de nos deux corpus pour dessiner des *types idéaux* dont nous attendons un effet de compréhension. Nous reprenons, sinon les analyses, du moins le thème étudié par M. Epple dans son article sur la fin de la science de la grandeur/quantité [Epple 2003], en opposant à un *monde ensembliste* – type idéal post-bourbachique – un *monde de la grandeur* dont nous esquissons une série de traits caractéristiques. Le rapport au texte, ici, change : le texte n'est plus d'abord le donné dont nous cherchons à rendre compte, il devient un matériau que nous utilisons plus librement pour composer nos types idéaux. Nous pourrons ainsi intégrer comme trait essentiel du type un point qui n'est suggéré, plus ou moins explicitement, que par un passage d'un seul texte ; ainsi pour le triplet *Punkt* / *Stelle* / *Lage* chez Neumann, ou la différence entre *Teil* et *Stück* dans un texte de Schwarz. Bien sûr, lorsqu'un mode d'écriture ou une explication sont très courants nous le montrerons ; ainsi pour l'introduction de la notion de fonction à partir de celle de grandeurs variables dépendantes ; mais cette importance quantitative dans les textes n'est pas, du point de vue de la méthode, condition nécessaire. La raison en est que nous cherchons à décrire une organisation dont la cohérence et la prégnance n'est pas mesurée par le degré de présence explicite dans les textes ; sans aller jusqu'au paradoxe, on pourrait soutenir que la cohérence et la prégnance sont d'autant plus fortes qu'elles sont implicites : c'est « ce qui va sans dire » qui pèse, à chaque instant, de tout son poids.

La constitution d'un type idéal du monde de la grandeur variable nous permet, nous semble-t-il, d'éviter des démarches méthodologiquement plus suspectes. Nous ne cherchons pas à reconstituer un cadre implicite de la pensée (de la pensée de qui ?), non plus qu'un *Zeitgeist*. La validité du type idéal, son intérêt du moins, réside dans la série des effets de compréhension qu'il permet ; précisons un peu la nature des effets recherchés. L'objectif est, bien entendu, de rendre compte des choix *méta* ou thématiques des auteurs lus jusqu'alors, des modes de référence au lieu et la pertinence de cette référence. Dans l'idéal, la cohérence des connexions internes au type devrait permettre, par le simple déroulement de sa logique propre, de prévoir les modes de référence au lieu et les choix *méta* ou thématiques observés. Cet idéal n'est pas atteint, il y a à cela une excellente raison. Le « monde de la grandeur » et le « monde ensembliste » sont ici des outils internes à l'analyse historique, non des réalités historiques dont des auteurs, mystérieusement, participeraient. Ils sont des pôles par rapport auxquels nous chercherons à comprendre la démarche active de chaque auteur, l'espace au sein duquel il fait des choix, dont il reprend et fait évoluer les questions typiques ou les outils usuels. Deux pôles qui à la fois bordent et structurent une vaste plage de figures de transition, ouvrant une palette de possibilités que nous verrons certains auteurs, tel Poincaré, utiliser presque dans son intégralité. Décrire le terrain ce n'est pas préjuger de la manière dont les acteurs s'orientent effectivement dans la pensée et l'écriture, modifiant en retour la topographie générale. Par son organisation polaire cette démarche *idéal-typique* est aussi, on le voit, une démarche systématiquement *comparative*. Elle nous semble permettre, enfin, une saisie *positive* d'un monde non-ensembliste qu'on souhaite décrire autrement que par ce qui semble lui manquer lorsqu'on le contemple depuis le monde ensembliste ; un monde non ensembliste qui ne soit pas saisi que comme pré-ensembliste.

Nous procéderons en deux temps. Le premier moment est le plus général, on y explicite les traits du monde de la grandeur en les opposant à ceux, pour nous familiers, du monde des ensembles. Cela nous permettra, dans un deuxième temps, d'ajouter au corpus considéré une série de cas qui nous semblent pouvoir être bien décrits comme des cas de transition, des figures de l'entre-deux. Nous consacrerons le prochain chapitre à l'évolution de la saisie du local et des emplois du terme « voisinage » dans ce passage du monde de la grandeur au monde ensembliste.

I. Monde de la grandeur *vs* monde ensembliste.

1. Le point de vue universellement local.

En lisant Riemann – dans son introduction au Mémoire sur les fonctions abéliennes ou dans sa saisie des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients rationnels – nous avions été amenés à introduire la notion de *point de vue universellement local* ; nous utiliserons dans la suite par le sigle *pdvul*. Les références à des totalités ne pouvaient alors être lues sans ambiguïté qu'en considérant la conjonction dans un point de vue implicite de deux traits : premièrement, la référence est *distributive* et non collectivisante, « tous les points » devant être compris comme « en chaque point ». Deuxièmement, la saisie en chaque point n'est pas la saisie selon le point de vue ponctuel : la fonction n'est pas porteuse en un point d'une simple valeur (ou de plusieurs en cas de multivocité), elle manifeste un *comportement* ; dans un style très narratif on dirait qu'elle est en train d'y faire quelque chose (s'annuler, croître, passer par un maximum etc.). Nous voudrions montrer en quoi cette notion de *pdvul* éclaire la question des conditions d'émergence explicite du couple local/global.

Avant de chercher à renouer les fils historiques on peut préciser la question des liens entre point de vue universellement local et couple local/global par deux remarques préalables. Premièrement, la référence – même distributive – à une totalité pourrait sembler une forme de saisie globale, ne serait-ce que syntaxiquement à travers des énoncés de la forme « en chaque point de [*domaine*] … ». On a toutefois vu dans les textes qu'il n'en est rien. Une fonction n'est pas *a priori* associée à un domaine de définition, de sa variable on connaît le type (réel ou complexe) mais pas le domaine. La totalité est un *horizon* et non un donné ; on est donc au plus loin de la globalité syntaxique. Demeure seul un concept très abstrait de totalité, qu'on trouvait par exemple chez Riemann dans les *Hypothèses* lorsque le concept d'une grandeur particulière était saisi en compréhension, par opposition à une saisie en extension.

Deuxièmement, le « local » auquel renvoie le *pdvul* n'est pas le nôtre, de cela aussi nous cherchons à prendre la mesure ; il ne renvoie pas au niveau local par opposition aux niveaux ponctuel et infinitésimal, il est une saisie préalable à cette distinction de niveaux. En un sens, le « local » du *pdvul* n'est que le syntaxiquement ponctuel : ce dont l'énoncé est relatif à un point ou une valeur ; ce qui dans une saisie narrative désigne un point particulier : « ça » se passe « là ».

Le survol du siècle par la sonde « maximum » confirme aussi la prégnance implicite du *pdvul*. La primauté du maximum local sur le maximum global en relève pleinement, et survit au passage d'une écriture narrative à une écriture plus statique et ensembliste mais dont on a vu qu'elle ne repose pas sur une conception de fonction comme application. La saisie première est celle du maximum local ; ensuite sont introduits, dans le cas de plusieurs variables, l'alternative variables indépendantes / variables dépendantes et le problème des extremums liés ; enfin et facultativement interviennent les extremums globaux sur des domaines, mais leur place est doublement incertaine. Il semble, premièrement, que les évoquer fait provisoirement sortir du déroulement naturel de l'exposé des notions fondamentales en Analyse, ils ne sont évoqués qu'à propos des applications de l'Analyse à des problèmes qui n'en relèvent pas en propre. Ils sont, ensuite, saisis comme un type d'extrémum « sous contrainte » et sont donc rapprochés des extrémums (locaux) liés : sans toutefois en constituer des cas particuliers, les maximums globaux sont conçus comme une variante, un peu difficile à classer, de la notion bien claire de maximum (local) lié. Cette saisie tardive, marginale, indirecte des maximums globaux montre on ne peut plus clairement l'absence d'une structuration autour du couple local/global : il y bien des maximums globaux en mathématiques – nos auteurs les évoquent – mais on ne sait pas très bien où les classer ni comment les qualifier ; ils sont dans les mathématiques, mais on manque de mots pour dire *où* dans les mathématiques. On voit aussi combien un regard universellement local, par sa distributivité, n'est pas adapté à la saisie de la notion de fonction bornée sur un domaine. Si élémentaire que cette notion puisse nous sembler, elle n'est élémentaire que lorsque la fonction est conçue comme application. De même que la notion de maximum (global), elle nécessite une saisie collectivisante de la totalité du domaine, d'un « tous » qui ne soit pas un « chacun ». Dans un point de vue universellement local, la pente naturelle est de localiser la notion en un point, fût-il singulier : une fonction que nous dirions non bornée est donc plutôt décrite comme une fonction devenant infinie en un point.

2. La grandeur variable comme fonction et domaine.

Nous voyions dans la description que faisait du Bois-Reymond de la fonction la plus générale comme table idéale, dans laquelle les lignes sont *a priori* totalement indépendantes, le moyen pour les auteurs de la première génération post-weierstrasseienne d'autonomiser un point de vue purement ponctuel sur les fonctions. Nous y voyions aussi une condition de l'émergence de la conception de la fonction comme application entre ensembles, conception dont on a vu qu'elle n'est pas encore présente dans les textes que nous citions, celui de Cantor mis à part ; l'absence de jeu sur le domaine nous en semblait le signe. Il nous faut étudier le modèle plus classique que du Bois-Reymond *défait*, pour mieux cerner quel monde fonctionnel le point de vue universellement local saisit.

i. Référence au lieu et régime théorique.

Une première chose frappe le lecteur du 21^{e} siècle dans les premières pages des traités d'Analyse ou de calcul différentiel et intégral de Lacroix, Cauchy ou Serret : avant l'introduction de la notion – ou du terme – de fonction, il est question des grandeurs. Plusieurs propriétés qui pour nous semblent appartenir en propre aux fonctions, ainsi les limites, la continuité, la possibilité de croître ou décroître, sont décrites comme des propriétés d'une grandeur. Dans leur présentation, nos auteurs procèdent par dichotomie, la première alternative séparant les grandeurs constantes des grandeurs variables. Un deuxième axe complexifie ce premier moment, les grandeurs ayant aussi un type (c'est nous qui choisissons ce terme, il n'y en a pas chez les auteurs que nous lisons) : les grandeurs de l'Analyse sont soit réelles soit complexes. Cet aspect de typage peut bien sûr faire l'objet d'une étude historique autonome : on étudierait, pour le premier 19^{e} siècle, la question du lien entre type réel et type complexe ; on pourrait regarder le travail de Riemann, aussi bien en 1851 qu'en 1854, comme un effort pour élargir l'éventail de types de grandeurs en Analyse mathématique par l'introduction de grandeurs géométriques – points variables dans une multiplicité continue – qui, pour n'être pas indépendantes du type réel – la notion de carte, le passage d'une détermination de lieu à n déterminations de grandeurs (réelles) en atteste – n'en jouissent pas moins d'une autonomie conceptuelle. Ces profondes questions historiques et épistémologiques ne sont toutefois pas directement les nôtres et nous ne les toucherons que ponctuellement. A l'alternative constante/variable succède, pour les grandeurs variables, l'alternative discrète/continue. Ces grandeurs variables peuvent ensuite croître ou décroître, dans le cas réel, ce qui n'est qu'une explicitation de la notion de variation ; cette forme d'explicitation ne convient pas dans le cas complexe, dans lequel le modèle de variation demeure toutefois unidimensionnel : une grandeur variable de type complexe décrit une courbe (lorsqu'elle est continue) ou se ramène à une simple suite (x_n) lorsqu'elle est discrète, les deux n'étant pas toujours bien distingués – ce qui se comprend tant que la notion de dénombrabilité n'est pas venue instaurer entre ces deux types un fossé infranchissable. Une grandeur variable peut, outre croître/décroître et plus généralement varier, avoir des limites.

On pourrait penser que tout ce qui s'énonce au 19^e siècle en termes de grandeur variable peut s'énoncer en termes ensemblistes, et on trouvait bien les traces historiques de ce travail de reformulation chez Weierstrass. Tentons un instant d'établir le dictionnaire. Les types correspondraient aux ensembles de nombres, entiers, rationnels, réels, complexes etc., les grandeurs variables correspondraient aux parties (infinies ou, au pire, à au moins deux éléments, on le lisait sous la plume de Weierstrass) d'un de ces ensembles de nombres. La notion de grandeur réelle continue correspondrait à la notion d'intervalle, sans que la question du bord soit immédiatement pertinente ; dans le cas complexe ou lorsque plusieurs variables réelles (indépendantes) entrent en jeu, la variabilité continue correspondrait à une partie, implicitement connexe et d'intérieur non vide, de $\mathbf{C}^n$ ou $\mathbf{R}^n$. Une variable finie correspondrait à une partie bornée. Enfin la notion de limite d'une grandeur variable correspondrait à celle de point frontière d'une partie. Le travail mené sur le maximum nous invite à considérer qu'aux variables continues correspondent des parties non seulement connexes mais aussi ouvertes : les valeurs limites d'une grandeur variable ne sont pas au départ des valeurs qu'elle peut prendre (elle peut s'en approcher d'aussi près qu'on veut), les frontières bordent mais n'appartiennent pas au domaine de la grandeur variable. On voyait Weierstrass distinguer certes clairement ces notions au moyen de définitions précises, du moins lorsqu'on les prend une à une. Mais son refus de rompre avec l'usage le conduisait à des formulations assez complexes, en particulier à des distinctions entre point frontière (qui peut appartenir au domaine) et un terme de point limite réservé aux points frontières n'appartenant pas au domaine.

Nous voudrions à cette occasion introduire des éléments de description d'un haut niveau de généralité. La complexité des formulations weierstrassiennes nous semble moins résulter de la difficulté technique de formulation ensembliste *terme à terme* des notions appartenant au monde de la grandeur qu'à une différence de structuration épistémologique globale entre le monde de la grandeur et le monde ensembliste. L'écriture ensembliste mise en place par Weierstrass amène en coïncidence l'*espace de configuration* de l'Analyse et l'*espace de* *localisation* des énoncés[1] : les énoncés comportent obligatoirement un référent de lieu, et la discussion des lieux associés structure l'enchaînement des énoncés. L'écriture de Lacroix, Cauchy ou Serret est certes porteuse d'une attention au lieu et aux domaines, d'une attention dont nous avons vu certaines modalités radicalement différentes de la nôtre tout en reconnaissant qu'elle devenait un élément pertinent dans un cadre de numérisation de l'Analyse. Mais ce qui organise alors le discours, ce qui l'articule et préside à son déroulement, ce n'est pas l'enchaînement des relations entre domaines ; le discours se déroule dans l'espace de la théorie, un espace structuré par des alternatives dont nous voyons les premiers exemples avec constant/variable, discret/continu, ou pour reprendre des alternatives rencontrées un peu plus haut, variables indépendantes / variables dépendantes, point ordinaire / point singulier. Ces alternatives structurent un autre *espace de configuration* de l'Analyse [2] que celui construit par Weierstrass. Par exemple chez Cauchy, la question du bord n'apparaît-elle pas nécessairement dans le cours de l'exposé, elle est le corollaire du choix consistant à s'orienter dans la pensée vers la question des points singuliers. En introduisant la question du lien entre l'espace de configuration d'une théorie et un éventuel espace de localisation, nous ajoutons un niveau à l'analyse d'épistémologie historique. Nous distinguons en effet la référence au lieu – son mode, sa pertinence, son caractère facultatif ou obligatoire, aspects que nous avons étudiés jusqu'ici – du lien que cette référence au lieu entretient avec la *marche* de la théorie ; l'espace de configuration est lieu idéal du « s'orienter dans la pensée » : dans l'espace de configuration weierstrassien, la référence au lieu entretient avec la marche de la théorie un rapport *structurant*, alors qu'elle n'apparaît auparavant qu'au détour d'un raisonnement que d'autres raisons guident. Cette différence profonde, au niveau du *régime théorique*, n'est pas incompatible avec les séries de reformulations que nous notions entre langage de la grandeur et topologie ensembliste : la possibilité d'établir un dictionnaire entre

[1] Coïncidence mais pas identification : on voit que nous avons pris goût aux surfaces à plusieurs feuillets.

[2] Cette distinction entre espace de localisation et espace de configuration nous est suggérée par la lecture du travail de Michel Foucault sur la *Naissance de la clinique*, P.U.F., Paris, 1963. Dans son premier chapitre, Foucault constitue un type-idéal de la médecine du 18e siècle, pour l'opposer à la médecine clinique naissant autour de 1800. Pour la médecine clinique, le concept de *siège* d'une maladie devient central, et cette primauté conceptuelle s'articule avec la naissance d'une nouvelle forme de savoir médical, l'anatomie pathologique ; la médecine clinique évolue, selon Foucault, dans l'espace de localisation, la localisation corporelle étant la clé de diagnostic et de compréhension de la maladie. Par opposition, le diagnostic était au 18e siècle guidé par le tableau des qualités essentielles des maladies, leur localisation corporelle n'étant qu'un aspect subalterne, voire dénoncé comme superficiel : c'est ce tableau de classification quasi-linnéenne des maladies que Foucault désigne comme l'espace de configuration de la théorie classique. « La coïncidence exacte du « corps » de la maladie et du corps de l'homme malade n'est sans doute qu'une donnée historique et transitoire. Leur évidente rencontre ne l'est que pour nous (…). L'espace de *configuration* de la maladie et l'espace de *localisation* du mal dans le corps n'ont été superposés, dans l'expérience médicale, que pendant une courte période : celle qui coïncide avec la médecine du XIXe siècle et les privilèges accordés à l'anatomie pathologique. » (p.1)

deux langues ne préjuge pas des difficultés de traduction. Ce travail weierstrassien d'établissement d'un dictionnaire bilingue grandeurs-ensembles, on en voit aussi l'effet dans l'organisation des traités d'Analyse pré- et post-weierstrassiens. La topologie ensembliste se substitue exactement à l'exposé succinct des notions relatives aux grandeurs : l'une et l'autre constitue la première partie des traités, une première partie qui peut aller de quelques lignes – c'est souvent le cas pour ce qui est des grandeurs variables – à un gros chapitre – chez Jordan ou Osgood, et précède – au moins en droit – l'introduction de la notion de fonction.

ii. La fonction dans le monde de la grandeur.

Outre l'inscription dans des régimes théoriques différents, monde de la grandeur et monde ensembliste se distinguent par la notion de fonction dont ils sont porteurs et par le rôle de la notion de multiplicité ; développons pour l'heure ce premier point. Repartons par exemple des premières pages de Serret :

Chapitre Premier

Notions Préliminaires

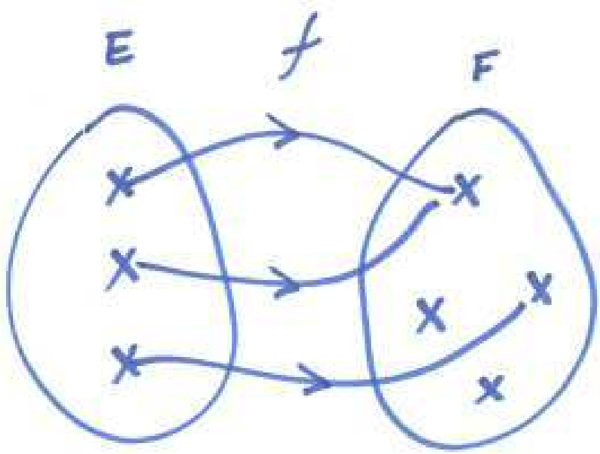
Des fonctions

1. Parmi les quantités qui interviennent dans une recherche mathématique, il y a lieu de distinguer celles dont la valeur est *déterminée* et celles qui sont susceptibles de prendre plusieurs valeurs différentes. Les premières sont désignées sous le nom de *constantes*, les autres sont dites des *variables*.

   Dans toute question où il y a lieu de considérer plusieurs variables, on peut attribuer à quelques-unes de ces variables des valeurs arbitraires, et alors les autres variables prennent des valeurs déterminées. Les premières sont nommées *variables indépendantes*, les autres sont dites *variables dépendantes* ou *fonctions des variables indépendantes.* [Serret 1900 1]

Ce passage et celui qui le suit sur la notion de limite d'une quantité variable, d'infiniment petit et d'infiniment grand, reprennent quasiment mot pour mot ce qu'on lisait déjà en 1821 dans l'*Analyse Algébrique* de Cauchy. On multiplierait à loisir les citations de ce type ([Lagrange 1806 9], [Lacroix 1867 1], à l'autre bout du siècle [Lipschitz 1877 64]).

Esquissons les éléments stables et les principales conséquences de cette entrée dans la notion de fonction. Le noyau central est le suivant : une situation fonctionnelle est une situation de *dépendance* entre *grandeurs variables*. On voit dans ce cadre que le cas général est celui des fonctions implicites, que l'équation liant les grandeurs soit algébrique ou différentielle ; le cas des fonctions explicites $y = f(x_1,x_2,...,x_n)$ est celui, heureux mais très particulier, des équations ne comportant pas d'élément différentiel et résolues en une de leurs inconnues. On comprend aussi l'usage quasiment indifférent des termes *équation* (entre deux variables), *fonction* (d'une variable) et *courbe*. On comprend aussi que l'univocité n'a rien à faire dans la définition du terme « fonction », les dépendances les plus courantes, par exemples les équations algébriques, donnant naissance à des fonctions multivoques. La fixation d'une valeur pour les variables indépendantes détermine plus ou moins la valeur de la fonction, l'univocité étant, ici encore, une propriété heureuse mais particulière. Cette multivocité – ou sous-détermination, ou ambiguïté (*Mehrdeutigkeit*) – de la fonction peut d'ailleurs présenter de nombreux degrés : par ordre croissant d'indétermination, la fonction racine carré est bi-voque, la fonction arctangente est infiniment multivoque et dépend d'un entier arbitraire, la primitive d'une fonction continue est quant à elle déterminée à une constante réelle arbitraire près[3]. Une autre conséquence fondamentale concerne le statut même de la notion de fonction. On le saisit peut-être mieux en l'opposant à une description paradigmatique de la fonction conçue comme application :



Cette représentation graphique permet de saisir les traits caractéristiques de la notion d'application : entrent en jeu des éléments de natures différentes, d'une part deux ensembles E,F, d'autre part une application f ; l'application c'est le *système des flèches*, elle est un objet-relation, un objet de second niveau par rapport aux ensembles E et F – ce qui ne signifie pas qu'elle soit d'une nature non ensembliste puisqu'on peut la décrire comme une partie du produit cartésien ExF ; les deux ensembles jouent des rôles dissymétriques, E est source et F est but, cette dissymétrie étant inscrite dans les axiomes qui exigent que chaque élément de E (couverture universelle de la source) soit associé à un et un seul (univocité) élément de F,

[3] Nous devrions aujourd'hui préciser « sur un intervalle ».

alors qu'un élément de F peut n'être relié à aucun ou l'être à plusieurs éléments de E. Ce cadre permet de formuler simplement les questions d'ensemble image, d'injectivité et de surjectivité, de restriction et de prolongement … toutes questions syntaxiquement globales ; les axiomes permettent aussi de formuler simplement les notions d'inversion et de composition, inversion et composition dont la possibilité dépend des circonstances particulières elles-mêmes décrites au moyen des seules notions ensemblistes d'image etc. Lorsque les ensembles sont ordonnés on peut poser des questions de croissance ou de maximum ; d'autres structures sur E et F permettent de poser les questions de continuité, de dérivabilité, d'intégrabilité etc. La description que nous venons de faire est purement anhistorique ; on a, en particulier, vu combien cette saisie de la fonction comme application était historiquement postérieure au travail de reformulation des concepts fondamentaux de l'Analyse sur des notions de topologie ensembliste, sur fond de fonction arbitraire saisie (et uniquement saisissable) selon un point de vue purement ponctuel. L'objectif est ici d'utiliser ce modèle extrême pour cerner ce qui le distingue de la fonction vue comme dépendance entre grandeurs variables. Si l'on représente une relation entre deux grandeurs variables x et y sous la forme générique $f(x,y) = 0$, un trait fondamental est la symétrie de la situation : face à une dépendance donnée entre des grandeurs données, on peut considérer l'une des variables comme fonction de l'autre ; il n'y a pas à établir d'existence d'un objet fonction, puisque la fonction n'est autre que l'une des deux grandeurs variables *vue comme* fonction de l'autre. D'un *point de vue* on peut bien discuter la richesse, la pertinence etc., on ne démontre pas l'existence. Il n'y a en particulier pas de théorème d'inversion puisque considérer x comme fonction de y plutôt que y comme fonction de x n'est qu'un changement de perspective : on peut bien sûr, par contre, étudier les propriétés x comme fonction de y, et poser alors la question de l'univocité. Dans le modèle de la fonction comme application entraient en jeu trois objets, deux ensembles et une application ; les éléments s'articulent différemment dans notre modèle ancien : deux grandeurs variables (qu'on assimile progressivement, après Weierstrass, à des parties de domaines numériques), une relation de dépendance, le choix enfin d'un point de vue dissymétrique sur cette relation de dépendance amenant à considérer l'une des variables comme fonction de l'autre. On trouve dans la syntaxe les traces de cette radicale différence. Dans le modèle de la fonction comme application la fonction est désignée par f, alors que la notation $f(x)$ désigne un élément de l'ensemble but ; au 19^{e} siècle au contraire on ne peut trouver la fonction que liée à sa variable, soit sous la forme $y = y(x)$ soit en indiquant génériquement le lien fonctionnel par $y = f(x)$ ou $F(x)$ ou $\varphi(x)$: y seul désigne une grandeur variable, qu'on peut bien considérer de manière autonome – elle possède alors les propriétés déjà évoquées (un type, être discrète ou continue, croître/décroître ou parcourir un espace selon une courbe, tendre vers …) – seul $y(x)$ ou $y(z)$ … désigne y vue comme fonction d'une variable à préciser obligatoirement, la liste des grandeurs pouvant être considérées dans leur relation de dépendance avec y étant ouverte.

Encore faut-il voir que toute considération d'une relation de dépendance entre grandeurs ne fonde pas un regard fonctionnel : il se présente deux pôles, l'un plus algébrique, l'autre plus purement fonctionnel ; lorsqu'on passe par degrés de l'un à l'autre, la même lettre x est vue comme une inconnue, comme une indéterminée puis enfin comme une grandeur variable. Partons par exemple d'une relation polynomiale $f(x,y) = 0$, dont on peut penser qu'elle joue le rôle de modèle par rapport auquel les autres – les équations différentielles par exemple – sont comprises. On peut donner à x une valeur numérique et chercher à résoudre l'équation en l'inconnue y, le niveau est algébrique élémentaire. On peut considérer que x et y sont des indéterminées et chercher à *exprimer* l'une en fonction de l'autre : dans les cas algébriques on peut essayer par radicaux, par développement en séries de puissances entières ou fractionnaires ; si l'équation contient des éléments différentiels on peut aussi chercher une représentation intégrale, ou en série de *sinus* et de *cosinus*, ou dans une expression finie utilisant les fonctions d'une certaine famille : fonctions elliptiques, intégrales de première espèce et logarithmes etc. Selon les auteurs et les périodes ce type de recherche sera plutôt classé dans l'Algèbre (ainsi chez Lagrange) ou plutôt dans l'Analyse. Ce qui est spécifique à l'Analyse, c'est de considérer les grandeurs comme variables : le regard sur la situation de dépendance est un regard fonctionnel lorsqu'on étudie non seulement la dépendance entre valeurs des grandeurs indéterminées, mais aussi la dépendance induite entre les variations des grandeurs variables ; le point de vue purement fonctionnel c'est *la dépendance saisie comme co-variation*. Cette covariation peut être par exemple décrite en passant de la dépendance $f(x,y) = 0$ entre les grandeurs variables à la dépendance induite entre les variations infinitésimales : $f_x' \, dx + f_y' \, dy = 0$. Lorsque les variables sont complexes la description narrative déjà possible dans le domaine réel (qu'on se remémore la description du maximum (local) chez Lacroix) ouvre le champ des questions de monodromie : lorsque je fais décrire (dans le plan des x) une courbe à la variable indépendante x, quelle est la courbe décrite (dans le plan des y) par la variable dépendante y ? Bien entendu le travail du mathématicien articule ces points de vue et ces objectifs ; l'entrelacement entre les aspects « grandeur comme indéterminée / recherche de représentation des dépendants au moyen des indépendants » et « grandeur comme variable / étude de co-variations » est particulièrement frappant chez

Riemann dont le mouvement de la pensée consiste, dans les textes que nous commentions [4], à fonder le premier sur le second, l'étude des co-variations étant d'ailleurs elle-même menée, nous le notions alors, dans un aller-retour entre les aspects infinitésimaux (similitude dans les plus petites parties) et les questions de monodromie. Plus généralement, cette saisie de la dépendance par la co-variation est particulièrement bien adaptée au cas des fonctions multivoques. Rappelons à ce propos deux mode de saisie de la dépendance – préalables et sous-jacentes à celle de la co-variation – que nous avions distinguées à l'occasion de la lecture de Riemann. On peut, premier mode de saisie, commencer par dissymétriser la relation de dépendance en distinguant une variable et une fonction puis, second temps, assigner une valeur à la variable pour considérer la où les valeurs de la fonction. Cette saisie, proche de la description ensembliste de l'image d'un point par une application, est bien entendue utilisée au 19e siècle, aussi bien numériquement que pour une recherche de représentation ; nous la placerions du côté du pôle algébrique. Cette saisie des valeurs dépendantes est toutefois combinée à un second mode de saisie, plus symétrique et narrative – plus près du pôle purement fonctionnel que du pôle algébrique – consistant à se donner deux valeurs particulières qui se correspondent dans la dépendance, $f(x_0,y_0) = 0$, pour ensuite décrire les co-variations. Ce deuxième mode de saisie peut sembler plus adapté à l'étude des fonctions multivoques, il renvoie naturellement au point de vue universellement local désignant comme point non pas le seul x_0 mais le couple (x_0,y_0).
Quelle que soit la tâche, il semble finalement que la dissymétrisation faisant considérer l'une des grandeurs comme fonction et l'autre comme variable libre ne soit jamais que facultative, la dépendance restant le socle objectif. On vient de le voir sous l'angle des variations, dans laquelle la notion de co-variation ne nécessite pas fondamentalement de dissymétrisation fonctionnelle. C'est aussi le cas dans les tâches de représentation, par exemple lorsqu'on cherche à passer d'une équation aux dérivées partielles à une relation ne contenant plus de dérivées, le cas le plus simple consistant à passer de $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0$ (le membre de gauche vérifiant la condition d'intégrabilité $f_y' = g_x'$) à $\Phi(x,y) =$ constante.

Achevons sur un résumé sous forme en partie schématique des traits isolés jusqu'ici, schémas déployant des éléments de ce que nous nommions l'espace de configuration de la théorie. Un premier schéma concerne une unique grandeur :

[4] Hormis les *Hypothèses* de 1854, où le travail porte sur la notion de grandeur pour elle-même et non sur la question de la dépendance entre plusieurs grandeurs, quoique ce dernier aspect intervienne dans la question du

Une grandeur de type donné (entier, réel, complexe …)

est variable, auquel cas — est constante

- Elle est discrète ou continue
- Elle peut prendre une valeur déterminée (parmi, classiquement, une infinité)
- Elle varie : elle croît ou décroît (cas réel), décrit une courbe (cas continu complexe)
- Elle peut tendre vers des limites

Lorsque plusieurs grandeurs variables entrent en jeu :

Plusieurs grandeurs variables

sont dépendantes (liées) — sont indépendantes (libres)

Se présentent alors deux principales familles de tâches :

- Représenter plus explicitement, exprimer plus simplement (pôle algébrique)
- Etudier les co-variations (pôle fonctionnel)

Dans les deux cas, on *peut* adopter un *point de vue* non symétrique sur la relation de dépendance en considérant certaines des grandeurs variables comme libres et d'autres comme fonctions des premières.

On pourrait décrire un passage du monde de la grandeur dont ces schémas présentent la structuration au un monde ensembliste en deux phases, historiquement successives : dans une première phase la grandeur variable deviendrait simple partie (d'un ensemble de nombres), c'est ce que ferait Weierstrass en mettant en place les éléments d'une topologie ensembliste reposant elle-même sur une construction des nombre réels. Dans un second temps la fonction passerait du statut de grandeur variable considérée d'un certain point de vue au statut d'entité relationnelle objective et autonome : la fonction comme table (puis, bien plus tard, comme système de flèches), la fonction comme application entre ensembles. C'est essentiellement sur cette première phase que nous travaillons ; elle forme le contexte sur fond duquel nous

---

passage d'un point variable dans une multiplicité continue à un système de *n* grandeurs numériques variables, ses pouvons mieux saisir les travaux de Riemann, Klein, Neumann, Weierstrass ou Poincaré : selon le moment et l'auteur, le modèle classique entrave la marche de la pensée ou, au contraire, offre des ressources spécifiques ; on cherche à le dépasser de manière systématique ou on joue sur la gamme des possibilités de formulations offerte par la cohabitation des deux modèles.

Dans le monde de la grandeur vu depuis le monde ensembliste, la grandeur variable se présente comme un *Janus bifrons*, à la fois domaine et fonction. Le travail de Weierstrass et de ses successeurs contribue à ôter à la grandeur variable unique tout aspect dynamique – et à l'écriture de l'Analyse tout recours à la narration – en la repoussant peu à peu du côté de la simple partie d'un espace numérique, d'un simple ensemble de valeurs ou de points ; le terme allemand *Menge* rend bien cette absence de toute trace dynamique, l'ensemble comme simple collection c'est finalement le *tas*. Repousser la grandeur variable seule du côté de la partie isole par contrecoup un niveau fonctionnel autonome, autonomisation dont la table de du Bois-Reymond nous semble être une première expression. Mais ce passage est progressif et on peut en caractériser les moments en suivant le rôle du *domaine* d'une grandeur variable : de Cauchy au monde ensembliste, en passant par Weierstrass, on passe de grandeurs variables entretenant des relations avec des domaines numériques (conséquence de la numérisation de l'Analyse) à celle de l'identification de la grandeur variable à un domaine ; mais avant que la grandeur variable ne *soit* un domaine – on est alors dans le monde ensembliste et le terme de grandeur variable est plus une métaphore qu'une notion première – s'étend une longue phase transitoire dans laquelle la grandeur variable *a* un domaine. Lorsque deux grandeurs interdépendantes sont en jeu, on peut parler du passage progressif de la fonction *d'une* grandeur variable à la fonction *sur* un domaine, le terme fonction n'ayant pas le même sens dans les deux cas. C'est ce double entre-deux, celui de la grandeur variable vue depuis le monde ensembliste comme participant à la fois de la fonction et du domaine, celui du passage de la grandeur variable comme ayant un domaine à la grandeur-domaine, que se déploie l'Analyse dans le dernier tiers du 19^{e} siècle. Avant de passer aux exemples nous voudrions présenter un élément, plus particulier mais que nous pensons éclairant, de mode de structuration pré-ensembliste.

3. Une ressource classique : *Punkt / Stelle / Lage*.

---

coordonnées curvilignes.

On est mis sur une piste prometteuse lorsqu'on se laisse étonner par ce qu'on pourrait appeler « l'intersection invisible ». Ainsi dans l'article de Jordan *Sur les contours tracés sur une surface* [Jordan 1866a] peut-on lire :

> La surface considérée peut avoir diverses nappes qui pourraient se réunir en certains points singuliers, comme au sommet d'un cône, ou se couper mutuellement selon des lignes singulières. Nous conviendrons de ne tenir aucun compte de ces liaisons accidentelles, et de ne pas considérer comme contigus sur la surface deux points infiniment voisins, mais pris sur deux nappes différentes. [Jordan 1866a 110]

Ce caractère finalement conventionnel de l'intersection, au moins dans le cas où le lieu d'intersection est de dimension inférieure, est utilisé au même moment par Neumann dans son exposé de la théorie riemannienne des fonctions abéliennes. Comme toujours, ce texte est pour nous une source très riche par son souci d'expliquer et de motiver assez longuement ce qui n'appelait pas même une ligne chez Riemann. Le contexte théorique est bien sûr celui des voisinages n-uples des points de ramification. On se souvient que Riemann se plaçait dans un cadre fonctionnel pour décrire les co-variations de points variables, l'un dans le plan l'autre sur la surface au-dessus du plan : il fallait faire n fois le tour complet du point de ramification dans le plan pour réaliser un tour complet sur la surface. Comme nous l'avons souligné, Neumann procède différemment de Riemann et instaure un moment géométrique autonome précédant l'habillage (*Einkleidung*) analytique :

> Soit un rayon issu d'un point fixe c, libre de tourner autour de ce point, si on le fait glisser le long d'une courbe directrice donnée dans l'espace il décrit une nappe de cône. Si la courbe se recoupe elle-même, il en est de même de la nappe de cône.
>
> (…) Imaginons sur la sphère de centre c une courbe directrice ayant à peu près la forme d'un 8, c'est à dire supposons que la courbe est, comme dans le cas du 8, formée d'un chemin qui se recoupe une fois après une première boucle, puis, après une deuxième parcouru en sens contraire, revient au point de départ. On peut appeler le point où cette courbe en 8 se coupe elle-même un point double, désigné par d.
>
> Faisons suivre au rayon issu de c le chemin de cette directrice ; la nappe conique, tout comme la courbe elle-même, se recoupe tout d'abord après le parcours d'une boucle (selon une ligne cd), puis, après le parcours d'une seconde, en sens contraire, revient au départ. Cette nappe conique possède donc deux ouvertures, l'une correspondant à la partie inférieure l'autre à la partie supérieure du 8.
>
> Nous avons ici devant nous une surface *qui se recoupe elle-même*. Nous aurons souvent affaire à de telles surfaces à l'avenir ; c'est pourquoi il sera commode,

> comme nous sommes au commencement, de faire connaître dès à présent une idée fondamentale qui – quelque forcée qu'elle puisse sembler de prime abord – devra être conservée fermement à l'avenir concernant ces surfaces.
>
> *Nous fixons une fois pour toute qu'entre deux parties de surface qui se coupent le long d'une ligne quelconque, il ne se trouve le long de cette ligne ni connexion* [Zusammenhang] *ni voisinage* [Nachbarschaft]. [Neumann 1884 64] [5]

Après cette description débouchant sur la fixation d'une convention et avant le passage à l'habillage analytique, Neumann esquisse deux justifications différentes :

> Par exemple, imaginons dans l'espace deux disques d'égale grandeur, se coupant le long d'un diamètre et faisant l'une avec l'autre un angle quelconque : ces deux disques seront regardés comme deux morceaux de surface [*Flächenstücke*] entièrement séparées l'un de l'autre ; c'est-à-dire regardés comme deux morceaux de surface pouvant changer de position [*Lage*] dans l'espace indépendamment l'un de l'autre, donc transportés en des emplacements [*Stellen*] de l'espace entièrement arbitraires et arbitrairement éloignés.
>
> Lorsqu'il est question d'un point qui *parcourt, avance* ou *progresse* sur une surface donnée, on sait bien qu'on entend toujours par là un point dont la position [*Lage*] sur la surface varie *continûment* ; un point, donc, qui se déplace toujours d'un quelconque emplacement [*Stelle*] de la surface vers un *emplacement voisin* [*benachbarten Stelle*]. Les positions [*Lagen*] successives d'un tel point forment donc par leur totalité une

[5] « *Ein Strahl, welcher von einem festen Punkte c ausgeht, um c drehbar ist, und nun längs irgend einer im Raume gegebenen Leitcurve fortgleitet, wird einen Kegelmantel beschreiben. Ist die Leitcurve eine in sich zurücklaufende, so gilt Gleiches auch von dem Kegelmantel.* (…) *Wir wollen uns nun auf der um c beschriebenen Kugel eine Leitcurve denken, welche etwa die Form einer 8 besitzt, nämlich annehmen, dass diese Curve, ebenso wie es bei der 8 der Fall ist, durch einen Zug ensteht, welcher zuerst nach Ausführung* einer *Wendung sich selber durchschneidet , und welcher sodann nach Ausführung einer* zweiten*, entgegensetzten Wendung in seinen Anfang Zurücklauft. Der Punkt, in welchem jene 8förmige Curve sich selber durchschneidet, mag der* Doppelpunkt *der Curve genannt und mit* d *bezeichnet werden. Lassen wir den von c ausgehenden Strahl dem Zuge dieser Leitcurve folgen, so wird der von ihm beschriebene Kegelmantel, ähnlich wie jene Curve selber, zuerst nach Ausführung* einer *Wendung (in der Linie* cd*) sich selber durchsetzen, und sodann nach Ausführung einer* zweiten*, entgegensetzten Wendung, in seinen Anfang zurücklaufen. Es wird demnach dieser Kegelmantel* zwei *Oeffnungen besitzen, von welchen die eine dem unteren, die andere dem oberen Theile der 8 entspricht.Wir haben hier eine Fläche vor uns, welche in einer gewissen Linie* sich selber durchsetzt*. Mit Flächen solcher Art werden wir in Zukunft häufig zu tun haben; und es wird daher zweckmässig sein, wenn wir uns hier zu Anfang sogleich mit einer gewissen Grundvorstellung bekannt machen, welche – wie gezwungen sir im ersten Augenblick vielleicht auch erscheinen mag – bein jenen Flächen in Zukunft beständig festgehalten werden muss.* Wir setzen nämlich ein für allemal fest, dass zwischen zwei Flächentheilen, welche einander in irgend einer Linie durchsetzen, längs dieser Linie hin kein Zusammenhang, also auch keine Nachbarschaft stattfinden soll. »

courbe, qui n'est formée que de points contigus [*zusammenhängenden Punkten*] de la surface. [Neumann 1884 65][6]

Ici ne s'agit bien sûr pas pour Neumann d'établir la nécessité de sa convention, encore moins de démontrer l'irréalité de l'intersection : on ne démontre pas un point de vue ; Neumann choisit toutefois de l'appuyer sur autre chose que son utilité en théorie des fonctions abéliennes. La première image, celle des deux disques flottant librement dans l'espace, fait appel à la géométrie au sens le plus usuel et élémentaire. La figure géométrique possède une identité qui ne dépend en rien de son emplacement particulier dans le substrat neutre qu'est l'espace ; on ne la saisit toutefois jamais qu'en un emplacement particulier : sa position. Faire de la géométrie c'est savoir distinguer la figure de l'emplacement – emplacement qu'on pourrait considérer d'un point de vue ensembliste comme un ensemble de points, une partie de l'espace considéré lui-même comme ensemble de points – et savoir regarder la position de la figure comme un attribut non essentiel. Il est amusant de voir Neumann avoir recours à ce fond géométrique usuel pour exposer une théorie riemannienne dont l'une des spécificités est la mise en avant de l'*Analysis situs* comme proto-géométrie, ce qui reste de la théorie des figures lorsqu'on ne les considère plus comme indépendantes de leur emplacement. On se rappelle le paragraphe A.I des *Hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* :

> La mesure consiste dans une superposition de grandeurs à comparer ; il faut donc, pour mesurer, avoir un moyen de transporter la grandeur qui sert d'étalon de mesure pour les autres. Si ce moyen manque, on ne pourra alors comparer entre elles deux grandeurs, que si l'une est partie de l'autre, et encore, dans ce cas, ne pourra-t-on décider que la question du plus grand ou du plus petit, et non celle du rapport numérique. Les recherches auxquelles un tel cas peut donner lieu forment une branche générale de la théorie des grandeurs, indépendante des déterminations métriques, et dans laquelle elles ne sont pas considérées comme existant indépendamment de la position, ni comme exprimables au moyen d'une unité, mais comme des régions dans une variété. [Riemann 1898 284]

[6] « *Denkt man sich z.B. im Raume zwei gleich grosse Kreisflächen, welche einander längs eines Durchmessers durchsetzen und unter irgend welchem Winkel gegen einander geneigt sind, so werden diese beiden Kreisflächen als zwei Flächenstücke anzusehen sein; nämlich als zwei Flächenstücke anzusehen sein, welche unabhängig von einander ihre Lage im Raume ändern können, mithin an beliebige und beliebige weit von einander entferne Stellen des Raumes versetzt werden können. Sobald von einem Punkte die Rede ist, welcher auf einer gegebenen Fläche* fortgeht, *oder* fortschreitet, *oder* fortläuft, *so versteht man darunter bekanntlich jederzeit einen Punkt, welcher seine Lage auf der Fläche* stetig *ändert, also einen Punkt, der von jedweder Stelle der Fläche immer nur zi einer* benachbarten Stelle *sich fortbewegt. Die aufeinander folgenden Lagen eines solchen Punktes werden damnach in ihrer Gesammtheit eine Curve bilden, welche aus lauter* zusammenhängenden *Punkten der Fläche besteht.* »

On voit comme l'*Analysis situs* et, plus simplement, toutes les notions ensemblistes d'intersection ou de réunion, dépendent d'un changement de point de vue consistant à oublier un des traits fondateurs de la géométrie usuelle. Avec ses disques flottants, Neumann fait ponctuellement jouer dans l'autre sens le *Gestalt switch* pertinent en théorie riemannienne. La seconde explication de Neumann reprend les éléments introduits dans le premier moment de l'exposé à propos de la surface associé à une courbe en 8. Comme dans le cas des disques flottants la distinction entre emplacement (*Stelle*) et position (*Lage*) est fondamentale, mais un troisième terme s'introduit, celui de point (*Punkt*). Le style (très) narratif permet de donner à saisir le point comme point variable, grandeur variable d'un type géométrique donné. L'espace est un substrat neutre et inerte, toujours « déjà là », accueillant les objets géométriques en leur fournissant un emplacement. La *position*, c'est la conjonction du *point* (variable) et d'un *emplacement* ; Riemann parlerait d'une des détermination du concept de grandeur variable, dans un style empruntant au vocabulaire de la logique plus qu'aux ressources de la narration. Dans la figure du 8, par exemple, on doit distinguer le 8 comme ensemble de points-emplacements (*Stellen*) et le 8 décrit ou engendré par l'évolution dans l'espace du point variable (*Punkt*). On retrouve ici dans un cadre géométrique les deux aspects de la grandeur variable qu'on avait rencontrés dans le cas des fonctions réelles d'une variable réelle : à la variable est associée dans le substrat (la droite réelle, l'espace) un domaine, domaine fournissant non seulement les valeurs ou les points qui sont les déterminations particulières de la grandeur variable (vue comme grandeur indéterminée), mais aussi lieu parcouru/engendré au cours de la variation. Le 8 présente un point d'intersection en un unique emplacement (*Stelle*), mais dans de 8 considéré comme lieu du point (*Punkt*) générique deux positions sont distinguables en ce même emplacement. On retrouve un autre trait remarqué dans le cas des fonctions réelles d'une variable réelle : le point de vue dominant n'est pas le point de vue ponctuel, la fonction a en une valeur déterminée de sa variable bien plus qu'une simple valeur, elle a un comportement ; de même ici, là où un regard purement ponctuel ne voit qu'un point d'intersection, la saisie du 8 comme lieu de la grandeur variable voit deux comportements.

On reconnaît sans peine dans cette description du cône associé à un 8 les éléments fondamentaux du mode de donation de la surface de Riemann tel qu'il les introduit en 1851 et les reprend en 1857, à deux différences près toutefois : la surface de Riemann n'est pas plongée dans l'espace, le lieu d'intersection est de même dimension que le lieu principal. Le coup de force de Riemann consiste à utiliser des éléments bien usuels de saisie des grandeurs variables aussi bien dans le cadre numérique (fonctions réelles d'une variable réelle) que dans le cadre géométrique (lieux décrits par des points) pour créer un contexte théorique inédit. Si l'on utilise le vocabulaire de Neumann pour paraphraser Riemann, on obtient l'organisation suivante : lorsqu'il s'agit de se donner ou de décrire une surface de Riemann, l'espace d'accueil est le plan complexe, c'est lui qui fournit les emplacements ; la grandeur géométrique variable, le point de la surface de Riemann, possède en un emplacement du plan complexe autant de positions que la surface a de feuillets étendus au-dessus de ce point ; la surface de Riemann n'est pas un espace au sens ensembliste, elle est le lieu d'un point variable dans le plan, elle est le plan structuré dans une couple de points de vue *Stelle*/*Lage* faisant apparaître de la multiplicité. Le mode privilégié de description d'une telle situation est le mode narratif consistant en la mise en relation des trajets du point générique en termes d'emplacements et de positions : c'est ce que nous explicitions dans notre premier chapitre, dans des termes ensemblistes d'un parfait anachronisme, en parlant de relèvement d'un chemin par une application entre ensembles structurés (des variétés analytiques complexes). Cette institution de la surface comme mode spécifique d'articulation de points de vue faisant jouer les éléments fondamentaux du monde de la grandeur variable n'appelle pas, on l'imagine, les mêmes explicitations en termes de local/global qu'une surface comme ensemble structuré. Dans un cadre ensembliste, entendre « point » comme « élément » (et « figure » ou « domaine » comme « partie ») suppose la donnée d'un ensemble des points ; la structuration est entièrement différente dans le monde de la grandeur variable, dans lequel « point » recouvre un triplet *Punkt / Stelle / Lage* qui ne s'inscrit pas dans une totalité comme un élément dans un ensemble, mais dans un espace numérique d'accueil au sein duquel son déploiement est racontable (style narratif). Là où une saisie ensembliste change d'ensemble au moyen d'applications, transporte des structures, doit déclarer à chaque étape « où ça se passe », la saisie dans le monde de grandeur variable change de point de vue : il ne s'agit pas de savoir dans quel ensemble on travaille, mais de savoir que ce dont on parle doit, à ce moment du récit, être « considéré comme », « vu comme » etc. Un changement de point de vue n'est pas une carte locale, quand bien même son habillage analytique consisterait en un changement de variable permettant de comprendre le comportement en un point singulier. Du côté global, la totalité à laquelle renvoie l'universel du *pdvul* peut être un horizon en tant qu'elle est totalité des positions, lieu engendré par la grandeur variable en tant qu'elle est variable ; ce qui est donné, qui est toujours déjà là ; c'est le substrat numérique du plan complexe qui sait accueillir les variations bidimensionnelles en fournissant les emplacements.

II. Figures de l'entre-deux.

1. L’intersection : regard conventionnel, absence de convention.

Cette structuration permet des références au lieu de types différents de ceux permis dans une structuration ensembliste ; on voit ces possibilités être des ressources pour une élaboration théorique originale chez Riemann par exemple. Le fonctionnement par *points de vue* crée des marges de manœuvre, ouvre des possibilités, mais crée aussi des ambiguïtés : plusieurs lectures sont possibles selon le point de vue choisi ; faute de certaines conventions universelles, le lecteur doit être guidé sur la manière d’entendre telle ou telle référence au lieu. Nous l’avons déjà vu à propos de certains problèmes d’intersection dans lesquels on peut s’appuyer sur la notion de lieu d’une grandeur variable ou sur la libre mobilité des figures géométriques pour justifier une lecture en termes d’intersection accidentelle et donc invisible ; ou au contraire renoncer à la libre mobilité des figures pour rendre visibles les relations d’inclusion nécessaires à la mise en place de l’*Analysis situs*. Les auteurs ne choisissent pas nécessairement un point de vue contre un autre, ainsi ceux que nous évoquons à l’instant sont tous deux présents dans le traité de Neumann, et même nécessairement tous deux présents puisque le développement de la théorie repose sur leur alternance réglée.

On retrouvait la question de la saisie de l’intersection dans un contexte proche mais légèrement différent à propos des démonstrations d’existence de fonctions harmoniques par les méthodes de Schwarz et Neumann. On se souvient de la méthode « adjonctive » de Neumann qui nécessitait la *fusion* (*Verschmelzung*) de deux parties se recouvrant partiellement :

> On peut poser [*legen*] deux surfaces données A et B l’une au-dessus de l’autre de sorte qu’il se présente un recouvrement partiel [*theilweise Deckung*]. On peut alors laisser fusionner [*verschmelzen*] les morceaux de surface se recouvrant pour transformer [*verwandeln*] ces deux surfaces en *une seule*. Cette dernière surface peut être appelée la surface *combinée* à partir de A et B [*die aus A und B combinirte Fläche*], et désignée par (A,B). Je vais montrer dans ce qui suit, que dans de nombreux cas (qui restent à indiquer plus précisément) le problème fondamental (20.) p.396 est toujours résoluble pour la surface combinée (A,B), pour peu qu’on dispose d’une méthode quelconque pour le résoudre pour les surface isolées A et B. [Neumann 1884 446] [7]

[7] « *Man kann zwei gegebene Flächen A und B so aufeinander legen, dass theilweise Deckung stattfindet. Man kann sodann die sich deckenden Flächentheile mit einander verschmelzen lassen, und hierdurch jene Fläche A*

On trouve de ces fusions volontaires chez Schwarz, par exemple à la fin de son article de 1869 *Über einige Abbildungsaufgaben*[8]. Une fonction *u* de la variable *t* a été exhibée, qui transforme conformément le demi-plan supérieur du plan des *t* (demi-plan qu'on peut aussi voir comme un disque) en un triangle donné du plan des *u* ; cette même application transforme tout le plan des *t*, formé de deux demi-plans, en deux triangles soudés par un côté par rapport auquel ils sont symétriques.

> Positionnons maintenant les deux triangles de sorte que les sommets correspondants coïncident, et imaginons que ces deux surfaces, qui dans cette représentation sont différentes et séparées, ont en commun les points de leur frontière et s'y connectent le long d'un pli ; on obtient une surface fermée simplement connexe, une surface U recouvrant deux fois complètement un triangle (…). Le long de la frontière de ce triangle la surface U a un pli le long duquel les deux feuillets se connectent continûment. On peut aussi interpréter cette surface comme la surface d'un prisme triangulaire de hauteur infiniment petite. [Schwarz 1890 80][9]

On retrouve le jeu de la libre mobilité des figures géométriques – donc la superposition sans fusion –, la capacité à faire fusionner par la pensée, l'interprétation enfin de cette situation de recouvrement sans fusion – de présence en un même emplacement de deux figures *a priori* indépendantes, de recouvrement multiple d'une figure de base – en terme d'écart infiniment petit. La situation était regardée d'un point de vue différent dans la démonstration du procédé alternant, on s'en souvient.

> Supposons qu'il est possible d'intégrer l'équation différentielle partielle $\Delta u = 0$ avec des conditions aux bords quelconques, aussi bien pour le domaine T_1 que pour le domaine T_2 ; il s'agit de montrer que c'est aussi possible pour le domaine $T_1+T_2-T^* = T$, qui comprend les domaines T_1 et T_2 comme parties [*Theile*] mais dans lequel le domaine T^* commun à T_1 et T_2 ne doit être compté qu'une fois. [Schwarz 1890 137][10]

---

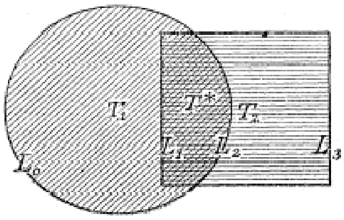
und B in eine einzige *Fläche verwandeln. Diese letzere Fläche mag die aus A und B* combinirte *Fläche genannt, und mit (A,B) bezeichnet werden. Ich werde nun im Folgenden zeigen, dass in vielen (noch näher anzugebenden) Fällen die Fundamentalaufgabe (20.) pg.396 für die* combinirte *Fläche (AnB) stets lösbar ist, falls man nur in Besitz irgend welcher Methode ist zur Lösung derselbe für die* einzelnen *Flächen A und B.* »

[8] [Schwarz 1890 65-84].

[9] « *Bringt man nun die beiden Dreiecke in eine solche Lage, dass ihre entsprechenden Ecken zusammenfallen, und denkt man sich, dass ihre in der Vorstellung von einander verschiedenen und getrennten Flächen die Punkte der Begrenzungslinie gemeinsam haben und längs derselben eine Falte bildend zusammnhängen, so erhält man eine geschlossene einfach zusammenhängende, eine Dreick* (…) *überall doppelt bedeckende Fläche U. Längs die Begrenzung dieses Dreicks besitzt die Fläche U eine Falte, längs welcher die beiden Blätter mit einander stetig zusammenhängen. Diese Fläche kann auch aufgefasst werden als Oberfläche eines dreiseitigen Prisma mit unendlich kleiner Höhe.* »

[10] « *Es wird vorausgesetzt, es sei sowohl für den Bereich T_1, als auch für den Bereich T_2 möglich, die partielle differentialgleichung $\Delta u = 0$ beliebigen Grenzbedingungen gemäss zu integrieren; es handelt sich darum zu*

Fig. 10.



Le modèle implicite n'est plus ici celui de la figure indépendante de son emplacement ni celui de l'espace décrit/engendré par un point variable, c'est un modèle additif issu de l'intégration : le T = T_1+T_2-T* suppose que dans T_1+T_2 l'intersection T* est comptée deux fois, ce qui est bien le cas si on additionne les aires ou, plus généralement, si on intègre une même fonction sur ces différents sous-domaines. On pourrait, en un sens, opposer ces modèles : dans la fusion *à la* Neumann les deux parties à fusionner sont *a priori* sans contact dans la zone où nous voyons l'intersection, alors que dans l'addition *à la* Schwarz la zone d'intersection est *a priori* là, tellement là qu'elle est comptée deux fois ! On sent toutefois que cette opposition n'est qu'apparente : une même notion de multiplicité est simplement saisie différemment selon que le contexte de justification, ou simplement de désignation (choix du symbole d'addition), est plutôt géométrique au sens des figures ou géométrique au sens des aires. Ces variantes peuvent se trouver mêlées dans le même texte, par exemple lorsque Schwarz présente son principe de symétrie :

> Dans le plan (*u*), dont les points représentent géométriquement les valeurs d'une grandeur complexe *u*, délimitons un domaine simplement connexe *U*' dont la frontière contient une partie [*Stück*] finie *l* de l'axe des réel dans le plan (*u*).
>
> Soit une fonction analytique *t* de l'argument complexe *u*, *t* = *f*(*u*), définie en chaque valeur de *u* appartenant à l'intérieur de *U'* de manière univoque et présentant le caractère d'une fonction entière [11] ; (…) Nous supposerons que lorsque *u* se rapproche de la courbe frontière la valeur de *t* demeure toujours finie et, pour tous les points de la ligne *l*, est réelle ; (…)
>
> Au domaine *U'* correspond un domaine *U''*, dont les points sont placés symétriquement à ceux de *U'* par symétrie par rapport à l'axe des réels.
>
> On définit une fonction analytique de *t* en tout point du domaine *U''* en associant à deux valeurs conjuguées de *u* dans les domaines *U'* et *U''* des valeurs conjuguées de

---

zeigen, dass dies auch für en Bereich $T_1+T_2-T^* = T$ möglich ist, welcher die Bereiche T_1 und T_2 als Theile enhält, bei welchem aber das den Gebieten T_1 und T_2 gemeinsame Gebiet T nur einfach zu zählen ist.* »

[11] Schwarz explicite qu'il entend par là la possibilité de développement en série de puissances positives de l'argument. Le terme de fonction analytique recouvre ici le cas plus général où, dans les termes de Schwarz, la

t. Imaginons les deux domaines *U'* et *U''* reliés [*verbunden*] le long du segment *l*, on forme ainsi un domaine simplement connexe *U'+U''*. [Schwarz 1890 66][12]

Il s'agit de démontrer que la fonction analytique ainsi définie à l'intérieur de *U*'' est le prolongement analytique de celle définie sur *U'*. Avant de se lancer dans la démonstration, Schwarz précise :

> On peut mener comme suit la démonstration de la validité de cette affirmation si, comme on pourra le supposer, le domaine *U'+U''* ne recouvre partout que simplement [*einfach*] le plan (*u*). [Schwarz 1890 67][13]

Ce passage appelle au moins deux remarques. Si l'on considère de manière ensembliste la réunion de *U'* et de son symétrique par rapport à l'axe réel, la simple connexité de *U'* ne permet pas de conclure à la simple connexité de $U' \cup U''$, par exemple si *U'* empiète sur les deux demi-plans limités par l'axe réel. Mais la fin du passage éclaire la confiance de Schwarz en la simple connexité du nouveau domaine : *U'+U''* est simplement connexe en tant que domaine au-dessus du plan, lorsqu'on ne fusionne pas d'éventuelles parties amenées l'une au-dessus de l'autre par la symétrie. Dans toute cette série d'articles de 1869 et 1870 sur la représentation conforme, Schwarz reprend le traitement riemannien des domaines dont le substrat des emplacements est un plan. On le voit ici dans la non-fusion *a priori* des parties amenées en superposition ; on le voit en de nombreux endroits où, comme ici, un résultat est d'abord établi pour une partie simple du plan, puis étendu à une partie recouvrant multiplement le plan ou présentant des points de ramification. Une deuxième remarque porte sur la prégnance, non ensembliste, des considérations dimensionnelles. Schwarz désigne la partie obtenue après recollement le long de *l* par *U'+U''* et non par *U'+U''-l* ; il ne semble pas que la présence dans *U'+U''* de *l* compté deux fois importe le moins du monde. C'est cohérent dans un contexte de calcul d'aire ou d'intégration. Les considérations dimensionnelles sont aussi constamment rappelées dans le vocabulaire : on aurait ainsi tort de

fonction présente le caractère d'une fonction rationnelle, i.e. peut être développée au voisinage de chaque point en une série de puissance de la variable pouvant comporter un nombre fini de termes d'exposant négatif.

[12] « *In der Ebene (u), deren Punkte die Werthe einer complexen Grösse u geometrisch darstellen, sei ein einfachzusammenhängender Bereich U' abgegrenzt, dessen Begrenzungslinie ein endliches Stück l der Axe des Reellen in der Ebene (u) enthält. Eine analytische Function t des complexen Argumentes u, t = f(u), sei eindeutig definirt mit dem Charakter einer ganzen Function für alle dem Innern von U' angehörenden Werthe von u;* (…) *Es werde vorausgesetzt, dass bei der Annäherung von u an der Begrenzungslinie der Werth von t stets endlich bleibe und für alle Punkte der Linie l reel sei;* (…) *Dem Gebiete U' entspricht ein Gebiet U'', dessen Punkte zu den Punkten von U' in Bezug auf die Axe des Reellen symmetrisch liegen. Für alle Punkte des Bereiche U'' werde eine analytische Function t dadurch erklärt, dass in den Bereichen U' und U'' conjugirten Werthen der Grösse u conjugirte Werthe der Grösse t zugeordnet werden. Denkt man sich die beiden Gebiete U' und U'' längs der Strecke mit einander verbunden, so entsteht ein einfach zusammenhängender Bereich U'+U''.* »

[13] « *Der Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung kann folgendermassen geführt werden, wenn, wie vorausgesetzt werden möge, der Bereich U'+U'' die Ebene (u) überall nur einfach bedekt.* »

voir dans le terme *Teil* une notion ensembliste de partie ; *Teil* renvoie toujours à une partie de même dimension que le substrat – en l'occurrence une partie bidimensionnelle –, qu'on pourrait aussi dire d'intérieur non vide, ou de mesure non nulle. Le morceau de ligne, négligeable devant les domaines bidimensionnels, est ici désigné par *Stück*. Plus généralement, dans tous les textes que nous commentions dans la première partie, les recollement le long de bords eux-mêmes créés par coupure sont courants et n'appellent pas d'explicitation particulière ; les fusions entre domaines de même dimension sont au contraire inhabituelles, demandent explicitation et parfois justification. Parallèlement, la description d'une situation au moyen d'un recouvrement ouvert – si centrale au 20^{e} siècle dans la formulation des problèmes de passage du local au global ou la caractérisation d'objets du type « variété » – est très rare alors que le découpage ou le pavage, plus ou moins régulier, sont usuels.

On voit sur ce petit exemple du traitement du recouvrement total ou partiel, de l'intersection et de la réunion, que nos auteurs savent parfaitement exprimer le domaine qu'ils souhaitent considérer, et cela ne surprend pas dans le contexte du problème de Dirichlet traité par Neumann et Schwarz. Ils doivent cependant *dans chaque cas* préciser comment les choses doivent être regardées, dans un monde de points de vue massivement structuré par des notions de *multiplicité* et de *dimension*, dont l'évidence première s'appuie sur la géométrie usuelle ou l'intégration. On peut, par exemple, retrouver chez Poincaré toute la palette des possibilités offerte par cette transition entre le monde de la grandeur variable et le monde ensembliste, transition dans laquelle les grandeurs géométriques peuvent *ou non* être considérées indépendantes de leur position (pour reprendre les termes de Riemann). On voyait ainsi Poincaré utiliser des recouvrements ouverts et user du point de vue ensembliste sur les intersections et les réunions dans la démonstration du théorème de représentation des fonctions méromorphes de deux variables complexes, ou dans la méthode de balayage en théorie du potentiel. Sa description des revêtements, en 1907 par exemple, reposait par contre sur le droit de supposer qu'en un même disque du plan complexe, considéré comme emplacement, on pouvait librement voir autant de disques superposés indépendants les uns des autres qu'on le souhaitait, disques pour lesquels on pouvait ensuite stipuler des conventions de recollement. Si l'on élargit un peu le champ en abandonnant le jeu des parties de dimension maximale dans une variété, on trouve aussi que l'écriture non ensembliste fournit des ressources pour saisir la notion d'homologie dans l'article *Analysis situs* de 1895 :

> Considérons une variété V à p dimensions ; soit maintenant W une variété à q dimensions ($q \leq p$) faisant partie de V. Supposons que la frontière complète de W se compose de λ variétés continues à q-1 dimensions $\nu_1,\ldots,\nu_\lambda$. Nous exprimerons ce fait par la notation
>
> $$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\lambda \sim 0.$$
>
> Plus généralement, la notation
>
> $$k_1\nu_1 + k_2\nu_2 \sim k_3\nu_3 + k_4\nu_4$$
>
> où les k sont des entiers et les ν des variétés à q-1 dimensions, signifiera qu'il existe une variété W à q dimensions faisant partie de W et dont la frontière complète se compose de k_1 variétés peu différentes de ν_1, compose de k_2 variétés peu différentes de ν_2, compose de k_3 variétés peu différentes de la variété opposée à ν_3 et de k_4 variétés peu différentes de la variété opposée à ν_4. [Poincaré 1895 206]

On est bien sûr dans un cadre ensembliste au sens où les sous-variétés sont considérées comme des parties d'une variété V (elle même sous-variété d'un espace numérique $\mathbf{R}^n$) qu'on ne souhaite pas considérer, *Analysis situs* oblige, comme indépendantes de leur position. Pour considérer « ensemble » une famille de sous-variétés de même dimension ν_i c'est toutefois un symbole additif que choisit Poincaré, choix de notation qui conduit naturellement à considérer des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs. Si le signe (positif ou négatif) a un sens bien défini – la notion de variété opposée à une variété donnée ayant été définie au paragraphe précédent – la considération de $k\nu$ lorsque k n'est ni 1 ni –1 laisse un peu perplexe dans un cadre ensembliste, et un lecteur soucieux de rester dans ce cadre se satisfait difficilement de l'explication (ce mot même est un peu fort !) en termes de variétés « peu différentes » d'une variété donnée. Plutôt que de rompre avec la géométrie en considérant des combinaisons linéaires formelles, Poincaré conserve au moins verbalement un lien avec une géométrie non ensembliste dans laquelle la notion de multiplicité est familière. Il n'est pas besoin de savoir à quelles parties de V ces combinaisons linéaires peuvent renvoyer, leur rôle dans la théorie est d'engendrer des relations numériques dans lesquelles les combinaisons linéaires ne posent aucun problème d'interprétation. Les sous-variétés servent avant tout de domaines d'intégration, les homologies servant à définir les notions de dépendance et d'indépendance entre variétés nécessaires à l'explicitation du lien entre topologie d'un domaine et périodes des différentielles vérifiant la condition usuelle d'intégrabilité. Au paragraphe 9, les combinaisons linéaires de sous-variétés servent à engendrer un nouveau type de relations numériques, en considérant cette fois non plus l'intégrale d'une forme différentielle mais le nombre d'intersection avec une sous-variété fixée. On peut bien penser toute réunion comme une sorte d'addition lorsque ces réunions ne sont que des moules sur lesquels former des relations numériques ; en termes modernes, des moules sont des combinaisons linéaires formelles de sous-variétés sur lesquelles on considère soit des formes linéaires (intégration d'une forme différentielle sur les sous-variétés de la même dimension) soit des formes bilinéaires (intersection dans une variété orientable de sous-variétés de dimensions complémentaires).

2. Domaine, image.

Nous lisions plus haut comment Cantor reformulait le théorème du maximum de Weierstrass, non pour illustrer le rôle des domaines fermés et bornés par rapport aux non fermés ou non bornés, mais pour illustrer la conjonction dans un énoncé d'Analyse entre un moment purement topologico-ensembliste (une partie bornée de **R** admet un borne supérieure) et un moment d'articulation de l'ensembliste et du fonctionnel (notion de domaine image), la fonction étant ici déjà conçue comme une application. Le point central autour duquel s'articulaient les plans était la notion de d'ensemble des valeurs (*Wertmenge*). Cette digression de Cantor semblerait presque pédante dans un contexte si élémentaire – fonction réelle univoque définie sur un intervalle – à qui ne verrait pas les difficultés de saisie de ces mêmes parties – domaine, image – associées à une fonction dans une Analyse en transition entre le langage de la grandeur et le langage ensembliste ; dans une Analyse, aussi, aux prises avec les problèmes de multivocité. Illustrons la complexité de la situation en présentant deux cas dans lesquels les auteurs explicitent la variété des points de vue possibles et discutent la question non ensembliste de la multiplicité. Nous observons ainsi la saisie non ensembliste un peu en creux, au moment où des auteurs souhaitent soit la dépasser soit préciser une question.

On aurait tort de croire que le travail de Weierstrass sur les fondements de l'Analyse fait passer irrévocablement, dès les années 1870, du monde de la grandeur au monde ensembliste. Dans le cours de l'été 1886 on observe encore le travail actif de reprise et de reformulation. Entre la partie suivant la définition des notions élémentaires de topologie ensembliste et celle consacrée aux problèmes de multivocité des prolongements analytiques, Weierstrass cherche à caractériser la notion de configuration m fois étendue dans l'espace à n dimensions (en termes réels et avec $m \leq n$). Il avance prudemment, soucieux de faire sentir non seulement la nécessité d'atteindre une définition purement analytique – c'est la notion de paramétrage (local) qui lui semblera le fondement sûr – mais aussi combien cette notion de paramétrage recèle de subtilités et de pièges. La discussion s'ouvre sur le cas simple d'une multiplicité double – c'est-à-dire bidimensionnelle – dans un plan :

> Soient deux paires de grandeurs x_1, x_2 et u_1, u_2, liées par les équations $x_1 = f_1(u_1,u_2)$, $x_2 = f_2(u_1,u_2)$. Prenons u_1, u_2 dans une multiplicité continue double [*in einer kontinuirlichen zweifachen Mannigfaltigkeit*] et f_1, f_2 univoques et continues, à chaque point (u_1, u_2) est alors associé un point (x_1, x_2). La totalité de ces points appartient encore à une multiplicité double, c'est pourquoi on peut la désigner comme une figure [*Gebilde*] doublement étendue dans le domaine de la multiplicité double. [Weierstrass 1886 84] [14]

On s'attendrait à ce que Weierstrass mette immédiatement en garde contre un erreur dans cette présentation, montrant par un exemple que l'image peut ne pas être bidimensionnelle puis introduisant la notion de déterminant jacobien ; c'est bien ce qu'il fait quelques lignes plus loin, après toutefois un premier exemple plus surprenant :

> La totalité des points point (x_1, x_2) n'est toutefois pas nécessairement ce que nous appelions plus haut un *continuum*, par exemple lorsque nous posons
>
> $$x_1 = sin\ u_1\ ,\ x_2 = sin\ u_2,$$
>
> où x_1 et x_2 ne prennent que des valeurs entre –1 et +1, et où une infinité de valeurs de u_1 et u_2 correspond au même point (x_1,x_2). [Weierstrass 1886 84] [15]

Un *continuum* avait tout d'abord été défini comme un ouvert connexe (par bande), l'exemple ne respecte pas l'ouverture, mais nous pensons que ce n'est pas cela que Weierstrass souhaite commenter. Rappelons que la définition initiale de *continuum* avait été modifiée après quelques pages : *continuum* désigne dans la suite du cours soit un ouvert connexe (il est alors qualifié de *unabgeschlossen*) soit un ouvert connexe auquel sa frontière a été adjointe (il est alors *geschlossen*). Ce qui est fondamental dans le *continuum*, outre la connexité, ce n'est pas l'ouverture, c'est la dimensionalité que le passage par l'ouverture permet de garantir : un *continuum* d'une multiplicité *n*-uple est un véritable *morceau* (*Teil*), par oppositions aux parties fermées qui ne sont pas des *continuums* fermées et qui ne présentent aucune caractéristique dimensionnelle assignable. Si l'on considère la totalité des (x_1,x_2) comme un

---

[14] « *Es seien zwei Grössenpaare x_1,x_2 und u_1,u_2 durch die Gleichungen $x_1=f_1(u_1,u_2)$, $x_2=f_2(u_1,u_2)$. Nehmen wir u_1,u_2 in einer kontinuirlichen zweifachen Mannigfaltigkeit an, und f_1 und f_2 eindeutige und stetige Funktionen, so wird jedem Punkt (u_1,u_2) ein Punkt (x_1,x_2) zugeordnet. Die Gesamtheit dieser Punkte gehört also wieder einer zweifachen Mannigfaltigkeit an, weshalb man sie als eine zweifach ausgedehntes Gebilde im Gebiete einer zweifachen Mannigfaltigkeit bezeichnen kann.* »

simple ensemble de points d'un plan représentant $\mathbf{R}^2$, on a bien affaire à un continuum (fermé). Ce que Weierstrass commente ici, c'est que le domaine de variabilité de (x_1,x_2) peut-être regardé à la fois en lui-même, comme ensemble de points susceptible d'un étude en termes de topologie ensembliste, *et* en tant qu'il est lié au domaine des (u_1,u_2). Selon ce deuxième point de vue, il est un domaine infiniment multiple car parcouru une infinité de fois par le point variable (x_1,x_2). Weierstrass ne fait ici que signaler cette dualité de points de vue sans se prononcer sur le caractère plus fondamental du point de vue ensembliste, du *Wertmenge* considéré seul par Cantor. Notre interprétation de ce passage s'appuie sur la reprise de cette question presque quatre-vingts pages plus loin, dans la partie consacrée au fondement de la théorie des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes au moyen de la notion de configuration analytique. Le contexte immédiat est le suivant : une configuration *m* dimensionnelle (cette fois en termes complexes) dans l'espace *n* dimensionnel des variables (complexes) $x_1,\dots,x_n$ est décrite au moyen d'éléments de fonctions analytiques se prolongeant analytiquement les uns les autres ; chaque élément peut être décrit de deux manières, soit en représentant les x_i par des séries en *m* variables auxiliaires $t_1,\dots,t_m$, soit, et un théorème garantit cette possibilité, en représentant *n-m* des x_i au moyen de séries en les *m* autres, par exemple $x_1,\dots,x_m$.

> Les $x_1,\dots,x_m$ forment alors un *continuum*, mais pas un *continuum* tel que nous l'avons expliqué plus haut, comme celui que forment, par exemple, $t_1,\dots,t_m$. Ces derniers étaient considérés comme appartenant à un *continuum* non fermé dans le domaine de *m* grandeurs complexes, un *continuum* qui était caractérisé par le fait que chaque point [*Stelle*] n'y était compté qu'une fois [*nur einmal gezählt wurde*] et que tous les points se trouvant au voisinage d'un point du *continuum* lui appartiennent encore. [Weierstrass 1886 164][16]

Weierstrass entreprend d'expliquer cette dissymétrie des rôles des $x_1,\dots,x_m$ et des $t_1,\dots,t_m$ comme paramètres (locaux) de la configuration en se ramenant à $m = 1$ et $n = 2$ dans l'exemple $x_1 = t^2$, $x_2 = \phi(t)$ où ϕ est rationnelle.

> (…) la même valeur de x_1 est obtenue pour t et $-t$ alors qu'en général des valeurs différentes de x_2 lui correspondent ; c'est pourquoi dans ce cas tout point x_1 est à

[15] « *Die Gesamtheit der Punkte (x_1,x_2) braucht aber nicht das zu sein, was wir früher als ein Kontinuum bezeichnet haben, z.B. wenn wir setzen x_1=sin u_1, x_2 = sin u_2, wo x_1 und x_2 nur Werte annehmen, die zwischen –1 und +1 liegen und wo unendlich vielen Werten von u_1 und u_2 derselbe Punkt (x_1,x_2) entspricht.* »

[16] « *Dann bilden die $x_1,\dots,x_m$ ein Kontinuum, aber nicht ein solches, wie wir früher erklärt haben, wie es z.B. $t_1,\dots,t_m$ bilden. Diese haben wir uns gedacht als in dem Gebiete von m komplexen Größen einem unabgeschlossenen Kontinuum angehörig, ein Kontinuum, das dadurch charakterisiert war, daß jede Stelle nur*

prendre en double, à l'exception du point $x_1 = 0$ correspondant à $t = 0$. On obtient donc pour la totalité des x_1 correspondant à la configuration une surface recouvrant doublement le plan x_1. En soi et pour soi, la considération de telles surfaces a peu de sens ; elle présente toutefois un certain avantage en ceci qu'on peut alors considérer x_2 comme fonction univoque du point de ce plan double, du fait que chaque point de la surface x_1 compte double dans la mesure où il correspond aux valeurs t et $-t$. (…) C'est là une manière de voir [*Anschauungsweise*] qui est très utile dans de nombreux cas, mais nullement nécessaire aux fondements [*Begründungen*] de la théorie des fonctions. [Weierstrass 1886 164][17]

Le plan des x_1 est donc à la fois image double dans la mesure où l'on considère x_1 en fonction de t et domaine double lorsqu'on considère x_2 comme fonction univoque de x_1. On notera que l'exemple, dans son souci de simplicité, passe par l'introduction d'une uniformisante globale : c'est la possibilité, grâce à une variable auxiliaire, de développer la théorie sans avoir recours à la notion d'espace compté avec multiplicité qui est mise en avant et non la tension entre le caractère local du paramétrage par une uniformisante et la description initiale globale mais multiple au dessus du plan des x_1. L'objectif n'est pas ici d'attirer l'attention sur ce qui sépare le local du global, mais, sans toutefois bannir la multiplicité et la grandeur, d'affirmer la priorité du point de vue ensembliste dans une démarche de fondement de la théorie.

Un autre exemple nous permettra d'illustrer plusieurs aspects de cette évolution des modes de saisie d'objets pour nous si élémentaires que le domaine d'étude d'une fonction et l'ensemble image associé. On le trouve dans la correspondance que le jeune Poincaré engage avec Lazarus Fuchs au printemps 1880 [Poincaré 1921][18], dans laquelle il relève dans un article de Fuchs certaines ambiguïtés de formulation qui lui semblent sources d'erreurs possibles. On sait que Poincaré mènera dans les années suivantes un travail de correction et de généralisation des travaux de Fuchs débouchant sur sa théorie des fonctions « fuchsiennes »,

---

einmal gezählt wurde und alle Stellen, die in der Umgebung einer Stelle des Kontinuum liegen, ebenfalls diesem angehören. »

[17] « (…) *so wird dieselbe Wert von x_1 durch t und –t hervorgebracht während verschiedene Werte von x_2 im allgemein zu ihm gehören werden; daher ist in diesem Falle jeder Punkt x_1 mit Ausnahme des zu t=0 gehörigen Punktes x_1=0 doppelt zu nehmen.So erhält man also als die Gesamtheit der dem Gebilde angehörigen Punkte x_1 eine die x_1-Ebene doppelt bedeckende Fläche. An und für sich hätte nun die Betrachtung solcher Flächen geringe Bedeutung ; einen gewissen Vorteil gewährt sie insofern, als man alsdann x_2 als eindeutige Funktion der Punkte dieser Doppelebene betrachten kann, indem man jeden Punkt der x_1-Fläche doppelt zählt, insofern er zu den Werten t und –t gehört ;* (…) *Es ist dies eine Anschauungsweise, die in vielen Fällen sehr brauchbar ist, aber keineswegs zur Begründungen der Funktionentheorie notwendig.* »

[18] Rappelons que nous utilisons la pagination de [Poincaré 1951].

mais seuls quelques éléments de cette correspondance initiale nous intéressent ici[19]. Dans la lignée de l'article de Riemann de 1857 sur la *Théorie des fonctions représentables par la série de Gauss* $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, Fuchs étudie dans le domaine complexe des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients rationnels (équation (A) chez Fuchs)[20]. Si $f(z)$ et $\varphi(z)$ désignent deux solutions indépendantes – c'est-à-dire les fonctions prolongeant deux éléments de solutions linéairement indépendants en un point non singulier ou encore un système fondamental de solutions [Fuchs 1880b 151] –, Fuchs étudie les propriétés de la nouvelle fonction $\zeta(z) = \dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ (équation (H)), ou plutôt de la fonction inverse $z = z(\zeta)$. Il n'est bien sûr pas question ici de démonstration d'existence, comme nous le notions plus haut : on est libre de lire de manière fonctionnelle, donc dissymétrique, la relation de dépendance entre z et ζ ; il s'agit ici d'établir les propriétés de la fonction inverse, en particulier une propriété d'univocité que Fuchs pense obtenir sous certaines hypothèses, univocité hautement remarquable dans cet univers de fonctions multivoques, f, φ aussi bien que ζ . La lecture de Poincaré fait émerger comme pertinents des éléments qui ne sont pas hérités du traitement Riemannien de 1857. Il commence par demander à Fuchs un premier « éclaircissement » :

> Vous démontrez, page 159, que la fonction z est une fonction méromorphe de ζ toutes les fois que ζ prend une valeur correspondant à une valeur donnée de z : que cette valeur soit un point ordinaire ou un point singulier, qu'elle soit finie ou infinie. Vous montrez ensuite, page 160 que cela est encore vrai pour $\zeta = \infty$ et comme conclusion vous dites :
>
> « … so ist die durch die Gleichung (H) definirte Function z von ζ für alle Werthe von ζ meromorph. »
>
> Il s'agit ici de toutes les valeurs de ζ, finies et infinies ; cet énoncé ferait donc entendre que z est fonction méromorphe *dans toute l'étendue de la sphère* et par conséquent fonction rationnelle de ζ ; on en conclurait que l'équation (A) est toujours intégrable algébriquement ce qui n'est pas exact comme vous le faites voir un peu plus loin page 168. [Poincaré 1921 13]

La rationalité de $z(\zeta)$ découlerait de la conjonction de trois propriétés de la fonction $z = z(\zeta)$: elle est univoque, elle n'a que des pôles pour singularités, son domaine de méromorphie est toute la sphère complexe. C'est pour l'instant sur ce troisième point que Poincaré fait porter la

[19] Voir [Gray 1986].
[20] L'article commenté par Poincaré est [Fuchs 1880b].

critique, sur la nature du domaine de la fonction $z(\zeta)$ ou, ce qui est équivalent, de l'image de $\zeta(z)$:

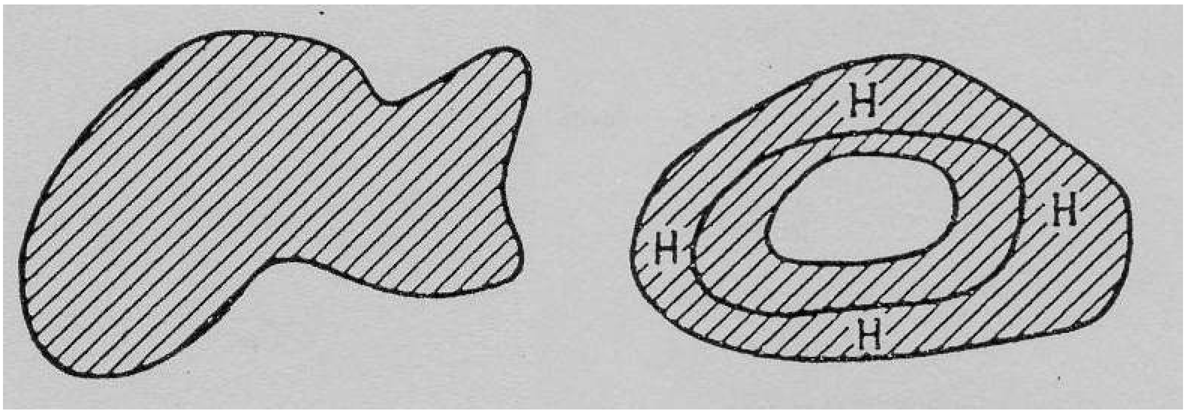
> A quoi tient cette contradiction ? C'est à ce que les valeurs de ζ sont de trois sortes :
>
> 1° Celles qu'on peut faire atteindre à la fonction $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ en faisant décrire à la variable z sur la sphère un certain contour *fini* un nombre *fini* de fois.
>
> 2° Celles qu'on peut faire atteindre à cette fonction en faisant décrire à z un contour infini ou bien un contour *fini* un nombre *infini* de fois.
>
> 3° Celles qu'on ne peut *jamais* faire atteindre à la fonction $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ *quel que soit* le contour décrit par z sur la sphère.
>
> Rien ne prouve en effet *a priori* qu'il n'y ait pas des valeurs de ces trois sortes (…). [Poincaré 1921 14]

La saisie de cette fonction multivoque ne peut se faire qu'en termes narratifs : si l'on choisit en un point non singulier deux solutions locales indépendantes pour former la fonction ζ, on obtient une fonction non monodrome : elle ne revient pas à sa valeur initiale après prolongement le long d'un chemin entourant au moins l'un des points singuliers de l'équation. Pour pouvoir parler de *toute* la fonction il ne suffit pas de considérer toutes les valeurs (finies ou infinies de z), il faut parcourir indéfiniment la sphère des z : le « domaine » n'est pas, pour cette « fonction » (les termes ensemblistes de domaine et de fonction-application sont ici inappropriés), quelque chose qu'on peut se donner ; il est quelque chose qu'on *épuise* par un parcours indéfini, un horizon dont la saisie complète passe par une *exhaustion*, au sens premier du terme. Du côté de la variable dépendante ζ, on voit Poincaré caractériser en quelques mots ce que nous serions tentés d'appeler l'ensemble image. La description proposée par Poincaré est en un sens proche de la description ensembliste en ceci qu'elle met de côté les questions de multiplicité, elle n'est toutefois pas structurée de manière double en l'image et son complémentaire. La structuration est triple, la sphère des valeurs de ζ se décomposant en ce que nous nommerions l'image au sens strict (1°), sa frontière dans la sphère (2°) et son extérieur (3°), la frontière étant saisie non comme limite de la variable ζ seule mais comme limite de ζ considérée dans sa dépendance avec z, d'où l'intervention des chemins parcourus une infinité de fois sur la sphère des z. Ces considérations permettent à Poincaré de montrer la pertinence de la topologie de l'image, ce qu'il fait en ébauchant une discussion de cas. Citons-en deux amenés à jouer un rôle dans la suite :

4° on peut encore imaginer que l'on ait des valeurs des trois sortes ; que les valeurs de la première sorte remplissent la région du plan que je couvre de hachures sur la figure, que le périmètre de cette région soit formé de valeurs de la deuxième sorte ; enfin que les parties extérieures à ce périmètre corresponde à des valeurs de la troisième sorte. Alors la fonction *z n'existe plus* quand ζ sort de ce périmètre, et ne peut prendre qu'une seule valeur quand ζ reste dans ce périmètre. Alors z n'est pas, à proprement parler fonction *analytique* de ζ ; mais elle est *eindeutig* en ζ, ce qui vous suffit pour les conséquences que vous en tirez ;

5° on peut imaginer que l'on ait des valeurs des trois sortes, disposées comme dans la figure ci-dessous, où la région occupée par des valeurs de la première sorte est couverte de hachures. Alors z pourrait ne pas revenir à la même valeur quand ζ décrirait un contour tel HHHH.

Enfin on pourrait encore faire mille autres hypothèses. [Poincaré 1921 14]



Il semble inutile de préciser qu'on ne trouve aucune discussion de cette nature dans l'article de Fuchs, le point soulevé par Poincaré est comme étranger à l'univers des aspects considérés par Fuchs. Les outils de ce dernier sont principalement ceux mis en place par Riemann en 1857 et complétés depuis, par Fuchs entre autres : la discussion porte chez Fuchs sur les racines des équations déterminantes – nous dirions : les valeurs propres de l'automorphisme linéaire de l'espace des germes de solutions analytiques en un point ordinaire de l'équation, application linéaire induite par un contour simple d'un point singulier ; l'outil essentiel est chez Fuchs le lien entre ces valeurs propres et la représentation analytique des solutions aux points singuliers. L'univocité de z comme fonction de ζ est déduite par Fuchs de sa monodromie, elle-même établie cherchant les conditions pour que, lorsqu'on se donne un quelconque couple de valeurs (z_0,ζ_0) se correspondant, $z-z_0$ se laisse développer en série convergente de puissances entières (presque toutes positives) de ζ-ζ_0. On trouve dans ce raisonnement trois des traits classiques isolés plus haut : premièrement, l'étude passe par le travail en chaque point sur les écritures locales (point de vue universellement local). Deuxièmement, la question de l'ensemble des valeurs prises par ζ – question qui semble fondamentale à Poincaré – ne se pose pas du fait qu'on part toujours d'un couple (z_0,ζ_0) ; c'est le sens pour Fuchs du « *alle* » dans le « *alle Werthe von* ζ » qui semblait ambiguë à Poincaré. Enfin la discussion s'articule entièrement dans un espace de configuration structuré ici par la notion fondamentale de point singulier : à chaque étape sont discutés les paramètres permettant d'éviter les différents types d'accidents que sont le passage par la valeur 0, par l'infini (ici de manière polaire), la ramification ou la présence d'un logarithme dans l'intégrale. C'est Poincaré qui autonomise ce que Cantor nommait le *Wertmenge*, le domaine de la variable ζ en tant qu'elle est associée à z (sans quoi on ne considère que la sphère des ζ) mais saisi comme simple *tas* de valeurs au sein de la sphère des ζ et non plus distributivement et par les couples (z_0,ζ_0) : on voit que la considération de ce *Wertmenge*, cet ensemble image, repose sur un équilibre subtil entre points de vue sur ζ, une grandeur ζ qui n'est ni absolument grandeur variable libre ni tout à fait saisie classiquement dans sa dépendance à z. Une fois cet aspect mis au jour, Poincaré peut considérer la forme de cet ensemble image et en faire un élément pertinent dans l'étude de la monodromie de $z = z(\zeta)$. Dans le cas 5°, la régularité du comportement de z en chaque point ζ_0 ne permet pas de conclure à la monodromie de z comme fonction de ζ. Cet aspect échappe à Fuchs dans un travail où non seulement la question de l'image ne se présente pas, mais où la discussion porte entièrement sur la question de la singularité localisable en un point. La non monodromie due à la non simple connexité, telle que Poincaré l'envisage dans son exemple 5, c'est la non monodromie dont la cause n'est localisable en aucun point singulier : Poincaré a pris soin de dessiner un vrai trou au centre de l'anneau, formé de points du type 3°, pas uniquement un disque privé de son centre auquel cas le problème serait localisable en un point qui, d'ailleurs, serait du type 2° (frontière de l'ensemble image). On voit ici l'intérêt de la classification tripartite de Poincaré.

Fuchs répond quelques jours plus tard, en commençant par accorder que la totalité des valeurs de ζ qui correspondent à un certain z ne peut en effet couvrir simplement le plan des ζ ; il ne peut certes pas ne pas voir la contradiction soulignée par Poincaré avec la non intégrabilité algébrique de l'équation. Puisque la nature de l'ensemble image doit être prise en considération, Fuchs décrit ce qu'il pense en être :

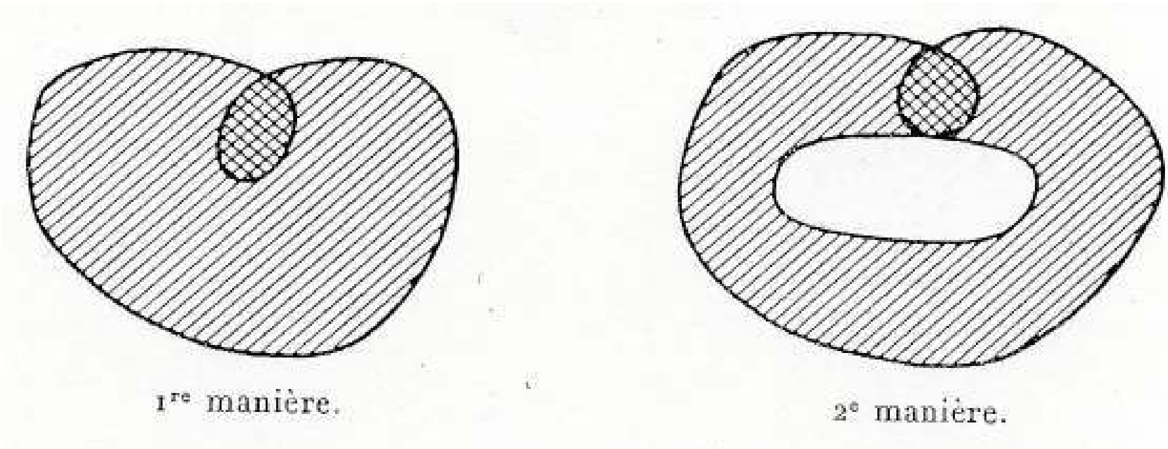
Les valeurs de ζ pour lesquelles *f*(*z*) et φ(*z*) ne deviennent pas tous les deux infinis remplissent [*erfüllen*] dans le plan des ζ une surface simplement connexe que je noterai S. Cette surface ne recouvre le plan que *simplement* et à sa frontière se trouvent les valeurs de ζ pour lesquelles *f*(*z*) et φ(*z*) deviennent *tous deux* infinis. *A l'intérieur* [*innerhalb*] *de la surface S, z est une fonction partout méromorphe de* ζ. [Poincaré 1921 16] [21]

Fuchs répond donc sur le terrain inédit sur lequel Poincaré l'a amené, en désignant comme sien le cas 4° de Poincaré ; non sans préciser que la surface S était *simple*, précision nécessaire à cette époque, on l'a vu, pour lever toute ambiguïté dans la désignation du lieu. Poincaré trouve la réponse de Fuchs certes non ambiguë, mais pas convaincante pour autant ; il entreprend de soumettre ses doutes à Fuchs en choisissant un mode de description différent de celui de sa première lettre :

Je suppose que sur le plan des *z*, je joigne tous les points singuliers au point ∞ par des coupures, puis que je fasse mouvoir *z* dans son plan de telle sorte qu'il ne franchisse aucune des coupures. ζ va alors *erfüllen* dans son plan une certaine surface F_0 qui sera évidemment *zusammenhängend*. Faisons maintenant mouvoir *z* dans son plan de telle sorte qu'il ne puisse franchir les coupures plus de *m* fois ; ζ va rester compris dans une nouvelle surface F_m qui sera toujours *zusammenhängend*. Quand *m* augmentera, la région F_m va s'étendre de plus en plus et la surface que vous appelez F n'est autre chose que la limite F_m pour $m = \infty$. Dire que la surface F ne recouvre le plan que *einfach*, c'est dire que, quelque grand que soit *m*, F_m ne recouvrira le plan que *einfach*.
Or cela est-il une conséquence nécessaire de votre démonstration ? Il me semble qu'il faudrait pour le faire voir ajouter quelques explications. En effet, comment, lorsque *m* grandit, la région F_m peut-elle arriver à se recouvrir elle-même ? Elle peut y arriver de deux manières, ainsi que l'indique la figure suivante où le trait plein représente le contour de la région F_m et où cette région est recouverte d'une couche de hachures pendant que les parties du plan *où* F_m *se recouvre elle-même* sont couvertes d'une double couche de hachures.

[21] « *Die Werthe von ζ für welche nicht f(z) und φ(z) identisch unendlich werden, erfüllen in der ζ-Ebene eine einfach zusammenhängende Fläche, welche ich mit S bezeichnen will. Diese Fläche bedeckt die ζ-Ebene nur* einfach *und an ihre Begrenzung liegen diejenigen Werteh von ζ für welche f(z) und φ(z) identisch unendlich werden.* Innerhalb der Fläche S ist *z* überall eine meromorphe Function von ζ. »

Votre démonstration, Monsieur, me paraît faire voir de la façon la plus claire, que la région F_m ne peut se recouvrir elle-même *de la première manière* ; mais non pas qu'elle ne peut se recouvrir elle-même *de la deuxième manière*. [Poincaré 1921 17]



Dans sa première lettre Poincaré utilisait une description narrative pour l'épuisement du domaine des *z*, mais il décrivait de manière purement statique et ensembliste la partie du plan des ζ formée des valeurs associées. Ici le mode de description change et Poincaré retrouve une méthode utilisée par Riemann dans son travail de 1857 sur les fonctions abéliennes pour laquelle nous proposions de parler de la « surface dépliée » : on n'étudie tout d'abord qu'une seule branche de ζ en interdisant à *z* de franchir un système de coupures, puis on observe la manière dont, à mesure que *z* épuise son domaine par un parcours indéfini, le domaine correspondant *pousse* dans le plan des ζ. Si ce nouveau mode de description permet de préciser le point faible du raisonnement de Fuchs, la façon dont Poincaré présente les choses est toutefois un peu obscure. On doit comprendre que les arguments de Fuchs excluent les recouvrements selon la « 1ère manière » : Poincaré préfère faire une figure plutôt que de l'exprimer de manière fonctionnelle en disant que Fuchs a bien établi l'inversibilité locale de la fonction ζ(*z*) ou, pour rester plus proche du mode d'expression de nos auteurs dans un univers de fonctions multivoques, a bien établi l'univocité locale de *z* en ζ pour tout (z_0, ζ_0). La figure correspondant à la « 2ème manière » permet de montrer en quoi l'univocité de l'inverse local en chaque point ne garantit en rien l'univocité globale de l'inverse. Si Poincaré saisit ici un problème qui apparemment échappait à Fuchs, il ne le formule pas en opposant inversion locale et inversion globale ; cela tient en partie au fait qu'il reprend de Fuchs la saisie de l'univocité globale de l'inverse en termes de monodromie. Bien que cela apparaisse clairement dans cette correspondance, Poincaré n'explicite pas l'idée que la *nature globale* du problème de l'univocité de l'inverse interdit qu'une réponse satisfaisante y soit apportée par le jeu d'un réglage fin de paramètres permettant d'éliminer les points singuliers : l'espace de configuration dans lequel se déploie le raisonnement fuchsien est *a priori* inadéquat. Le passage de l'univoque inversibilité locale à l'univoque inversibilité globale nécessite l'étude de la nature (topologique) du domaine des ζ correspondant à l'épuisement du plan des z, domaine lui-même conçu comme partie du plan et non comme surface possiblement multiple étendue au dessus du plan des ζ ; si, en effet, on optait pour le point de vue proposé par Riemann dans le §15 de sa *Théorie des fonctions d'une grandeur variable complexe*, le domaine correspondant à la « 2ème manière » de pousser n'empièterait pas réellement sur lui-même (il serait multiple au dessus du plan des ζ) et serait d'ailleurs, dans le cas de la figure, simplement connexe ! On sait la réponse que Poincaré apportera à la question qu'il adressait à Fuchs : le résultat de non recouvrement de F par elle-même sera obtenu en décrivant précisément sa manière de pousser dans le plan des ζ comme un pavage d'un plan hyperbolique. Chez Poincaré, les paramètres issus de l'équation originale ne déterminent plus seulement la présence ou l'absence de points singuliers – aspects locaux – mais aussi la nature d'un groupe discret de transformations du plan hyperbolique ; on retrouve un dépassement du local, mais un dépassement par le groupe bien caractéristique de Poincaré et ne contribuant pas directement à l'émergence explicite d'une couple local / global. On verra par contre dans la partie III l'importance que la question de l'inversibilité globale jouera dans l'explicitation du couple local/global chez Osgood et Hadamard.

Chapitre 6. Le local.

I. L'« invention » du voisinage.

On voyait Cauchy, déjà en 1821, définir et utiliser l'expression « fonction continue au voisinage d'un point » dans un sens qui est toujours le nôtre – bien que s'insérant dans un réseau conceptuel différent du nôtre, ne comprenant pas en particulier de notion de continuité en un point. De fait, les termes de « voisinage », ou en allemand « *Umgebung* », « *Nachbarschaft* », « *Nähe* » sont couramment utilisés dans les textes que nous lisions, aussi bien dans le corpus de recherche en théorie des fonctions que dans celui des traités d'Analyse. Nous voudrions montrer comment la transition que nous décrivions plus haut modifie le sens de l'emploi de ces termes et permet, en particulier, la différentiation des aspects locaux et infinitésimaux. Plus précisément, nous suivrons la différenciation de trois aspects : l'un infinitésimal, celui de l'*infiniment petit* ; les deux autres locaux mais exprimant deux aspects différents du local : le *suffisamment petit* (associé aux énoncés existentiels du type « il existe un voisinage tel que … ») et l'*arbitrairement petit* (associé aux énoncés universels du type « sur tout voisinage … »), dont on verra qu'ils ne posent pas les mêmes problèmes à nos auteurs pré- ou para-weierstrassiens [1].

1. « au voisinage » ou « sur un voisinage » : la question de l'indétermination.

i. Une solution intermédiaire : « le voisinage ».

Comme pour *Punkt / Stelle / Lage*, on peut partir du réel travail d'explicitation et de précision conceptuel mené par Neumann. On se souvient par exemple d'une innovation terminologique dans le cours sur la théorie riemannienne des fonctions abéliennes : dans le chapitre II (de la seconde édition), consacré aux développements en séries de puissances entières (positives ou négatives) des « fonctions de z », le paragraphe 5 s'intitulait « Représentation d'une fonction $f(z)$ dans le domaine [*im Bereich*], c'est-à-dire au voisinage [*in der Umgebung*] d'un point particulier » [Neumann 1884 36] [2]. La notion de domaine d'un point était définie :

[1] On devine que notre perspective n'est ici nullement de retracer le rôle de la notion de voisinage dans les origines de la notion abstraite d'espace topologique. On pourra sur cet aspect consulter l'article collectif [Epple *et alii* 2002]. Un point de contact entre notre étude et celle de cet article se trouve pages 713 et suiv.

[2] « *Darstellung einer Function f(z) im Bereich, d.i. in der Umgebung eines einzelnen Punktes* »

> Soit dans l'espace une surface quelconque, peu importe qu'elle soit plane ou courbe ; sur cette surface un point quelconque *c*. Imaginons un petit morceau de surface délimité sur cette surface autour de *c* ; on peut, en un certain sens, regarder *c* comme le *centre* de ce morceau de surface ; et par conséquent considérer les lignes les plus courtes de *c* vers le bord du morceau de surface comme des *rayons vecteurs*.
>
> Définition : à l'avenir, un tel morceau de surface délimité autour du point donné c, lorsque ses rayons vecteurs sont suffisamment petits mais tous non nuls, sera désigné d'un terme particulier, celui de domaine [*Bereich*] du point *c*. Ce qu'il faut entendre par suffisamment petit, dépendra des circonstances de chaque cas particulier. [Neumann 1884 37] [3]

Le texte est clair et fournit un cadre non ambigu de formulation et d'étude des propriétés locales des fonctions méromorphes ; le mode d'écriture n'est toutefois pas le nôtre et un petit arrêt sur les pratiques actuelles permettra de mieux saisir ce qui les distingue de ce que propose Neumann. Premièrement, nous utilisons aujourd'hui le même terme de « voisinage » à deux niveaux différents, d'une part au niveau *méta*, d'autre part pour désigner certaines parties d'un ensemble – qu'on se place dans $\mathbf{R}^n$ avec des définitions telles que celles données par Weierstrass ou dans un espace topologique abstrait. Nous qualifierons d'*embedded* cet emploi de « voisinage » pour désigner une partie, distinguant usage *méta* et usage *embedded* du même mot. C'est la grammaire qui guide la lecture puisque le sens *méta* s'exprime par « au voisinage » alors que le sens *embedded* utilise l'article indéfini « un voisinage » ; « dans le voisinage » est susceptible des deux lectures, du moins lorsque « un voisinage » particulier est désigné par le contexte. Au sens *embedded*, « sur tout voisinage » équivaut à « sur chaque voisinage ». Au niveau *méta*, « étude au voisinage » et « étude locale » sont synonymes. L'organisation est différente chez Neumann où « *Umgebung* » n'a que le sens *méta* : l'étude ou la représentation au voisinage d'un point est un type d'étude. Les parties distinguées dans ce type d'étude sont baptisées par Neumann « domaines de points ». Une deuxième différence réside, dans l'acception *embedded*, dans la désignation du domaine : là où nous parlons d' « *un* voisinage » Neumann choisit l'article défini, « *le* domaine ». Nous pensons lire dans ce choix de Neumann, dont on verra qu'il n'est pas isolé, une manière de concilier deux

---

[3] « *Gegeben sei im Raume irgend welche Fläche, gleichgültig, ob* eben *oder* krumm *; und auf dieser Fläche irgend ein Punkt* c. *Um* c *herum denke man sich auf jener Fläche ein kleines Flächenstück abgegrenzt ;* c *selber mag gewissermassen als der* Mittelpunk *dieses Flächenstücks angesehen werden ; und demgemäss mögen die von* c *nach dem Rande des Flächenstücks hinlaufenden kürzesten Linien als die* Radii vectores *des Flächenstücks betrachtet werden.*
Definition : Ein solches um den gegebenen Punkt c *herum abgegrenztes Flächenstück soll in Zukunft für den Fall, das seine Radii vectores hinreichend klein, dabei aber sämmtlich von Null verschieden, mit einem besonderen Namen bezeichnet, nämlich das Bereich des Punkts* c *gennant werden.*

aspects apparemment contradictoires. D’un côté la notion de voisinage d’un point contient par nature une série d’éléments d’indétermination : il existe une infinité de tels domaines ; lorsqu’une étude locale nécessite qu’on travaille sur un voisinage « suffisamment petit », cette notion de « suffisamment petit » dépend, comme le dit très bien Neumann, des « circonstances de chaque cas particulier » ; lorsque, enfin, dans une circonstance particulière, un voisinage adapté a été choisi, tout voisinage contenu dans ce premier est aussi un voisinage adapté à la circonstance particulière. On voit comment les deux aspects d’infinité des parties du type voisinage et de dépendance au contexte de la notion de voisinage adapté – ou « suffisamment petit » – se font écho pour faire du voisinage un type de partie insaisissable de manière définie. D’un autre côté, dans chaque circonstance particulière on doit pouvoir exhiber un nombre – un nombre strictement positif, pas infiniment petit – représentant le « suffisamment petit » et une partie – un vrai « morceau » (*Teil*), pas un morceau infiniment petit – représentant l’idée de voisinage. Dans un monde de la grandeur variable dans lequel le local et l’infinitésimal – le suffisamment petit et l’infiniment petit – ne sont pas toujours clairement distingués, le choix de Neumann de l’article défini dans « *le* voisinage » prévient le risque de glissement subreptice vers l’infiniment petit.

De nombreux exemples montrent que « voisinage » n’a, avant Weierstrass, que le sens *méta* et pas de sens *embedded*. Ainsi sous la plume de Riemann trouve-t-on régulière les constructions du type « la fonction est [*propriété*] dans le voisinage » (par exemple en [Riemann 1898 90]) ou « la fonction se comporte de telle et telle manière dans le voisinage » [Riemann 1898 93], ou encore « la surface peut être regardée dans le voisinage d’un point comme … » [Riemann 1898 92]. Le « *in der Umgebung* » du texte allemand peut être rendu en français aussi bien par « dans le voisinage » que par « au voisinage », quoique Laugel ait choisi le premier. Lorsqu’il s’agit par contre d’évoquer une partie spécifique ce n’est pas le terme voisinage qui est utilisé ; Riemann parle de « partie [*Stück*] de ladite surface » [Riemann 1898 30, 1892 25] ou encore :

> Pour fixer les idées, concevons qu’autour du point O’ comme centre, sur le plan A, on décrive un cercle de rayon R et que l’on mène un diamètre parallèle à l’axe des *x*. Le morceau [*Stück*] détaché de T par ce cercle et contenant le point de ramification se décompose alors sur les deux bords du diamètre, lorsque R est pris suffisamment petit,

---

Was abei in jedem einzelnen Fall unter hinreichend klein zu verstehen ist, wird abhängen von jedesmaligen näheren Umständen. »

> en n portions de surfaces ayant leurs cours séparés de chaque côté du diamètre et ayant la forme de demi-cercles. [Riemann 1898 31, 1892 26]

Nous faisions un constat semblable dans la première section du chapitre III, à propos du dépassement du local chez Poincaré. Si les études de comportement ou de représentation d'une fonction étaient menées « dans les environs » [Poincaré 1879 XXXVII] ou « dans le voisinage » [Poincaré 1883b 147] d'un point donné, la recherche d'un domaine adapté aux circonstances particulières conduit à une « région de convergence » [Poincaré 1879 XLIII] ou à partir d'un « domaine limité » [Poincaré 1901 119].

On fait le même constat en étudiant le vocabulaire dans l'article de Jules Tannery de 1875 sur les *Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables* [Tannery 1875]. On peut toutefois s'intéresser à cet article pour d'autres raisons que cette simple confirmation. Ainsi dès le début de l'article il est intéressant de voir Tannery introduire des éléments de vocabulaire proches de ceux de Neumann :

> Je me suis permis d'introduire l'expression de *domaine d'un point* qui répond à l'allemand *Umgebung* : j'entends par là les environs d'un point, et plus précisément la portion du plan où certains développements en série de la fonction que l'on étudie sont convergents. S'il s'agit, par exemple, d'un point a et d'un développement en série suivant les puissances entières et positives de x-a, le domaine du point a sera le cercle de convergence de cette série. [Tannery 1875 115]

Plutôt qu'à « *Umgebung* », « le domaine d'un point » rappelle le « *Bereich* » de Neumann, cet objet non infinitésimal, dont l'extension non nulle dépend des circonstances particulières – par exemple la validité d'un développement en série – et qui peut indifféremment être remplacé par un domaine plus petit du même type. Dans tout l'article on observe un usage *méta* indifférent du « dans le voisinage du point a » et « dans le domaine du point a » ; le référent *embedded* associé est toutefois toujours « le domaine » et jamais on ne trouve au sens *embedded* la reprise du terme voisinage ou l'article indéfini typique du « sur un voisinage » weierstrassien. Le contexte théorique de cette petite innovation de vocabulaire est, dans cet article, l'introduction en France de la théorie des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe développée par Riemann puis Fuchs, Schwarz, Thomae. Tannery y présente longuement l'association entre prolongement le long d'une boucle autour d'un point singulier et transformation linéaire d'un système fondamental de solutions, le rôle des valeurs propres (les « racines des équations fondamentales déterminantes ») dans la recherche du développement des solutions aux points singuliers etc. On peut se demander si, dans sa présentation synthétique et pédagogique d'une théorie inédite en France, Tannery distingue entre les aspects locaux et les aspects globaux et sait mettre en avant, par exemple, le caractère global des résultats obtenus par Riemann en 1857. Le seul passage faisant allusion à une nature non locale de certaines questions se trouve au début du §5, après les paragraphes consacrés à l'étude dans le domaine d'un point singulier :

> Ces principes étant posés, nous allons en faire quelques applications. Nous donnerons d'abord certaines conditions nécessaires pour que toutes les intégrales d'une équation linéaire soient algébriques.
>
> (…) On devra étudier chacun de leurs points singuliers a_1, $a_2,\dots,a_\rho$, auquel on adjoindra le point ∞ de la sphère ; les racines des équations fondamentales déterminantes relatives à ces différents points devront toutes être rationnelles et distinctes ; de plus, pour chacun des points singuliers a_1, $a_2,\dots,a_\rho,\dots,\infty$ les conditions du §33, nécessaires et suffisantes pour que les éléments du système fondamental ne contiennent point de logarithmes, devront être satisfaites.
>
> Si toutes ces conditions sont remplies, les diverses intégrales de l'équation proposée n'auront qu'un nombre fini de points singuliers, présentant tous le caractère de points critiques algébriques ; mais ce ne seront pas nécessairement des fonctions algébriques, car elles restent évidemment susceptibles de prendre une infinité de valeurs en un même point ; la distinction des cas où ce nombre de valeurs est fini semble d'une difficulté d'une nature tout autre : cette difficulté se lie à la question du passage d'un système fondamental relatif à un point singulier au système fondamental relatif à un autre point singulier. [Tannery 1875 171]

Il n'y a pas de terme en 1875 pour désigner cette « nature tout autre » et la description retombe tout de suite au niveau technique de traitement de la question *à la* Riemann. Si la différence entre aspects locaux et globaux est bien saisie, elle est décrite rapidement et ne joue guère de rôle dans cet article de Tannery, dont on pourrait dire qu'il est consacré à la théorie locale des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

ii. L'apport de Weierstrass.

On a pour l'instant vu, selon les auteurs, deux types de pratiques légèrement différents. Chez Riemann ou Poincaré aucun terme spécifique ne vient désigner la partie déterminée selon les circonstances du problème et servant à mener le type d'étude qualifié au niveau *méta* d'étude « au voisinage d'un point » ou « dans le voisinage d'un point ». Avec Neumann et Tannery, des auteurs conscients de proposer une innovation terminologique fixent un terme – d'ailleurs différent du « voisinage » apparaissant dans le syntagme *méta* – pour qualifier cette partie. Pour des raisons parfaitement compréhensibles ils optent pour une désignation par l'article défini en forgeant « *das Bereich des Punkts c* » ou « le domaine d'un point *a* » et expliquent d'emblée que ce domaine dépend du contexte, qu'il est définissable au cas par cas en tenant compte des circonstances prochaines. On peut donc se demander ce que la définition weierstrassienne du voisinage d'un point comme partie de $\mathbf{R}^n$ a de spécifique, sinon qu'elle distingue peut être moins clairement les niveaux *méta* et *embedded* en choisissant le même mot dans les deux cas. L'innovation de Weierstrass réside dans le choix de l'article indéfini : lorsqu'on définit ce qu'est « un voisinage » – et cette définition ne dépend pas, elle, du contexte particulier – on peut forger « pour tout voisinage » ou « sur chaque voisinage ». Neumann et Tannery ne s'offraient pas cette possibilité en partant « *du* domaine d'un point », il n'en avaient d'ailleurs pas l'usage : ils se posaient des problèmes locaux – représentation locale d'une fonction, recherche d'une uniformisante locale de la surface de Riemann d'une fonction algébrique – ne nécessitant pas le travail sur plus d'un voisinage ; il ne leur coûtait donc rien de ne pas pouvoir désigner le filtre des voisinages (« tout voisinage ») ou le lien entre deux voisinages particuliers distincts. Avec son « un voisinage », Weierstrass peut définir sans ambiguïté – on l'a vu plus haut – la notion de point d'accumulation d'une partie de $\mathbf{R}^n$ en disant que *chaque* voisinage du point contient une infinité de points de cette partie ; ou la notion de point frontière d'un *continuum* en disant que *chaque* voisinage contient des points appartenant au *continuum* et des points ne lui appartenant pas. On peut voir l'ambiguïté des formulations n'ayant pas recours au voisinage weierstrassien par exemple chez Picard, en 1879, lorsqu'il rappelle le résultat de Weierstrass sur le comportement d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point singulier essentiel isolé :

> On sait que M. Weierstrass, dans son célèbre Mémoire sur les fonctions analytiques uniformes (Mémoires de l'Académie de Berlin, 1876), partage en deux classes les points singuliers d'une fonction uniforme : ce sont les pôles et les points singuliers essentiels. L'illustre géomètre (…) montre que, dans le voisinage d'un point singulier essentiel A, la fonction s'approche autant que l'on veut de toute valeur donnée, c'est-à-dire que, étant donnés deux nombres ρ et ε aussi petits que l'on voudra, on peut trouver, à l'intérieur du cercle ayant A pour centre et ρ pour rayon, un point pour lequel le module de $f(x) - a$ soit moindre que ε, a étant une constante quelconque. Je me propose de compléter ce dernier théorème en montrant qu'il y a toujours dans le

> voisinage de A un nombre infini de points pour lesquels $f(x)$ devient rigoureusement égal à a, une exception pouvant se produire seulement pour deux valeurs particulières de a. [Picard 1879c 756]

L'énoncé du résultat de Weierstrass est parfaitement non ambigu car il fait suivre une description de haut niveau utilisant « le voisinage » au sens *méta* d'une explicitation parfaitement rigoureuse construite sur le modèle de la définition weierstrassienne de la continuité d'une fonction en un point. Pour ce qui est de la présentation de l'idée générale du théorème que Picard va démontrer, on louvoie : faute de pouvoir parler de *chaque* voisinage (épointé) du point singulier essentiel – d'une infinité de voisinages différents donc – Picard évoque « un nombre infini de points » dans « le voisinage de A ». Cet énoncé de haut niveau est imprécis, l'énoncé précis passe, là encore, par l'introduction de variables quantifiées. Si l'on compare avec ce qu'écrit Weierstrass dans l'article original de 1876 on voit que ce dernier peut, lui, s'exprimer sans aucune ambiguïté sans devoir passer dans un langage plus formel. Avant même l'énoncé du théorème rappelé par Picard, on trouve par exemple une discussion du lien entre zéros et points singuliers essentiels se terminant sur :

> Finalement, dans le cas où $f(x)$ a une infinité de zéros, il existe au moins un des points singuliers essentiels – on peut le désigner par c_1 – ainsi placé que dans chacun de ses voisinages [*in jeder Umgebung derselben*] se trouvent une infinité de zéros de $f(x)$. [Weierstrass 1894-1927 II 116][4]

On doit compléter en soulignant deux points importants chez Weierstrass : premièrement, il n'utilise pas *toutes* les possibilités qui nous semblent offertes par la définition de « un voisinage » comme partie de $\mathbf{R}^n$; deuxièmement, il ne rompt pas entièrement avec des modes d'expression plus classiques, qu'on n'ose qualifier ici de pré-weierstrassiens ! Sur le premier point, Weierstrass n'utilise les possibilités de désignation de « un voisinage » et de « chaque voisinage » que dans le cas où un seul point est concerné. Dans le cas où une fonction met en relation les voisinages de deux points, par exemple dans la définition de la continuité en un point, ou du comportement d'une fonction (par ailleurs holomorphe) en une singularité essentielle, on pourrait imaginer des énoncés du type : une fonction f définie au voisinage de x_0 y est continue si tout voisinage de $f(x_0)$ contient l'image d'un voisinage de x_0 ; si f est une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de x_0 et présente en x_0 une singularité essentielle alors l'image par f de chaque voisinage (épointé) de x_0 est dense dans la sphère

[4] « *In dem Falle endlich, wo f(x) unendlich viele Null-Stellen hat, giebt es unter den wesentlichen singulären Stellen mindestens eine – sie möge mit c_1 bezeichnet werden – die so liegt, dass in jeder Umgebung derselben unendlich viele Null-Stellen von f(x) vorhanden sind.* »

complexe. On a vu que la notion purement ensembliste d'image d'une partie pose encore problème à l'époque ; on comprend que Weierstrass ne souhaite pas ajouter une difficulté supplémentaire dans l'énoncé de propriétés déjà subtiles. Sur le second point, citons un exemple tiré du même article de 1876, où l'entrelacement des styles est frappant. On voit la question formulée de manière classique – d'ailleurs toujours en usage de nos jours – en utilisant « *in der Umgebung* » au sens *méta* :

> Il nous reste à étudier comment une telle fonction se comporte dans le voisinage [*in der Umgebung*] d'un de ses points singuliers essentiels. [Weierstrass 1894-1927 II 122][5]

Quelques lignes plus loin, pour dire qu'une fonction tend vers l'infini lorsque sa variable tend vers une certaine valeur x_0 il écrit :

> (…) dans un voisinage infiniment petit [*in einer unendlich kleiner Umgebung*] d'une telle valeur, la valeur de $f(x)$ est infiniment grande. [Weierstrass 1894-1927 II 123][6]

Deux pages plus loin, l'énoncé du théorème principal est :

> Ainsi les variations de la fonction $f(x)$ dans un voisinage infiniment petit du point c présentent un type de discontinuité tel qu'elle peut s'approcher arbitrairement de chaque valeur librement fixée ; elle ne possède donc pas pour $x = c$ une valeur bien déterminée. [Weierstrass 1894-1927 II 124] [7]

Cette impossibilité du prolongement par continuité en un point singulier essentiel est présentée de manière assez narrative et Weierstrass préfère parler d'un voisinage infiniment petit plutôt que de proposer un énoncé – certes un peu plus complexe – utilisant sa notion de voisinage-partie. L'« infiniment petit » désigne ici non pas l'infinitésimal mais l'arbitrairement petit. On voit que si l' « invention » du « *un* voisinage » ouvre à Weierstrass la *possibilité* d'énoncer de manière non ambiguë une vaste gamme de propriétés et de définitions qui ne pouvaient jusqu'alors être énoncées sans ambiguïté qu'en passant à des énoncés formels portant sur des variables quantifiées, cette possibilité n'est en rien une obligation. La superposition des styles et le jeu sur toute la gamme des sens de « voisinage » demeurent la règle chez Weierstrass et ses successeurs (par exemple [Hölder 1882]) ; cette persistance s'explique en partie par un souci de brièveté mais aussi par l'absence d'une notion transparente de partie image.

---

[5] « *Es bleibt noch übrig zu ermitteln, wie eine solche Function sich in der Umgebung einer ihrer wesentlichen singulären Stellen verhält.* »

[6] « (…) *in einer unendlich kleinen Umgebung eines solchen Werthes ist der Werth von f(x) unendlich gross.* »

2. le local et l'infinitésimal.

Ce terme de « voisinage infiniment petit » qu'on lisait dans ces dernières citations de Weierstrass, on l'avait rencontré à maintes reprises dans le corpus des textes de recherche en théorie des fonctions. Plus généralement, on avait souvent noté une certaine perméabilité entre des niveaux locaux et infinitésimaux que nous distinguons. De nombreux éléments nous les font distinguer : nous distinguons les fonctions dérivables des simples fonctions continues ; nous distinguons les variétés topologiques des variétés différentielles, dans lesquelles nous distinguons le travail dans la variété et le travail dans les fibrés tensoriels associés au fibré tangent ; nous savons qu'il n'est pas si aisé de démontrer le théorème que nous appelons d'inversion locale, qui garantit qu'on peut, sous certaines hypothèses, passer de l'invertibilité infinitésimale en un point – c'est-à-dire de l'invertibilité de l'application linéaire tangente – à l'invertibilité locale au voisinage de ce point ; la géométrie algébrique, enfin, nous montre comment adopter un point de vue infinitésimal sur des anneaux locaux dans des contextes apparemment exotiques – en des points singuliers ou sur d'autres anneaux de bases que **R** ou **C**. De même que pour le couple local/global, un couple infinitésimal/local émerge et se différencie progressivement au 19e siècle et dans les premières années du 20e siècle ; il est significatif – on le verra en détail dans le chapitre 8 – qu'un auteur comme Hadamard distingue d'emblée les trois niveaux – infinitésimal, local, général – en s'appuyant sur l'exemple de l'inversion. Un aspect différencie toutefois fondamentalement les couples local/global et local/infinitésimal : même quand il est difficile à saisir ou entrevu à moitié seulement, le pôle « global » est toujours dans un rapport d'opposition au pôle « local » ; même si en creusant on se rend compte de la superficialité de cette description, on est tenté de dire en première approximation que le global c'est le contraire du local. Le local et l'infinitésimal sont en revanche cousins, c'est contre leur *proximité* trompeuse qu'on éduque le regard par des exemples ou des formulations bien choisis. Le travail sur l'émergence du couple local/global doit rencontrer la question de l'émergence du couple local/infinitésimal non seulement parce qu'il importe de préciser la nature du pôle « local » dans le premier couple, mais aussi parce qu'en tant que couple, local/global est en *concurrence* avec infinitésimal/global. Encore le terme « global » est-il mal choisi dans ce deuxième couple et l'on dirait plus justement que le dépassement du local est en concurrence avec le dépassement

[7] « *Hiernach ändert sich die Function f(x) in einer unendlich kleinen Umgebung der Stelle c in der Art discontinuirlich, dass sie jedem wilkürlich angenommenen Werthe beliebig nahe kommen kann, für x = c also einen bestimmten Werth nicht besitzt.* »

de l'infinitésimal ; dans une concurrence qui se joue à la fois en mathématiques et en physique ; dans une concurrence dont nous trouverons en mathématiques les échos jusque dans les années 1920, dans les travaux d'Elie Cartan par exemple.

i. Le continu saisi par l'infinitésimal.

Si l'on repart de l'échantillon de textes, on peut ouvrir la série des exemples par deux cas dans lesquels les auteurs ont recours, du moins si l'on se fie au vocabulaire, à des formulations infinitésimales là où elles ne nous semblent pas s'imposer. A quelques années d'écart, Möbius et Jordan abordent un type inédit de classification des surfaces, une classification que nous dirions globale et topologique, une classification à homéomorphisme près. A aucun moment les textes n'offrent de caractérisation de ce qu'ils nomment surface – sinon, on s'en souvient, pour signaler qu'on ne doit pas « voir » les intersections entre nappes. Ils essayent par contre de définir la notion d'équivalence entre surfaces qui jouera le rôle déterminant dans leur classification. Möbius introduit à ce propos, en 1863, la notion de corrélation élémentaire :

> On dira que deux figures géométriques sont corrélées l'une à l'autre de manière élémentaire [*elementar verwandt*] lorsqu'à chaque élément de la première figure, infiniment petit en toutes dimensions, correspond un élément similaire dans l'autre figure, de telle manière que pour deux éléments frontaliers [*an einander grenzenden*] de l'une, les éléments correspondants de l'autre s'ajointent [*zusammenstossen*] également ; ou, pour dire la même chose autrement : lorsqu'à chaque point de l'une des figures en correspond un de l'autre de telle sorte que pour deux points infiniment proches [*zwei einander unendlich nahen Puncten*] de l'un, les points correspondants de l'autre sont infiniment proches l'un de l'autre. [Möbius 1863] [8]

La formulation n'est guère différente chez Jordan en 1866 dans son article *Sur la déformation des surfaces*. Il précise sa question en plusieurs étapes :

> Un des problèmes les plus connus de la Géométrie, est le suivant :
>
> *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et inextensibles puissent être appliquées l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature.*

[8] Pagination des *Œuvres*. « *Zwei geometrische Figuren sollen einander elementar verwandt heissen, wenn jedem nach allen Dimensionen unendlich kleinen Elemente der einen Figur ein dergleichen Element in der anderen dergestalt entspricht, dass von je zwei an einander grenzenden Elementen der einen Figur die zwei ihnen entsprechenden Elemente der anderen ebenfalls zusammenstossen; oder, was dasselbe ausdrückt : wenn je*

On peut se proposer un problème analogue, en supposant au contraire que les surfaces considérées soient extensibles à volonté. La question ainsi simplifiée rentre dans la géométrie de situation (…). [Jordan 1866b 85]

Puis :

Nous nous appuierons (…) sur le principe suivant qu'on peut regarder comme évident, et prendre au besoin comme définition :

Deux surfaces S,S' sont applicables l'une sur l'autre si l'on peut les décomposer en éléments infiniment petits, de telle sorte qu'à des éléments quelconques contigus de S correspondent de éléments contigus de S'. [Jordan 1866b 86]

On peut s'arrêter un instant sur les stratégies de formulations d'un problème original dans les années 1860 par son caractère purement topologique. Premièrement, au niveau purement ensembliste, la condition de bijectivité est exprimée plus ou moins indirectement : la condition d'application « sans duplicature » y renvoie chez Jordan. Chez Möbius, ce travail tardif reprend les termes d'une classification des transformations (alors projectives) proposée dans son *Calcul Barycentrique* en 1827, la bijectivité étant elle-même implicite dans ce contexte de géométrie élémentaire. Deuxièmement, le caractère purement topologique est approché différemment par les deux auteurs : Jordan commence par rappeler un problème usuel depuis Gauss, celui de l'isométrie – intrinsèque – des surfaces, puis il introduit un problème « analogue » en levant l'une des conditions sur l'application ; on pourrait dire qu'il accède à la topologie en oubliant la métrique, partageant en ceci la démarche d'un Riemann qui, en 1854, introduisait l'*Analysis situs* comme ce qui reste dans l'étude des multiplicités continues lorsqu'on ne considère plus les figures comme indépendantes de leur emplacement. Cette stratégie d'oubli de Jordan et Riemann n'est pas celle choisie par Möbius ; elle n'est d'ailleurs qu'une première étape chez Jordan, qui trouve dans un second temps quasiment les mêmes termes que Möbius pour caractériser son problème intrinsèquement plutôt que par ce qui le différencie d'un autre plus usuel. On peut ajouter à cette série la description de ce dans quoi nous serions tentés de voir l'homéomorphisme dans le traité de Neumann ; rappelons-la :

Pour déformer continûment deux surfaces quelconques l'une en l'autre, il suffit (lorsqu'une telle transformation est tout simplement possible) de trouver une loi par laquelle chaque point de l'une des surfaces correspond à un point déterminé de l'autre,

---

einem Punct der einen Figur ein Punct der anderen also entspricht, dass von je zwei unendlich nahen Puncten der einen auch die ihnen entsprechenden der anderen einander unendlich nahe sind. »

> une loi telle que deux points voisins [*benachbarte Punkte*] de l'une soit toujours en correspondance avec des points voisins de l'autre. [Neumann 1884 97] [9]

On observe donc deux formulations de la condition de continuité, l'une faisant référence à la contiguïté d'*élément*s de surface, l'autre à la notion de *points* (infiniment) voisins. L'exemple de Möbius tendant à montrer que les deux formulations – éléments contigus ou points voisins – sont regardées comme équivalentes.

Considérons tout d'abord la formulation par les points. On notera que selon les auteurs, « voisins » et « infiniment voisins » semblent utilisés indifféremment, on le voit plus précisément chez Neumann dans le premier chapitre de l'édition de 1884, dans un contexte différent de celui de la recherche d'une caractérisation purement topologique de l'équivalence entre surfaces. Le contexte est ici la caractérisation des fonctions holomorphes par les équations de Cauchy-Riemann et leur interprétation géométrique :

> Pour entrer plus avant dans ces considérations de Cauchy, marquons dans le plan horizontal un point *z* et un quelconque point voisin [*Nachbarpunkt*] *z+dz* (…) [Neumann 1884 14] [10]

Ce qui n'est qu'une formulation un peu plus géométrique de ce qu'on trouve sous la plume de Riemann, par exemple dans l'introduction de la Dissertation inaugurale :

> Soient
>
> $$x + y\,i \quad \text{et} \quad x + y\,i + dx + dy\,i$$
>
> deux valeurs de la grandeur complexe *z* qui diffèrent infiniment peu entre elles (…). [Riemann 1898 2]

Le contexte est ici clairement infinitésimal puisqu'il s'agit de la similitude des triangles infinitésimaux. La situation n'est pas toujours aussi claire : ainsi Möbius parle-t-il de points infiniment proches dans un contexte qui est, en fait, purement topologique ; dans le même contexte, Neumann parle de points proches (mais pas infiniment proches), le même terme servant dans le contexte infinitésimal de la similitude des surfaces dans leurs plus petites parties. Nos auteurs s'avancent dans un espace de configuration théorique qui n'est guère propice à la distinction entre continuité et dérivabilité : lorsque des grandeurs *z* et *u* sont

---

[9] « *Um von zwei beliebig gegebenen Flächen die eine in die andere umzuformen, bedarf es (sobald eine solche Umformung überhaupt möglich ist) nur die Auffindung eines Gesetzes, nach welchem jeder Punkt der einen Fläche mit einem bestimmten Punkt der andern correspondirt, jedoch eines Gesetzes, welches so beschaffen ist, dass demselben zufolge* benachbarte *Punkte der einen Fläche auch immer mit* benachbarten *Punkten der andern in Correspondenz stehen.* »

[10] « *Um auf die betreffenden Cauchy'schen Betrachtungen näher einzugehen, markiren wir auf der Horizontalebene den Punkt z und irgend einene Nachbarpunkt z+dz* (…) »

(continûment) dépendantes l'une de l'autre, il est naturel de comparer les valeurs infiniment proches z et $z+dz$ de la variables aux valeurs associées de la fonction, infiniment proches si la fonction est continue, u et $u+du$; c'est le rapport du/dz, nombre fini et non infiniment petit pour des raisons d'homogénéité, qui permet la comparaison. Lorsque les grandeurs z et u sont de type complexe une subtilité s'introduit à cette étape. La notion de variation d'une grandeur complexe (ou plus généralement d'une grandeur géométrique représentée par un point variable dans une multiplicité continue) est fondamentalement unidimensionnelle, c'est selon une courbe qu'un point varie ; partant, la variation infinitésimale dz est une grandeur géométrique qui n'est pas du type point, elle est une différence entre deux points infiniment proches et possède donc, outre sa norme évanescente et son point d'attache en z, une direction et un sens. On peut donc discuter la dépendance de du/dz en un point envers la direction d'approche, discussion qui, dans le cas complexe, chez Riemann puis Cauchy, conduit à la caractérisation infinitésimale des bonnes fonctions par les équations de Cauchy-Riemann.

On comprend mieux les formulations de la notion d'homéomorphisme en termes de points infiniment voisins : nos auteurs ne font que reprendre les descriptions usuelles en Analyse de la notion de fonction continue d'une variable, descriptions dans lesquelles ne passe *pas* la frontière que nous avons appris à voir entre l'infinitésimal et le local. Les éléments d'un réseau[11] se tiennent les uns les autres : les grandeurs continues sont celles représentées géométriquement par des figures connexes (par arc) ce qui, dans l'habillage analytique, signifie qu'elles peuvent varier de grandeurs plus petites que tout nombre assignable ; la continuité/connexité de la grandeur z s'explicite par l'introduction du dz ; si l'on passe d'une seule grandeur continue à deux grandeurs continues liées, la continuité de l'une *comme fonction* de l'autre n'est autre, géométriquement, que la conservation de la connexité (par arc), analytiquement que l'existence d'un du lié au dz [12]. On voit comment ce réseau exprime les potentialités propres de la conception de la fonction comme point de vue sur une dépendance entre grandeurs typées. Il reste toutefois à comprendre l'autre description de l'homéomorphisme, celle passant non plus par les points (infiniment) voisins mais par les éléments contigus.

[11] On trouve une présentation presque pure de ce que nous regroupons dans un modèle idéal dans le deuxième chapitre de l'édition de 1865 de Neumann.

[12] On comprend l'intérêt d'une proposition de Darboux dans son article de 1875 sur les fonctions discontinues : il montre qu'il existe une fonction non continue qui vérifie pourtant la propriété de valeurs intermédiaires sur tout intervalle, ou, pour faire le lien avec la connexité, qui transforme tout intervalle en intervalle. Cette propriété n'est donc pas *caractéristique* des fonctions continues, du moins pour le sens de « continu » que Darboux importe en France (parallèlement au travail d'Ossian Bonnet). [Darboux 1875]

Pour équivalente qu'elle puisse sembler à nos auteurs, Möbius par exemple, la formulation par les éléments (de surface, de volume etc.) ne nous semble pas s'inscrire tout à fait dans le même réseau que la formulation par les points. On sent toutefois les ressorts de cette équivalence, dont on trouve aussi d'autres traces, chez Neumann par exemple. Ainsi dans le deuxième chapitre de l'édition de 1865, il cherche à expliquer que des fonctions (réelles de variables réelles) peuvent être discontinues sans nécessairement être infinies. Après avoir présenté l'habillage géométrique des fonctions de deux variables réelles – en prenant l'exemple de la fonction $U = 2+x^2+y^2$ – au moyen de surfaces de l'espace étendues au-dessus du plan (xOy) ou d'un disque U de centre O, il propose l'exemple suivant :

> Imaginons de plus une fonction R = R(x,y), identique à U à l'unique exception de la valeur en O, mais prenant en O la valeur 3 et non la valeur 2. Cette fonction devra donc être dite discontinue dans *U*. En effet, la surface qui la représente présente au dessus de O un point isolé ; plus rigoureusement, elle se compose de deux parties différentes séparées par une brèche, à savoir d'un point isolé placé exactement au-dessus de O et d'un morceau de surface recouvrant tous les autres points de *U* et présentant exactement au-dessus de O une ouverture infiniment petite [*eine unendlich kleine Oeffnung*]. [Neumann 1865 47][13]

Enlever à la surface initiale l'un de ses points c'est déjà enlever un peu plus qu'un point, un élément de surface part avec et laisse une ouverture infiniment petite. Cette ouverture est d'ailleurs bordée par une courbe infiniment petite, aspect qu'on retrouve dans l'édition de 1884. On sait que pour étudier la topologie des surfaces Neumann reprend de Riemann l'idée de coupure transverse, de coupure s'appuyant donc sur le bord de la surface. Lorsque la surface F ne présente pas de bord, Neumann comme Riemann commence par lui enlever un point pour former une surface épointée (ou « ponctuée ») $\dot{F}$ présentant un bord :

> Alors que F ne possède *pas* de bord, $\dot{F}$ au contraire possède *une unique* courbe frontière infiniment petite [*eine einzige unendlich kleine Randcurve*] qu'on représente par la courbe entourant l'ouverture infiniment petite produite par l'enlèvement du point.

[13] « *Denken wir ferner eine Function R = R(x,y), welche mit alleiniger Ausnahme des in O vorhandenen Werthes mit der Function U identisch ist, welche aber in O nicht den Werth 2, sondern den Werth 3 besitzt. Diese Function wird dann in* U *unstetig zu nennen sein. Denn die Fläche durch welche sie dargestellt wird, besitzt über O einen vereinzelten Punct; besteht also, strenge genommen, aus zwei durch einen Riss von einander geschiedenen Stücken, nämlich aus einem gerade über O liegenden vereinzelten Punct, und aus einem Flächenstück, welches alle übrigen Puncte von* U *überdeckt, welches also gerade über O eine unendlichkleine Oeffnung besitzt.* »

Remarque.- Si par exemple *F* est la surface d'une *sphère*, alors la surface ponctuée associée $\overset{\bullet}{F}$ est fondamentalement une *calotte sphérique*, elle est donc *simplement connexe*. [Neumann 1884 150][14]

De ces courbes infiniment petites on en trouvait aussi chez Poincaré, par exemple dans le premier Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. On se souvient que Poincaré définissait, relativement à une équation différentielle d'un type assez simple mais non linéaire, l'indice d'un « cycle infiniment petit » autour d'un point singulier. L'exposé mêlait des étapes qui nous semblaient pour la plupart locales (reposant sur un théorème local ramenant le champ de vecteur à un type canonique au voisinage d'un point singulier isolé, utilisant donc des cycles arbitrairement petits mais non infinitésimaux) et, à l'occasion, infinitésimales (reposant directement sur l'approximation linaire au premier ordre et non sur un théorème local permettant d'étaler dans le fini la situation infinitésimale). Poincaré énonçait tout dans le langage des infiniment petits, et pour globaliser il expliquait qu'il suffit de décomposer « le cycle donné en une infinité de cycles infiniment petits » [Poincaré 1881 28]. On voit dans ces exemples que le mode d'écriture de Neumann ou de Poincaré les amène à passer constamment une frontière difficile à franchir pour nous, entre l'infiniment petit et l'arbitrairement petit. Les points d'une surface ne sont pas, chez eux, entourés de voisinages au sens weierstrassien, il existe une entité intermédiaire infinitésimale, l'élément de surface. On retrouve d'ailleurs ces éléments dans le cadre de variations, un cadre unidimensionnel donc. Ainsi Neumann peut-il décrire un point comme la figure d'évanouissement d'une courbe infiniment petite – courbe reliant, on l'imagine, les points z et z+dz . Ainsi Poincaré dans son *Analysis situs* de 1895 décrit-il la boucle fermée obtenue en parcourant un même arc courbe AB de A vers B puis en revenant à A en disant qu'en B la courbe fait une boucle infiniment petite[15] [Poincaré 1895 240]. On est dans ces deux cas à la frontière entre la saisie

---

[14] « *Während also F* gar keinen *Rand hat, wird anderseits* $\overset{\bullet}{F}$ eine einzige *unendlich kleine Randcurve besitzen, welche darhestellt ist durch die Umgrenzungslinie der durch die Herausnahme jenes Punktes hervorgebrachten unendlich kleinen Oeffnung. Bemerkung.- Ist z.B. F eine* Kugelfläche*, so wird die zugehörige punktirte Fläche* $\overset{\bullet}{F}$ *im Wesentlichen eine* Kugelcalotte*, mithin* einfach zusammenhängend *sein.* »

[15] On comprend mieux cette description en la replaçant dans son contexte immédiat : Poincaré décrit d'abord le groupe fondamental, comme dans son article de 1883 sur l'uniformisation des fonctions analytiques, par son effet sur le prolongement de fonctions F_i (il se donne en fait des 1-différentielles dF_i vérifiant les conditions d'intégrabilité). « Si alors le point M décrit sur la variété V un contour infiniment petit, les fonctions F reviendrons à leurs valeurs primitives. Il en sera encore de même si le point M décrit sur la variété un *lacet*, c'est-à-dire s'il va d'abord de M_0 à M_1 par un chemin quelconque M_0BM_1, s'il décrit ensuite un contour infiniment petit et si, enfin, il revient de M_1 à M_0 par le même chemin M_1BM_0. » [Poincaré 1895 240]. Le contour « infiniment petit » est ici un contour suffisamment petit pour être homotopiquement nul, Poincaré utilise la locale trivialité homotopique des variétés. On observe la stabilité des formulations, du début des années 1880 jusqu'en 1895.

par les points et la saisie par les éléments, saisies que nous cherchons ici à distinguer et dépit de l'évidence du passage de l'une à l'autre pour nos auteurs.

ii. Des pratiques en partage : mathématiques et physique mathématique.

Cette saisie des surfaces par les éléments de surface dS (ou dxdy lorsqu'on travaille dans le plan), ou des solides par les éléments de volume dV (ou dxdydz), est bien sûr une figure familière de la physique mathématique, en particulier dans cette théorie du potentiel qui nourrit si profondément la réflexion de Riemann, Neumann, Klein ou Poincaré. Il n'est pas question ici de dresser un panorama de la physique mathématique ; contentons-nous d'un exemple éminent. On ne peut pas ne pas être frappé par la similitude avec le mode d'écriture de Poincaré dans le raisonnement suivant, sous la plume de Maxwell dans son article de 1856 *A propos des lignes de courant de Faraday* :

> En fait, l'action exercée par un très petit circuit en un point proche est identique à celle qu'exerce un petit aimant sur un point extérieur. Si nous divisons toute surface en petits éléments, et si nous imposons à des courants égaux de circuler dans le même sens autour de toutes ces petites surfaces, l'effet en un point qui se trouve en dehors de la surface sera identique à celui créé par une coquille de même force que la surface, dans laquelle se trouve une aimantation uniforme, perpendiculaire à la surface. Mais, d'après la première loi, tous les courants qui circulent dans les petits circuits s'annulent les uns les autres, ne laissant qu'un seul courant qui circule le long de la courbe limitant la surface. [16]

Quelques années plus tard on trouve le terme « *neighborhood* » dans la préface au célèbre *Treatise on Electricity and Magnetism* de 1873. Après avoir distingué les champs scalaires et les champs de vecteurs σ, avoir introduit l'opérateur symbolique ∇ et la décomposition des quaternions en leur partie scalaire S et vectorielle V pour présenter avec soin, à la suite de Tait, les formules reliant les intégrales curvilignes, de surface et de volume, Maxwell termine la préface en appliquant les formules intégrales au voisinage d'un point pour donner une interprétation intuitive des opérateurs *convergence* (l'opposé de notre divergence)*, curl* et *concentration* (notre Laplacien) apparaissant dans les formules intégrales. L'étude est menée, écrit-il, « *in the neighborhood of P »*, l'usage étant ici, on s'en doute, *méta*:

[16] Cité dans [Darrigol 2005], p.40.

It appears therefore that the functions X,Y,Z which occur in the two theorems are both obtained by the operation ∇ *on the vectors whose components are X,Y,Z. The theorems themselves may be written*

$$\iiint S\nabla\sigma\, d\varsigma \;=\; \iint S.\sigma U\nu\, ds \;, \quad \text{(III)}$$

and $$\int S\sigma\, d\rho \;=\; \iint S.\nabla\sigma U\nu\, ds\,; \quad \text{(IV)}$$

where $d\varsigma$ *is an element of a volume, ds of a surface,* $d\rho$ *of a curve and* $U\nu$ *a unit-vector in the direction of the normal.*

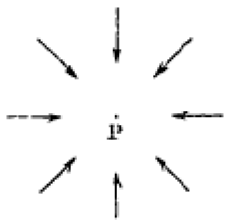


Fig. 1.

To understand the meaning of these functions of a vector, let us suppose that σ_0 *is the value of* σ *at a point P, and let us examine the value of* $\sigma - \sigma_0$ *in the neighbourhood of P. If we draw a closed surface round P, then, if the surface-integral of* σ *over this surface is directed inwards,* $S\nabla\sigma$ *will be positive, and the vector* σ-σ_0 *near the point P will be on the whole directed towards P, as in the figure (1).*

I propose therefore to call the scalar part of $\nabla\sigma$ *the* convergence *of* σ *at point P.* [Maxwell 1873 28]

L'étude au voisinage du point P consiste en l'utilisation d'une formule intégrale (ici (III)) sur une sphère arbitrairement petite centrée sur P, le résultat étant ensuite étalé au voisinage de P en exhibant le comportement uniforme donnant les mêmes résultats intégraux – ce qu'on peut voir comme un passage de l'infinitésimal au local ; le tout permet d'associer une intuition géométrique à l'opérateur différentiel S∇. On sait que ce type d'étude conduit les physiciens à distinguer les formulations intégrales et les formulations locales des mêmes lois, le « local » désignant ici l'infinitésimal saisi par des équations aux dérivées partielles. Nous retrouverons ces usages au chapitre 11, chez Einstein et Elie Cartan.

iii. Les ressources du monde de la grandeur.

Rétrospectivement, c'est-à-dire lorsqu'on jette sur les textes un regard éduqué à distinguer le local et l'infinitésimal, l'arbitrairement petit de l'infiniment petit, on observe deux aspects distincts. On voit premièrement des formulations infinitésimales là où nous utiliserions une formulation locale ou, plus précisément, des formulations uniformément infinitésimales là où nous distinguerions des aspects infinitésimaux et des aspects locaux. On voit aussi un mode d'accès au lieu, certes local au sens syntaxique – un point est désigné, ça se passe « là » –, mais qui insère le point dans l'espace ambiant au moyen non pas d'un voisinage weierstrassien (ou du filtre des voisinages) mais d'un voisinage infinitésimal ou *élément* (de surface, de volume etc.). Si le premier aspect s'insère dans un réseau dans lequel on trouve la description pré-weierstrassienne des fonctions continues, l'indistinction entre continuité et dérivabilité et, plus fondamentalement, la saisie analytique d'un continu antérieure aux constructions de Weierstrass, Méray, Cantor ou Dedekind, le second aspect s'insère dans un réseau dans lequel nous trouvons tout d'abord les procédés d'écriture usuels de la physique mathématique. Ces procédés sont en parfait accord avec des mathématiques structurées non pas autour d'un couple local/global mais autour de deux couples, antérieurs puis concurrents à local/global : un couple infiniment petit / fini et un couple infinitésimal / intégral. La formation de l'espace à partir de ses parties élémentaires n'emprunte pas les mêmes voies selon le couple structurant. Si l'on part de local/global, les parties élémentaires sont des parties finies, l'espace peut être décrit par des recouvrements avec empiètement, peut être formé par des procédés ensemblistes de recollement induits par des applications ; si on part au contraire d'un des couples infiniment petit/fini ou infinitésimal/intégral, la partie élémentaire est l'élément infinitésimal qui est aussi un élément d'intégrale, l'espace est atteint par un procédé dont l'habillage géométrique est la formation d'un réseau infini d'éléments ajointés et dont l'habillage analytique passe par une intégration. On retrouve le modèle additif du « considérer ensemble » qu'on avait déjà rencontré comme concurrent à l'union ensembliste ; s'y ajoute ici la question de l'infini : non seulement la recomposition de l'espace à partir de ses éléments est une « sorte » d'addition, mais c'est une infinité d'éléments infinitésimaux que l'intégration permet de sommer.

On le voit, cette saisie du « là » par l'élément infinitésimal de surface, volume etc. invite à des formulations et prête à la théorie une physionomie différente de ce qu'elles deviendront dans un cadre ensembliste s'appuyant sur la notion weierstrassienne de voisinage. Deux différences entre le recouvrement par des parties finies et la recomposition par sommation d'éléments infinitésimaux sont particulièrement frappantes. La première est qu'il ne saurait être question de décomposer l'espace en un nombre *fini* d'éléments infinitésimaux. Ainsi dans des cas où le traitement est en fait local et non infinitésimal, par exemple dans les démonstrations de Möbius et Jordan de l'équivalence topologique de surfaces (compactes orientables) ayant même ordre de connexion (*Zusammenhangszahl*) et même nombre de composantes connexes de bord, ou encore dans le calcul de l'indice d'un cycle fini dans le premier Mémoire de Poincaré sur les courbes définies par une équation différentielle, la formulation convoque systématiquement des infinités d'éléments. On ne recouvre pas un espace par un nombre fini de voisinages infinitésimaux ; on ne le recouvre d'ailleurs pas plus avec des voisinages indéterminés bien que non infinitésimaux : on retrouve l'importance non seulement de distinguer l'infiniment petit de l'arbitrairement petit, mais aussi de la possibilité de parler d'*un* voisinage et non seulement du travail *au* voisinage. La seconde différence réside en ce que deux éléments s'ajointent mais ne sauraient empiéter l'un sur l'autre ; la décomposition est cellulaire. Ce modèle fondamental, partagé par les mathématiques et la physique mathématique, n'explique pas à lui seul la prédominance, dans la théorie géométrique des fonctions de et après Riemann, des décompositions cellulaires et des recollements bord à bord : ces recollements bord à bord sont aussi les gestes réciproques des coupures servant à délimiter des parties du substrat et à rendre compte de manière narrative de phénomènes globaux – la fonction multivoque connaît ainsi une « discontinuité » lors du franchissement de la coupure, on retrouve l'alliance entre localisation par les discontinuités et saisie narrative ; ces décompositions cellulaires sont aussi, avec les formulations plus groupe-théoriques proposées par Klein et Poincaré, l'habillage géométrique de l'action sur le substrat d'un groupe discontinu infini. On peut toutefois considérer que les décompositions cellulaires se présentaient assez naturellement comme des analogues finis des décompositions en éléments infinitésimaux contigus, alors qu'aucun modèle usuel en calcul intégral ou physique mathématique ne suggérait des recouvrements avec empiètement.

Une dernière conséquence a trait à la conception même des espaces : sont-ils formés de points ou d'éléments ? Si on n'y voit qu'un *tas* inerte de points, eux-mêmes sans extension, comment expliquer que l'espace, lui, s'étende ; comment expliquer que des espaces qui seraient tous formés des mêmes points puissent être de dimensions différentes, s'étendant pour certains de manière unidimensionnelle, pour d'autres bidimensionnelle etc. On voit que ces problèmes – dont nous n'envisageons pas ici de retracer l'histoire depuis la mathématique grecque ! – sont esquivés lorsqu'on regarde les espaces comme formés d'éléments : les éléments sont eux-mêmes *déjà* pleinement étendus du point de vue géométrique (bien qu'infiniment peu du point de vue quantitatif), ils sont eux-mêmes déjà dimensionnés (élément de ligne, de surface etc.). C'est une réponse radicalement différente aux questions de l'extension et de la dimension qu'apporterons Hilbert et Weyl – on le verra au chapitre 9 – en fondant la notion moderne de variété sur celles de modèle local et de transport de structure, réponse qui utilise de manière essentielle la conception topologico-ensembliste fondée sur le voisinage weierstrassien. Le mode d'accès aux objets étendus alors mis en place met aussi d'emblée au premier plan les aspects globaux, au moins syntaxiquement. On peut essayer de replacer dans cette architecture problématique le travail de Riemann dans la première partie des *Hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*. Les paragraphes AII et AIII répondent à la double question de l'extension et de la propriété des espaces étendus de posséder une dimension. Si sa solution est loin d'être entièrement ensembliste – reposant par exemple en AII sur la notion primitive d'espace comme lieu, d'espace engendré par un point (puis une figure) continûment variable – elle s'arrache toutefois d'un cadre familier qui fournit une réponse en termes d'éléments ; éléments qui reviennent toutefois dans la deuxième partie avec les éléments linéaires ds, les dx_i etc[17]. On voit que les choix de la première partie de ce texte de Riemann sont mal saisis en termes de local/global, quelle que soit la prégnance rétrospective de cette grille de lecture dans des textes que l'on inscrit dans le passé de théories dans lesquelles ce couple est, parmi d'autres, structurant. La description de Riemann n'est pas « que » locale, ou indifférente – pour des questions de généralité de l'exposé, elles-mêmes dépendantes du genre de texte – aux spécificités globales. L'articulation principale passe entre une première partie, consacrée aux aspects non métriques (ou pré-métriques) de l'extension continue et travaillant uniquement dans le *fini*, et une seconde partie consacrée aux aspects métriques, à leur caractérisation infinitésimale puis au problème de passage de l'infinitésimal au fini faisant apparaître les invariants de courbure. C'est dans leur rapport aux aspects métriques introduits en deuxième partie que sont présentés les aspects pré-métriques de la première. Riemann y traite, d'un même mouvement de la pensée, la question de la dimension – empiétant sur les deux côtés d'une frontière séparant pour nous l'infinitésimal du local, selon qu'on considère la structure différentiable ou topologique – et celle du repérage – qui inviterait, nous semble-t-il à expliciter le caractère local pour en indiquer l'insuffisance dans l'approche de la forme ; si ces distinctions de niveau ne sont pas celles de Riemann c'est, entre autres raisons, que son projet est de montrer que les considérations de continuité permettent *à elles seules* de rendre compte du franchissement dans un sens puis dans l'autre de la barrière qui sépare les dimensions successives, et que c'est ce franchissement – et non les mesures de distances – qui fonde la possibilité d'un repérage numérique. Si les aspects globaux sont évoqués dans ce texte de Riemann, et ils le sont en particulier dans l'allusion au caractère discret des invariants d'*Analysis situs* ou la distinction entre l'infini et l'illimité, c'est n'est pas un couple local/global mais un couple infinitésimal/fini qui guide l'exposé. Le « fini » est alors le point d'arrivée du raisonnement, il n'importe pas ici qu'il ne soit *que* local.

[17] Ainsi dans le premier paragraphe de la deuxième partie : sous hypothèse de continuité du rapport des dx_i , « On peut alors concevoir les lignes décomposés en éléments, dans l'étendue desquels les rapports des quantités *dx* puissent être regardés comme constants (…) » [Riemann 1989 1854 286]

Une dernière remarque sur cette saisie des espaces multiplement étendus comme somme d'éléments infinitésimaux. Nous décrivions comme un des traits structurant du monde de la grandeur la possibilité de changer de point de vue sur une grandeur variable pour y voir, en utilisant des termes appartenant au monde ensembliste, tantôt un ensemble (partie de $\mathbf{R}^n$) tantôt une fonction. Nous décrivions plus haut l'émergence tardive du point de vue purement ponctuel sur les fonctions, point de vue lié à la mise en place systématique d'un mode inédit de description du monde fonctionnel partant de la fonction arbitraire pour ajouter peu à peu des hypothèses. Jusque là, une fonction possédait en un point bien plus qu'une valeur, elle présentait un comportement ; le rôle de la référence au point était la désignation du lieu (ou du moment) où quelque chose se passait. Cette saisie du comportement en un point passait indifféremment par des ressources infinitésimales et des ressources locales, l'analyticité faisant d'ailleurs coïncider l'exhaustivité infinitésimale de la série de Taylor et la saisie, pour nous purement locale, par le germe. Faisons maintenant jouer le *Gestalt switch* caractéristique du monde de la grandeur. Là où, dans le monde ensembliste, la fonction arbitraire renvoie à l'ensemble comme simple collection (tas) de points ne possédant aucune structuration dimensionnelle, topologique ou métrique ; la saisie de la fonction par son comportement renvoie au point comme porteur d'un élément d'espace, d'un élément qu'on saisirait de manière anachronique en voulant lui assigner soit un statut infinitésimal soit un statut local. Selon que l'on considère une même grandeur variable (continue) pour elle-même ou dans sa dépendance à une autre, on voit apparaître des germes d'espace – les éléments – ou des germes de fonction. La saisie infinitésimale par les points infiniment proches et non plus par les éléments repose aussi sur ce *switch* : dz est, selon le point de vue, un élément de ligne – c'est-à-dire segment orienté reliant deux points infiniment proches dont il est la différence géométrique – ou la différentielle d'une fonction.

3. Voisinage weierstrassien, variation, dimension.

On peut discerner un troisième aspect de l'« invention » weierstrassienne. Le terme de « un voisinage » que l'on trouve défini dans les cours de Weierstrass n'est pas utilisé, on l'a déjà noté, dans ses définitions des notions de limite d'une fonction ou de fonction continue ; nous rapprochions cette absence, pour nous surprenante, de la difficulté de saisie de la notion purement ensembliste d'image d'une partie par une fonction. Si l'on met de côté la question de l'usage du terme « voisinage » lui-même, on voit toutefois que la notion weierstrassienne de voisinage est sous-jacente à sa définition de la continuité d'une fonction en un point. En suivant des auteurs tels Heine, du Bois-Reymond ou Darboux nous considérions que la nouveauté de cette notion de continuité en un point résidait principalement dans le caractère ponctuel d'une notion qui était jusque là conçue par intervalles ou sur un domaine. Nous montrions aussi qu'elle imposait un mode privilégié de lecture du « tendre vers » qui se substituait à la multiplicité des *Grenzübergänge* ; c'est sur ce point que nous voudrions revenir.

Comme le notait Jean Dieudonné :

> (…) même dans le plan, par exemple, la notion de voisinage d'un point ne se dégage pas vite, et pendant longtemps, au dix-neuvième siècle, l'idée d'un point x tendant vers un point a est conçu de façon « linéaire », le point x s'approchant de a le long d'une *courbe* arbitraire aboutissant au point a. [Dieudonné 1978 352]

Les élèves ou lecteurs de Weierstrass utilisent sa notion de voisinage pour combattre cette conception linéaire de la variation, en particulier sous sa forme la plus élémentaire consistant à considérer qu'une fonction de deux variables (indépendantes) est convenablement décrite en regardant provisoirement l'une des variables comme constante puis en changeant de point de vue. Cet point historique a été étudié par Hélène Gispert [Gispert 1983 43 et sui.] à l'occasion d'une étude sur les fondements de l'Analyse en France ; nous nous appuyons ici sur son travail. Ainsi Darboux dans son article de 1872 sur le théorème du maximum pour les fonctions de deux variables définit-il, après Bonnet et peut-être indépendamment de Weierstrass, la continuité « point par point » :

> *Une fonction $z = f(x,y)$ est dite continue pour un système (x_0,y_0) de valeur des variables, représenté par un point M, quand on peut assigner autour du point M une courbe, quelque petite qu'elle soit, telle que, pour tous les points M'(x,y) compris à l'intérieur de cette courbe, on ait la différence*
>
> $$f(x,y) - f(x_0,y_0)$$
>
> *plus petite en valeur absolue que δ, δ étant pris aussi petit qu'on veut*. [Darboux 1872 308]

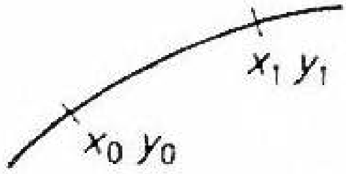
On notera que Darboux n'introduit pas le terme « un voisinage » mais utilise un langage géométrique pour donner une formulation plus ensembliste que celle de Weierstrass lui-même. Cette définition de Darboux renvoie à une note de bas de page :

> Nous ferons remarquer que cette définition n'est pas la seule qu'on puisse prendre. On pourrait dire, par exemple, que la fonction est continue pour (x_0,y_0), quand $f(x_0+h,y_0+k)$ a pour limite $f(x_0,y_0)$, h et k tendant vers 0 d'une manière quelconque. Cette définition est comprise dans celle que nous avons choisie, mais elle ne lui est pas absolument

équivalente. Il y aurait peut-être avantage à indiquer dans la définition du texte la nature de la petite courbe tracée autour de M, à prendre un cercle ou un rectangle. [Darboux 1872 309]

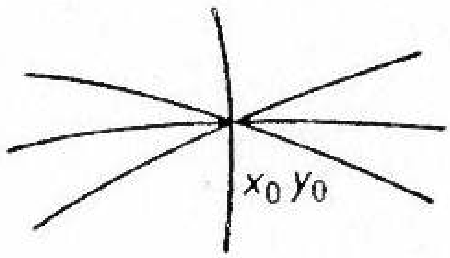
Cette définition ne convainc guère Houël, on le voit dans la correspondance qu'il entretient avec Darboux, soit que Darboux expose de manière générale le point faible de la notion classique, soit qu'il propose un contre-exemple. Ainsi Darboux soumet-il en vain à son correspondant l'analyse suivante :

Il ne revient pas au même pour les fonctions de deux variables de dire : une fonction est continue quand on peut trouver autour du point x_0y_0 une courbe telle que pour tout point x_1y_1 à l'intérieur, $f(x_1,y_1) - f(x_0,y_0) < \delta$ ou de dire : si, par le point x_0y_0 on fait passer une courbe quelconque, sur chaque courbe $\lim(x_1,y_1) = \lim\,(x_0,y_0)$ [sic] quand x_1y_1 se rapproche de x_0y_0. En effet, admettons cette seconde définition et faisons passer par x_0y_0 une suite de courbes, et sur chacune d'elles on pourra trouver un axe quelconque tel que



$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) < \delta;$$

Mais il n'est pas évident que pour toutes les directions possibles ces axes seront supérieurs à une certaine limite aussi petite que l'on voudra α et qu'alors on aura



$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) < \delta.$$

Voilà la question exposée. [Gispert 1883 83]

On retrouve dans cette analyse de la non équivalence entre l'approche « linéaire » – pour reprendre le terme de Dieudonné – de la continuité et l'approche par les domaines bidimensionnels délimités par une courbe quelconque des variantes d'éléments déjà rencontrés à propos du maximum, en particulier l'impossibilité *a priori* de trouver un nombre strictement positif inférieur à une collection infinie donnée de nombres strictement positifs et, plus généralement, la distinction entre processus ponctuels et uniformes permettant une dénonciation d'hypothèses implicites d'uniformité dans les raisonnements ordinaires des analystes.

De même, si l'on a retenu le nom de Schwarz pour son travail sur l'ordre des dérivations partielles d'une fonction de plusieurs variables – travail qui s'inscrit aussi dans cette nouvelle approche des fonctions de plusieurs variables indépendantes – on trouve aussi dans ses textes du début des années 1870 l'écho de ces réflexions sur la continuité des fonctions de deux variables. Ainsi dans son article de 1872 sur l'intégration de l'équation $\Delta u = 0$ on lit une longue note infrapaginale faisant le point sur les réflexions en Allemagne ; en voici un large extrait :

> C'est avec raison que M. Heine a fait remarquer à ce propos (ce Journal, vol.71, p.361) que, pour que la définition de la continuité d'une fonction de deux variables ou plus soit utilisable analytiquement, il faut s'y prendre avec soin. En particulier, la définition : « une fonction de deux arguments est continue en ces arguments lorsque, à l'intérieur du domaine considéré, elle est pour chaque valeur du premier argument fonction continue du deuxième et en même temps, pour chaque valeur du deuxième argument fonction continue du premier », se révèle insuffisante dans la plupart des cas pour qu'on en tire des conclusions. Cette définition est ainsi à rejeter comme inutilisable, même si l'on ne prend pas en compte le fait, remarqué par M. Thomae, qu'elle englobe des fonctions ordinairement appelées discontinues, comme par exemple la fonction $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ en l'un des domaines contenant en son intérieur le point
>
> $x = 0$,
>
> $y = 0$. *Cf.* l'« Abrégé d'une théorie des fonctions complexes et des fonctions théta d'une variable », de Thomae, Halle 1870, p.13-16. J'ai rencontré au début de mes études de mathématiques la définition suivante de la continuité d'une fonction de deux arguments, que moi aussi je tiens, aujourd'hui encore, pour la bonne : « Une fonction $f(x,y)$ est une fonction continue de ses deux arguments réels (continûment variables) au voisinage d'une paire x_0,y_0 si, après avoir fixé une grandeur positive ε, différente de zéro mais dont la petitesse n'est soumise à aucune restriction, il est toujours possible de délimiter au voisinage de la paire x_0,y_0 un domaine étendu dans les deux dimensions, tel que pour toutes les paires x_0+h , y_0+k appartenant à la fois au domaine initial des variables pour lequel la fonction est définie et au domaine délimité, la différence $f(x_0,y_0) - f(x_0+h , y_0+k)$ est en valeur absolue plus petite que ε. La forme du

domaine délimité n'est en général soumise à aucune restriction. Si la fonction vérifie cette condition pour toutes les paires x_0, y_0 appartenant à l'intérieur ou à la frontière d'un domaine donné des variables indépendantes, cette fonction est alors dans ce domaine une fonction continue de ses arguments ». (…) [Schwarz 1890 177][18]

Si l'on s'attache à la formulation, « voisinage » n'a ici encore que le sens *méta*, le voisinage-partie étant désigné comme le « domaine étendu dans les deux dimensions ». L'attention au lieu est toutefois scrupuleuse, en particulier dans sa référence à l'intersection du domaine de définition de la fonction et du voisinage du point considéré ; elle permet à Schwarz de définir très rigoureusement la continuité à l'intérieur *et* au bord d'un domaine plan, problème de Dirichlet oblige.

Il semble inutile de multiplier les citations montrant, au delà de la variabilité des formulations – qui ne signifie d'ailleurs nullement leur incorrection, nul n'étant aujourd'hui même tenu de parler d'images de voisinages –, que le voisinage comme type de partie finie sert à formuler une notion de continuité des fonctions de plusieurs variables qui n'est pas, dans les années 1870, la définition ordinaire. On peut, plus généralement, s'appuyer sur cette redéfinition de la continuité pour faire quelques remarques sur la sortie progressive du monde de la grandeur variable et les conditions d'émergence de la notion moderne de variété. La définition par les voisinages de la continuité en un point, ou de la limite en un point d'une fonction de plusieurs variables, ne s'inscrit plus dans le cadre classique ; dans ce cadre, une grandeur variait et

---

[18] « *Mit Recht hat Herr Heine darauf aufmerksam gemacht (dieses Journal, Bd.71, S. 361), dass bei der Erklärung der Stetigkeit einer Function zweier oder mehrerer Argumente sorgfältig zu Werke gegangen werden muss, wenn diese Erklärung analytisch brauchbar sein soll. Insbesondere erweist sich folgende Definition : „Eine Function zweier Argumente ist eine stetige Function derselben, wenn diese Function innerhalb des in Betracht kommenden Gebietes für jeden Werth des ersten Arguments eine stetige Function des zweiten und gleichzeitig für jeden Werth des zweiten Arguments eine stetige Function des ersten ist", in den meisten Fällen als unzureichend, wenn es sich darum handelt, aus derselben Schlüsse zu ziehen. Diese Erklärung ist daher auch unbrauchbar zu verwerfe, ganz abgesehen davon, dass dieselbe, wie Herr Thomae bemerkt hat, auch solche Functionen umfasst, welche gewöhnlich unstetig genannt werden, wie z.B. die Function* $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ *in einem den Punkt x=0,y=0 in seinem Inneren enthaltenden Gebiete. Vergl. die Schrift des Herrn Thomae : „ Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen „ , Halle 1870, S. 13-16. – Bei Beginn meiner mathematischen Studien habe ich folgende Erklärung der Stetigkeit einer Function zweier Argumente kennen gelernt, die ich auch jetzt noch für die richtige halte : „ Eine Function f(x,y) ist in der Umgebung des Werthpaares* x_0,y_0 *eine stetige Function ihrer beiden (stetig veränderlichen) reellen Argumente, wenn es nach Annahme einer von 0 verschiedenen, sonst hinsichtlich ihrer Kleinheit keiner Beschränkung unterworfen positiven Grösse* ε *stets möglich ist, in der Umgebung des Werthpaares* x_0,y_0 *einen nach zwei Dimensionen ausgedehnten Bereich abzugrenzen, so dass für alle, zugleich dem ursprünglichen Bereiche der Variablen, für den die Function erklärt ist, und dem abgegrenzten Bereiche angehörenden Werthpaare* x_0+h, y_0+k *die Differenz* $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$ *dem absoluten Betrage nach kleiner als* ε *ist.Hierbei ist die Gestalt jenes abgegrenzten Bereiches im allgemein keinen Beschränkungen unterworfen. Genügt eine Function dieser Bedingung für alle dem Inneren und für alle der Begrenzung eines gegebenen Bereiches der unabhängigen Variablen angehörenden Werthpaare* x_0,y_0 *so ist die betrachtete Function für diesen Bereich eine stetige Function ihrer Argumente ».* »

« tendait vers » par elle-même, la continuité fonctionnelle résidait, pour deux grandeurs dépendantes, dans la compatibilité de ces mouvements considérés dans leur dépendance. La nouvelle définition est par contre irréductiblement fonctionnelle, elle ne repose pas sur une notion première de variation et de limite de grandeur variable considérée seule. On peut certes considérer le filtre des voisinages du point (x_0,y_0) de manière dynamique comme exprimant le « tendre vers », son caractère d'emblée bidimensionnel le coupe toutefois radicalement de l'image usuelle et unidimensionnelle d'un point variable. Ceci contribue à modifier le mode de saisie des espaces à plusieurs dimensions. En un point d'un tel espace, on peut distinguer une saisie que nous dirions *horizontale* – par les voisinages – et une série *verticale* parcourant *dans la profondeur* l'échelle des dimensions successives. La saisie classique de la continuité (ou de la dérivabilité) d'une fonction de plusieurs variables est verticale, dans des variantes plus ou moins intrinsèques toutefois. Du côté le moins intrinsèque de la saisie verticale on trouve l'approche selon laquelle la saisie du comportement en un système de valeurs fixé $(x_0,y_0,..)$ se décompose en variations successives selon chacune des variables ; cette démarche s'appuie sur et exprime l'idée fondamentale d'*indépendance* des variables. Du côté le plus intrinsèque on trouve les formulations géométriques en termes de point variable et de variation selon toutes les courbes (ou infinitésimalement selon tous les systèmes homogènes d'accroissements $(dx_0 : dy_0 : \ldots)$) passant par le point donné. La démarche de Riemann dans les paragraphes AII et AIII de la dissertation de 1854 en est typique par son mariage d'intrinséquéité géométrique et de franchissement selon la profondeur des dimensions successives. Au contraire, la saisie de la continuité par les voisinages enlève aux aspects verticaux – qu'ils soient variations indépendantes des différentes variables numériques ou variation du point variable selon toutes les courbes – une partie de leur *pertinence*. En délégitimant la saisie classique de « ce que c'est que varier » dans un espace n-dimensionnel, la saisie par les voisinages contribue à autonomiser une approche purement horizontale dans laquelle l'espace n-dimensionnel n'est plus à rapporter à des espaces de dimensions inférieures mais à décrire à partir de morceaux petits (mais pas infiniment petits), eux-mêmes déjà n-dimensionnels. Loin, en apparence, des questions de surface de Riemann d'une fonction multivoque ou de fondements de la géométrie, les modifications profondes dans l'Analyse élémentaire préparent un nouveau mode de questionnement sur les variétés ; un mode de questionnement oblitérant la question du franchissement des dimensions et articulant la question de l'intrinsèque – de la non-unicité du passage de la détermination de lieu aux déterminations de grandeurs – à celle, inédite, de l'organisation du système des morceaux représentés par les cartes numériques.

II. Figures de l'entre-deux (2) : le *Traité* de Lie.

La théorie des groupes de Lie offre un cas un peu déroutant. La situation aurait pu être simple : Sophus Lie (1842-1899) propose une théorie clairement locale, et lue explicitement comme telle par Klein comme nous l'avons vu dans ses conférences de 1893 à Chicago ; dans les années 1920, les travaux de Weyl puis Cartan introduisent des problématiques et des techniques globales en théorie des groupes de Lie et conduisent à une réécriture d'ensemble sur des bases globales, réécriture qui amène à relire *explicitement* la théorie classique comme locale. Si toutefois on prête attention à l'écriture du premier volume du *Traité des groupes de transformations* [Lie 1888], on y relève des éléments qui ne devraient pas cohabiter : une attention scrupuleuse au lieu dans certains passages, une explicitation du caractère local du travail dans d'autres, la persistance – générale – d'un point de vue universellement local implicite conduisant à des formulations d'allures globales. Cet entrelacement de styles conduit jusqu'en 1914 à quelques polémiques et débouche sur quelques explicitations du mode de lecture attendu, explicitations qui jouent toutefois un rôle mineur dans l'émergence du couple local/global. Le cas complexe du traité de Lie va nous permettre de préciser l'articulation entre évolution des cadres fondamentaux de l'Analyse et émergence de local/global comme axe problématique.

1. 1880 : un point de vue universellement local.

Le mode d'écriture du *Traité* est mieux compris si on le met en perspective par la comparaison avec un exposé rédigé par Lie seul en 1880 (le travail avec Engel (1861-1941) ne commence qu'en 1884) : *Théorie des groupes de transformations I*, publié dans les *Mathematische Annalen*[19]. Lie y présente en détail son travail de classification des groupes agissant sur une variété simplement étendue et sur une variété doublement étendue mais il expose aussi quelques éléments généraux de la théorie. Ainsi pour la notion générale de groupe de transformation, qui ouvre la seconde partie :

> Qu'on regarde dans les n équations
>
> $$x_i' = f_i(x_1,\dots,x_n, a_1,\dots,a_r), \qquad (i = 1,2,\dots,n)$$
>
> les grandeurs $x_1',\dots,x_n'$ comme les variables primitives, les $x_1,\dots,x_n$ comme de nouvelles variables, et les $a_1,\dots,a_r$ comme des paramètres, alors ces équations définissent une infinité r-uple de transformations. Je dis qu'une telle famille [*Schaar*]

de transformations forme un groupe si la succession de deux transformations de la famille est équivalente à une unique transformation de la même famille ; si, autrement dit, des équations

$$x_i' = f_i(x_1,\ldots,x_n, a_1,\ldots,a_r) = f_i(a),$$
$$x_i'' = f_i(x_1',\ldots,x_n', b_1,\ldots,b_r),$$

il suit

$$x_i'' = f_i(x_1,\ldots,x_n, c_1,\ldots,c_r),$$

où les grandeurs $c_1,\ldots,c_r$ ne dépendent que des *a* et *b*, mais ni des *x* ni du nombre *i*. (…)

Comme dans la partie qui précède, nous nous limitons explicitement aux groupes dont les transformations sont regroupables en paires d'*inverses* (…). [Lie 1880 455][20]

Agir sur des systèmes de *n* variables complexes c'est pour Lie être une transformation d'une « multiplicité *n*-fois étendue » (« *einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit* » [Lie 1880 455]). Le problème de classification, étudié ici dans les cas $n = 1,2$, nécessite deux clarifications préalables relatives au nombre de paramètres et à la notion de groupes semblables. On pourrait, nous dit Lie, remplacer dans les équations du groupe les *r* paramètres a_k par des paramètres α, fonction des a_k, et il pourrait se présenter le cas où les α seraient moins de *r* : les *r* paramètres a_k ne seraient alors pas tous des paramètres essentiels, ce défaut se traduisant analytiquement par le fait que les f_i, vues comme fonctions des a_k, sont toutes solutions d'une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre

$$\sum_k \psi_k(a_1,\ldots,a_r)\frac{\partial f}{\partial a_k} = 0 .$$

Le raisonnement est explicité dans le *Traité* : on sait qu'une telle équation possède au plus *r*-1 solutions indépendantes et que toute fonction des a_k est fonction de ces *r*-1 fonctions, qu'on peut introduire comme nouveaux paramètres [Lie 1888 13]. On voit que la notion de paramètre essentiel repose sur la notion purement dimensionnelle de fonctions « indépendantes », sans mention du caractère local du résultat d'Analyse utilisé. L'exemple

---

[19] *Theorie des Transformationsgruppen I*, [Lie 1880]

[20] „*Fasst man in den n Gleichungen (...) die Grössen $x_1',\ldots,x_n'$ als ursprüngliche Variable, $x_1,\ldots,x_n$ als neue Variable, und $a_1,\ldots,a_r$ als Parameter auf, so definiren diese Gleichungen r-fach unendlich viele Transformationen. Ich sage, dass eine solche Schaar von Transformationen eine Gruppe bilden, wenn die Succession zweier Transformationen der Schaar mit einer einzigen Transformation derselben Schaar äquivalent ist; wenn also aus den Gleichungen (...) folgt (...) wo die Grössen $c_1,\ldots,c_r$ nur von den a und b, dagegen weder von den x noch von der Zahl i abhängen. (...) Wie in dem vorangehenden Abschnitte beschränken wir uns ausdrücklich auf Gruppen, deren Transformationen sich paarweise als* inverse *Transformationen zusammenordnen lassen (...).*"

donné par Lie en 1880 comme en 1888 est celui du groupe à trois paramètres d'une variété simplement étendue donné par l'équation :

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3} \qquad \text{[Lie 1888 4]}$$

décrit comme le « groupe linéaire général » à une variable. La bonne description n'est donc pas pour Lie celle qui utilise deux coordonnées homogènes et quatre paramètres : une telle présentation masquerait le fait que la variété qu'est la droite projective est à une dimension et que seuls trois paramètres sont essentiels ; Lie sacrifie implicitement la représentation analytique globale à l'expression la plus juste en termes de dimensions. Après les changements de paramètres et la notion de groupe d'ordre *r* (*r-gliedrig*), interviennent les changements de variables :

> Si les équations
>
> $$x_i' = f_i(x_1,\ldots,x_n, a_1,\ldots,a_r)$$
>
> déterminent un groupe de transformation et que l'on introduit de nouvelles variables $y_1,\ldots,y_n$ au lieu des $x_1,\ldots,x_n$ au moyen d'équations
>
> $$x_k = \theta_k(y_1,\ldots,y_k) = \theta_k$$
>
> on voit aisément que les équations
>
> $$\theta_i(y_1',\ldots,y_n') = f_i(\theta_1,\ldots,\theta_n, a_1,\ldots,a_r)$$
>
> déterminent un groupe de transformations. Cela repose sur le fait que les nouvelles équations et les anciennes déterminent identiquement les mêmes transformations en les *x*. Nous pouvons appeler *semblables* deux tels groupes. [Lie 1880 457][21]

On manipule formellement des relations entre grandeurs, sans souci de domaine. Il ne s'agit que de pouvoir formuler avec précision le problème général :

> Problème. *Déterminer tous les groupes de transformations d'ordre r d'une multiplicité n-fois étendue*.
>
> Dans le traitement de ce problème il est permis et opportun de regarder comme identique des groupes semblables. [Lie 1880 457][22]

Ce problème est ramené à celui des « transformations infinitésimales » du groupe ; une transformation infinitésimale est une transformation de la forme

---

[21] „*Bestimmen die Gleichungen (...) eine Transformationsgruppe, und führt man statt $x_1,\ldots,x_n$ neue Variable $y_1,\ldots,y_n$ vermöge der Gleichungen (...) ein, so ist leicht zu erkennen, dass auch die Gleichungen (...) eine Transformationsgruppe bestimmen. Dies beruht darauf, dass die neuen und die alten Gleichungen identisch dieselben Transformationen zwischen den x bestimmen. Zwei solche Gruppen mögen* ähnlich *heissen.*"

[22] „*Problem*. Man soll alle *r*-gliedrigen Transformationsgruppen einer *n*-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bestimmen. *Bei der Behandlung dieses Problem ist es erlaubt, und zugleich zweckmässig, ähnliche Gruppen als identisch zu betrachten.*"

$$x_i' = x_i + X_i(x_1,\ldots,x_n)\,\delta t \qquad \text{[Lie 1880 457]}$$

où δt désigne une « grandeur infinitésimale » et les X_i des fonctions des x_k. Un groupe de transformations « contient » (*enthält*) r transformations infinitésimales $A_1 = (X_{11},\ldots,X_{1n}),\ldots, A_r = (X_{r1},..,X_{rn})$, associées aux accroissements infinitésimaux des paramètres a_k à partir du système correspondant à la transformation « identique »[23]. On retrouve dans ces conceptions infinitésimales (du premier ordre) des considérations projectives : les transformations infinitésimales de la forme $\lambda_1A_1+\ldots+\lambda_rA_r$ où les λ_i sont r paramètres arbitraires (constants, ou du moins ne dépendant pas des x_i) forment, nous dit Lie, une famille ∞^{r-1} transformations infinitésimales ; on voit que dans les raisonnements linéaires Lie considère les λ_i comme des coordonnées homogènes [Lie 1880 459] : on peut penser que les accroissements infinitésimaux n'ont pas de taille dont il faille se soucier ; la linéarité du comportement au premier ordre rend trivial l'effet d'une multiplication par une constante. La caractérisation analytique de la notion de paramètre essentiel permet d'établir le premier résultat relatif aux transformations infinitésimales : un groupe à *r* paramètres (essentiels) contient *r* transformations infinitésimales (indépendantes) [Lie 1880 460]. Les transformations infinitésimales ne sont pas décrites comme des champs de directions mais comme des opérateurs différentiels $A_i = \sum_{k=1}^{n} X_{ik}(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_k}$, et Lie note plus volontiers cet opérateur par $A_i(f)$, où f désigne une quelconque fonction des x_i. Il est établi que le crochet[24] $(A_iA_k) = A_iA_k-A_kA_i$ de deux transformations infinitésimales d'un groupe est combinaison linéaire à coefficients constants des transformations infinitésimales du groupe. La démonstration, en trois pages, utilise l'inversion des relations linéaires (en explicitant le fait que, d'après les hypothèses d'indépendance, les déterminants ne s'annulent pas) et la « condition d'intégrabilité bien connue » liée à $\partial^2/\partial a_ia_k = \partial^2/\partial a_ka_i$ [Lie 1880 461]. La partie générale de l'exposé de 1880 se termine sur un résultat plus d'unicité que d'existence : « Un groupe est déterminé [*bestimmt*] par ses transformations infinitésimales. » [Lie 1880 463][25]. Plus précisément,

Si les *r* transformations infinitésimales indépendantes

$$A_1(f) \ldots A_r(f)$$

---

[23] Nous simplifions ici légèrement la présentation de Lie, qui n'utilise pas toujours la transformation « identique » en 1880 et développe en 1888 la théorie sans supposer que le groupe la contient. Si de manière anachronique nous notons T_a la transformation associée à un système de paramètres *a*, Lie introduit en 1880 les transformations infinitésimales en considérant les $T_{a+\omega}T_a^{-1}$ où ω est un système d'infinitésimaux.

[24] En 1880 Lie n'utilise aucun terme ni aucune notation spécifique pour le crochet. La notation (A_iA_k) est utilisée en 1888.

appartiennent à un groupe d'ordre *r*

$$x_i' = f_i(x_1,\dots,x_n, a_1,\dots,a_r)$$

alors elles ne peuvent en même temps appartenir à un autre groupe d'ordre *r*. [Lie 1880 463][26]

Il ne s'agit donc pas encore d'affirmer ce qui deviendra le troisième théorème fondamental, selon lequel toute famille finie de transformations infinitésimales (stable pour le crochet et vérifiant l'identité de Jacobi) est celle d'un groupe. L'obtention du résultat d'unicité de 1880 passe toutefois par un résultat d'existence, permettant de passer des transformations infinitésimales aux transformations finies : il est établi qu'à une transformation infinitésimale donnée correspond une famille simple (i.e. dépendant d'un unique paramètre « arbitraire » [Lie 1880 464] de transformations finies, ce qu'on retrouvera en 1888 sous le nom de groupe à un paramètre ; l'existence résulte du fait qu'on est ramené à une simple équation différentielle ordinaire : la transformation infinitésimale « engendre » un groupe d'ordre 1, l'intégration est vue comme la composition d'une infinité de transformations infinitésimales. Lie explique ensuite qu'en faisant varier les constantes λ_i dans l'expression générale $\lambda_1 A_1+\dots+\lambda_r A_r$ d'une transformation infinitésimale du groupe, on obtient une famille à *r* paramètres $\lambda_1 t,\dots,\lambda_r t$ de transformations finies formant un groupe; l'argument conclusif est ensuite annoncé ainsi :

C'est pourquoi, si nous pouvions établir que le nombre de paramètres ne peut être diminué, nous aurions *eo ipso* démontré que leur ensemble [*Inbegriff*] fournit toutes les transformations du groupe. [Lie 1880 465][27]

Il s'agit donc d'établir que les paramètres $\lambda_1 t,\dots,\lambda_r t$ sont tous essentiels : le contraire contredirait l'hypothèse d'indépendance des transformations infinitésimales. On voit dans cette dernière citation que les termes « ensemble » (*Inbegriff*) et la « totalité » des transformations ne doivent en rien être lus en termes globaux ; Lie raisonne entièrement en termes de nombre de dimensions, et il utilise le fait qu'une sous-multiplicité de dimension maximale coïncide avec la multiplicité ambiante. Les raisonnements sont menés en un point générique, donc, de façon indiscernable, localement en un point et en tous les points d'un ouvert non spécifié. La seule propriétés caractéristique d'une « multiplicité » est sa dimension.

---

[25] „*Eine Gruppe ist bestimmt durch ihre infinitesimalen Transformationen.*"

[26] „*Wenn die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $A_1(F)\dots A_r(F)$ einer r-gliedrigen Gruppen (...) angehören, so* können sie nicht zugleich einer anderen r-gliedrigen Gruppe angehören."

[27] „*Können wir daher nachweisen, dass die Zahl dieser Parameter nicht erniedrigt werden kann, so ist eo ipso erwiesen, dass ihr Inbegriff* alle *Transformationen der Gruppe liefert.*"

Soulignons que si Lie utilise des raisonnements universellement et implicitement locaux, il est par contre explicite sur son emploi d'hypothèses de position générale : lorsque cela ne résulte pas des hypothèses explicites (en particulier sur l'ordre du groupe), Lie précise qu'il suppose que tel ou tel déterminant ne s'annule pas (voir la note [Lie 1880 465] ou les énoncés sur les propriétés « d'un points en position générale » (*eines Punkts allgemeiner Lage*) [Lie 1880 476])). Il est aussi parfaitement explicite sur le fait qu'il suppose toutes les fonctions analytiques ; ce contexte explique la présence du terme « voisinage » (*Umgebung*) : il n'est jamais utilisé à propose de théorèmes locaux d'existence, jamais on ne doit se restreindre à un voisinage etc. Le terme est strictement lié à l'usage de développements en série entière. Ainsi l'étude des cas uni- et bidimensionnels passe-t-elle par une discussion de l' « ordre » (*Ordnung*) d'une transformation infinitésimale « au voisinage d'un point », l'ordre étant bien classiquement défini en regardant les premiers termes non nuls dans le développement en série [Lie 1880 470].

Un seul élément, dans l'article de 1880, semble se détacher de cette écriture implicitement locale et explicitement générique. Il intervient dès que la notion de groupe a été définie par la condition de stabilité par composition, exprimée par les relations de la forme $f(f(x,a),b) = f(x,\varphi(a,b))$ (que Lie appelle les « équations de condition »). Il précise immédiatement :

> Regardons les fonctions inconnues $f_1,\ldots,f_n$ comme développées en série selon les puissances entières des grandeurs x et a, convergentes dans certaines régions de ces grandeurs [*binnen gewisser Bereiche dieser Grössen*]. Il s'en suit que les f_i sont des fonctions univoques et différentiables de leurs arguments. De la forme des équations de condition il s'ajoute *eo ipso* la demande [*Forderung*] supplémentaire : les grandeurs $x_1,\ldots,x_n$, $a_1,\ldots,a_r$ peuvent être choisies de sorte que la valeur de chacune des grandeurs $f_i(xa)$ [sic] tombe dans la région des grandeurs x_i. [Lie 1880 456][28]

Deux mouvements se croisent : d'un côté, l'existence d'une région de convergence permet de fixer un domaine dans $\mathbf{C}^n$ sur lequel toutes les transformations du groupe sont définies, du moins pour toutes les valeurs des paramètres appartenant à un domaine de $\mathbf{C}^r$; l'hypothèse d'analyticité conduit à l'explicitation du rôle de certains domaines, et des termes comme « région » ou « tomber dans » ne jouent pas de rôle ailleurs dans le texte. On pourrait imaginer se fixer une fois pour toute ces domaines et développer une théorie globale dans ce

[28] „*Wir denken uns die unbekannten Functionen $f_1 \ldots f_n$ als nach den ganzen Potenzen der Grössen x und a fortschreitende Reihenentwicklungen, die binnen gewisser Bereiche dieser Grössen convergent sind. In Folge dessen sind die f_i eindeutige und differentiirbare Functionen ihrer Argumente. Wegen der Form der Bedingungsgleichungen tritt eo ipso die weitere Forderung hinzu, dass die Grössen $x_1,\ldots,x_n$, $a_1,\ldots,a_r$ derart gewählt werden können, dass der Werth einer jeden Grösse $f_i(xa)$ innerhalt des Bereiches der Grösse x_i fällt.*"

cadre … nous avons vu qu'il n'en est rien. D'un autre côté, les transformations (même en se restreignant à celles correspondant aux paramètres dans le domaine de $\mathbf{C}^r$ évoqué), ne vont pas du domaine de $\mathbf{C}^n$ dans lui-même : la simple contrainte de composition fait apparaître une contrainte, un axiome – une demande – supplémentaire dans la théorie et portant, lui, sur des aspects de lieu. Il n'est pas demandé que les transformations amènent le domaine de convergence des x dans lui-même, mais qu'au moins une partie du domaine soit appliquée dans lui-même. Dans cette écriture où aucun domaine total n'est fixé, cette condition est moins une condition ensembliste nécessaire pour que la composition ait un sens, qu'une contrainte garantissant qu'à la série des équation de condition on peut associer des domaines de convergence, quitte à ce que $f(f(x,a),b) = f(x,\varphi(a,b))$ soit exprimable comme égalité de séries convergentes sur des domaines plus petits que ceux associés à $x' = f(x,a)$. Loin d'ouvrir la possibilité d'une théorie globale, la conjonction des contraintes d'analyticité des fonctions et de composabilité des transformations renvoie au travail local : il faut que tout ce dont on parle converge au moins quelque part. Dans ces quelques lignes – qui ne constituent, dans l'économie du texte, qu'une petite explication des hypothèses de travail – le geste élémentaire d'une saisie locale est explicité en termes de domaines : quel que soit le domaine donné à un instant et quelle que soit la prochaine étape envisagée, on « doit pouvoir choisir » un sous-domaine sur lequel celle-ci est licite.

2. 1888 : les outils de la « rigueur ».

Ce texte de 1880 fournit une base solide pour analyser le rapport au couple local/global dans le premier volume de la *Théorie des groupes de transformations*, qui paraît en 1888 après plusieurs années de travail de Lie avec Engel. Lie déplorait régulièrement dans ses articles son manque de maîtrise de l'allemand et de certaines subtilités de la rigueur moderne ; solidement formé à Leipzig et Berlin, Engel l'appuie sur les deux plans. Présentons trois aspects de cette mise en forme de la théorie générale de Lie, l'ordre d'apparition dans le traité s'accompagnant d'un degré *décroissant* d'explicitation du rapport au lieu.

Au premier niveau, on trouve des aspects quasiment spécifiques aux deux premiers chapitres du traité (sur vingt-neuf), et un aspect dont la particularité est marquée par un artifice typographique. Nos auteurs l'annoncent ainsi à la fin de la préface :

> Pour fonder la théorie de manière plus rigoureuse, une série de développements est nécessaire qu'il est préférable de sauter en première lecture ; ils sont distingués par de plus petits caractères. [Lie 1888 VIII] [29]

Ces deux strates de textes, distinguées typographiquement, sont aussi nettement distinguables quant au contenu : en caractères normaux on trouve des raisonnements de même nature que ceux de 1880, enchaînant calculs et hypothèses de position générale ; en petits caractères on trouve *systématiquement* [30] la discussion des domaines et régions associés aux relations établies formellement. Donnons les exemples les plus importants de ces passages en petits caractères. Premièrement, après la définition des groupes de transformations par $x_i = f(x_1,..,x_n,a_1,\dots,a_r)$ (i = 1,..,n) (on abrégera, comme Lie, en écrivant $x' = f(x,a)$) :

> Comme les f_i sont des fonctions analytiques de leurs arguments, on peut choisir dans le domaine de tous les systèmes de valeurs [*in dem Gebiete aller Werthsysteme*] $x_1,\dots,x_n$ et dans le domaine de tous les systèmes de valeurs $a_1,\dots,a_r$ une région [*Bereich*] (x), respectivement (a), de tel sorte qu'on ait ce qui suit :
>
> Premièrement. Les $f_i(x,a)$ sont des fonctions univoques des $n+r$ variables $x_1,\dots,x_n$, $a_1,\dots, a_r$ dans toute l'étendue [*in der ganzen Ausdehnung*] des deux régions (x) et (a).
>
> Deuxièmement. Les $f_i(x,a)$ se comportent de manière analytique au voisinage [*in der Umgebung*] de chaque système de valeurs $x_1°,\dots,x_n°$, $a_1°,\dots, a_r°$, et sont donc développables en séries de puissances ordinaires de $x_1-x_1°, \dots, x_n-x_n°$, $a_1-a_1°,\dots, a_r-a_r°$ dès que $x_1°,\dots,x_n°$ se trouve, quelconque, dans le domaine[31] (x) et $a_1°,\dots, a_r°$ quelconque dans le domaine (a).
>
> Troisièmement. Le déterminant fonctionnel
>
> $$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$
>
> ne s'annule pour aucune combinaison de systèmes de valeurs de x (resp. a) dans les régions (x) et (a).
>
> Quatrièmement. Si dans les équations $x_i' = f_i(x,a)$ l'on attribue aux paramètres a_k de quelconques valeurs $a_k°$ dans le domaine (a), alors les équations
>
> $$x_i' = f_i(x_1,\dots,x_n,a_1°,\dots,a_r°) \quad (i = 1,\dots,n)$$

[29] „*Zu einer strengen Begründung der Theorie sind eine Reihe von Entwicklungen erforderlich, welche beim erstmaligen Lesen am besten übergangen werden; sie sind daher durch kleineren Druck gekennzeichnet.*“

[30] Sauf en une occasion, où la digression en petits caractères concerne une méthode algorithmique [Lie 1888 13].

[31] On notera que Lie et Engel utilisent ici *indifféremment* les termes *Gebiet* (que nous traduisons ici par domaine) et *Bereich* (traduit ici par région).

donnent toujours, pour deux systèmes de valeurs différents $x_1,\dots,x_n$ de la région (x), deux systèmes de valeurs différents $x_1',\dots,x_n'$.

Supposons que les régions (x) et (a) soient choisies de telle sorte que toutes ces conditions soient remplies. Si alors, dans l'équation $x_i' = f_i(x,a)$, nous donnons aux variables x_i toutes les valeurs possibles dans (x) et aux paramètres a_i toutes les valeurs possibles dans (a), alors les x_i' parcourent [*durchlaufen*] dans leur domaine une certaine région, que nous pouvons désigner symboliquement par $x' = f((x)(a))$. Cette nouvelle région a les propriétés suivantes :

Premièrement. Soit $a_1°,\dots, a_r°$ un quelconque système de valeurs de (a) et $x_1'°,\dots,x_n'°$ un quelconque système de valeurs de la sous-région [*Unterbereich*] $x' = f((x)a°)$, les $x_1,\dots,x_n$ sont développables, au voisinage des systèmes de valeurs $x_i'°$, $a_k°$ en séries de puissances ordinaires de $x_1'-x_1'°, \dots, x_n'-x_n'°, a_1-a_1°,\dots, a_r-a_r°$

Deuxièmement. Si l'on attribue aux a_k une valeur fixée $a_k°$ dans (a), alors, dans les équations

$$x_i' = f_i(x_1,\dots,x_n,a_1°,\dots,a_r°) \quad (i = 1,\dots,n)$$

les grandeurs $x_1,\dots,x_n$ sont des fonctions univoques de $x_1',\dots,x_n'$ qui se comportent régulièrement dans toute l'étendue de la région $x' = f((x)a°)$. [Lie 1888 14] [32]

On voit que ce passage est le strict développement de celui *déjà présent* dans le texte de 1880 ; les remarques sur les domaines d'analyticité, d'univocité et la contrainte relative à la composabilité étaient alors rapides et marginales dans l'économie du texte. On est ici moins rapide, il reste à déterminer si le passage est marginal ou, au contraire, révélateur d'une réécriture systématique en termes de domaines de validité. Le passage est ici un peu long,

[32] „*Da die f_i analytische Funktionen ihrer Argumente sind, so können uns in dem Gebiete aller Werthsysteme $x_1\dots x_n$ und in dem Gebiete aller Werthsysteme $a_1\dots a_r$ je einen Bereich (x) bezüglich (a) derart auswählen, dass folgendes stattfindet : Erstens. Die $f_i(x,a)$ sind in der ganzen Ausdehnung der beiden Bereiche (x) und (a) eindeutige Funktionen der n+r Veränderlichen $x_1\dots x_n$, $a_1\dots a_r$. Zweitens. Die $f_i(x,a)$ verhalten sich in der Umgebung jedes Werthsystems $x_1°\dots x_n° a_1°\dots a_r°$ regulär, sind also in gewöhnliche Potenzreihen von $x_1-x_1°,\dots, x_n-x_n°, a_1-a_1°\dots,a_r-a_r°$ entwickelbar, sobald $x_1°\dots x_n°$ beliebig im Gebiete (x), $a_1°,\dots,a_r°$ beliebig im Gebiete (a) liegt. Drittens. Die Functionaldeterminante (…) verschwindet für keine Combination von Werthsystemen von x_i bezüglich a_k der beiden Bereiche (x) und (a). Viertens. Ertheilt man in den Gleichungen $x_i' = f_i(x,a)$ den Parametern a_k irgend welche Werthe $a_k°$ im Gebiete (a), so liefern die Gleichungen (….) zu zwei verschiedenen Werthsystemen $x_1\dots x_n$ des Bereiches (x) auch stets zwei verschiedene Werthsysteme $x_1'\dots x_n'$.*

Setzen wir voraus, dass die Bereiche (x) und (a) so gewählt sind, dass alle diese vier Bedingungen erfüllt sind. Ertheilen wir dann in den Gleichungen $x_i'=f_i(x,a)$ den Veränderlichen x_i alle möglichen Werthe in (x) und den Parametern a_k alle möglichen Werthe in (a), so durchlaufen die x_i' in ihrem Gebiete einen gewissen Bereich, den wir symbolisch durch die Gleichung $x'=f((x),(a))$ bezeichnen können. Dieser neue Bereich hat folgenden eigenschaften : Erstens. Is $a_1°\dots a_r°$ irgend ein Werthsystem von (a) und $x_1'°\dots x_n'°$ irgend ein Werthsystem des Unterbereiches $x'=f((x),a°)$, so lassen sich $x_1\dots x_n$ in der Umgebung des Werthsystems $s_i'°$, $a_k°$ in gewöhnliche Potenzreihen von $x_1'-x_1'°,\dots,x_n'-x_n'°, a_1-a_1°\dots,a_r-a_r°$ entwickeln. Zweitens. Ertheilt man den a_k feste Werthe $a_k°$ im Bereiche (a), so werden in den Gleichungen (…) die Grössen $x_1\dots x_n$ eindeutige Functionen von $x_1'\dots x_n'$ die sich in der ganzen Ausdehnung des Bereiches $x'=f((x)a°)$ regulär verhalten.“

mais le facteur d'agrandissement depuis le bref passage de 1880 est à peu près le même que celui que subit tout le texte : les bases de la théorie étaient exposées en 1880 en une dizaine de pages, il en faut environ 150 dans le *Traité* (si l'on prend comme point d'arrivée l'établissement des relations $(X_iX_k) = \Sigma c_{ijk}X_j)$; les considérations sur les contraintes de domaines implicitement contenues dans la définition par des formules de la notion de groupe de transformation est donc de poids relatif constant. Quant au contenu du passage, deux points méritent d'être notés. Premièrement, on y retrouve les notations weierstrassiennes, dans l'aller-retour entre des grandeurs variables x, a et des régions (vraisemblablement délimitées) dans lesquelles on considère leur variation, (x), (a). Deuxièmement, on observe le même mouvement que dans le passage de 1880, ici en plus contrasté encore. Le début du passage fait apparaître grâce aux conditions d'analyticité deux domaines, qu'on semble pouvoir fixer une fois pour toute. Le caractère apparemment non local du travail est renforcé par l'apparition de la quatrième condition – sans équivalent, elle, en 1880 – demandant l'injectivité de toutes les transformations (dont les paramètres sont dans (a)) sur tout (x) ; Lie en Engel prennent acte du caractère non local de l'injectivité dans tout un domaine, et le distinguent clairement de l'hypothèse d'inversibilité locale garantie par la non annulation du déterminant jacobien – fut-elle exigée dans tout (x). Dans un second temps, toutefois, la contrainte de composabilité fait apparaître une restriction à un sous-domaine :

> Il ne nous est par conséquent permis d'introduire les expressions $x_\nu' = f_\nu((x),(a))$ dans les équations $x_i'' = f_i((x'),(b))$ que lorsque le système de valeurs $x_1',\ldots,x_n'$ se trouve dans la région (x). Nous nous voyons dans l'obligation d'ajouter l'hypothèse suivante aux demandes données jusqu'ici : il doit être possible, dans les régions (x) et (a), de spécifier une sous-région $((x))$ (resp. $((a))$) telle que les x_i' demeurent toujours dans la région (x) lorsque les x_i parcourent librement $((x))$ et les a_k $((a))$; nous l'exprimons brièvement comme ceci : le domaine $x' = f(((x))((a)))$ doit tomber entièrement dans la région (x). [Lie 1888 15][33]

Une dernière écriture appelle ensuite l'explicitation d'une dernière condition en termes de domaines : si, pour des systèmes a et b de paramètres, on désigne par c le système correspondant à la transformation composée, on peut noter $c = \varphi(a,b)$, écriture dans laquelle ne figurent plus les variables x :

[33] *„Folglich ist es uns nur dann erlaubt, die Ausdrücke $x_\nu' = f_\nu(x,a)$ in die Gleichungen $x_i'' = f_i(x',b)$ einzusetzen, wenn das Werthsystem $x_1'\ldots x_n'$ in dem Bereiche (x) liegt. Wir sehen uns deshalb genöthigt, zu den bisher getroffenden Festzetzungen über die Bereiche (x) und (a) noch die folgende Annahme hinzuzufügen : es soll möglich sein, innerhalb der Bereiche (x) und (a) je einen Unterbereich ((x)) und ((a)) von solcher Beschaffenheit*

Nous pouvons et voulons supposer que la région ((*a*)) est choisie de sorte que toutes les $\varphi_k(a,b)$ s'y comportent régulièrement lorsque *a* comme *b* parcourent librement ((*a*)). Nous devons encore prendre en considération le fait que dans les équations

$$x_i'' = f_i(x',b) = f_i(x,c)$$

les *c* peuvent sortir de la région (*a*). Nous devons encore sur ce point expliciter l'hypothèse additionnelle : le système de valeurs $c_k = \varphi_k(a,b)$ doit toujours tomber dans la région (*a*) pour peu que les *a* et les *b* se trouvent dans la région ((*a*)). [Lie 1888 17][34]

Après ces explicitations des définitions, on trouve aussi des passages en petits caractères destinés à des précisions plus ponctuelles. Le balancement entre le style de 1880 et le style weierstrassien « rigoureux » est ainsi frappant page 19. En utilisant des substitutions formelles et des identifications de coefficients dans des développements en série on obtient des équations $c = \varphi(a,b)$ dont la « forme » (*die Form der Gleichungen*) justifie la résolubilité en *a* ou en *b*, *donc* que des déterminants jacobiens ne s'annulent pas *identiquement* (Théorème 1) ; l'énoncé – en caractère normaux – du théorème est suivi – en petits caractères – de :

On peut supposer la région ((*a*)) choisie telle que le déterminant fonctionnel des deux n'est jamais nul, si *a* tout comme *b* parcourent ((*a*)). [Lie 1888 19] [35]

Il ne s'agit plus ici d'une distinction entre inversion locale et globale dans un domaine donné à un moment du raisonnement. Il s'agit de passer de la non annulation identique à la non annulation simple, donc d'une exclusion des points où le comportement des fonctions n'est pas le comportement général. Les petits caractères précisent aussi la notion de changement de variables et de paramètres :

Nous avons ci-dessus parlé de l'introduction de nouveaux paramètres et de nouvelles variables, sans aborder les hypothèses sous lesquelles nous pouvons affirmer que toutes les propriétés pour nous essentielles du système d'équations $x_i' = f_i(x,a)$ sont conservées. Encore quelques mots sur ce points.

---

anzugeben, dass die x_i' immer im Bereiche bleiben, wenn die x_i beliebig in ((x)), die a_k beliebig in ((a)) laufen; wir drücken dies kurz so aus : es soll der Bereich x'=f(((x))((a))) ganz in den Bereich (x) hineinfallen."

34 „ *Wir können und wollen annehmen, dass der Bereich ((a)) so gewählt ist, dass alle $\varphi_k(a,b)$ sich regulär verhalten, wenn die a sowohl als die b ganz beliebig in ((a)) laufen. Ausserdem müssen wir aber noch darauf Rücksicht nehmen, dass in den Gleichungen $x_i''=f_i(x',b)=f_i(x,c)$ die c den Bereich (a) nicht verlassen dürfen. Daher werden wir noch ausdrücklich die besondere Voraussetzung machen : es soll das Werthsystem $x_k = \varphi_k(a,b)$ stets in den Bereich (a) fallen, sobald die a und die b in dem Bereiche ((a)) liegen.*"

35 „ *Wir wollen uns der Bereich ((a)) so gewählt werden denken, dass die erwähnten Functionaldeterminanten beide stets von Null verschieden sind, wenn sowohl die a als die b beliebig in ((a)) laufen.*"

Pour qu'il soit permis d'introduire dans le groupe $x_i^{'} = f_i(x_1...x_n, a_1...a_r)$ de nouveaux paramètres $\overline{a_k} = \beta_k(a_1,...,a_r)$ à la place des *a*, les $\overline{a_k}$ doivent être des fonctions univoques des *a* dans la totalité de la région (*a*) définie plus haut, et s'y comporter aussi de manière régulière ; le déterminant fonctionnel $\sum \pm \frac{\partial\beta_1}{\partial a_1} ... \frac{\partial\beta_r}{\partial a_r}$ ne doit jamais s'annuler dans la région (*a*), et, enfin, à deux systèmes de valeurs différents $a_1,\ldots,a_r$ de cette région correspondent toujours deux systèmes de valeurs différents $\overline{a_1},\ldots,\overline{a_r}$. En d'autres termes : on doit pouvoir délimiter dans le domaine des $\overline{a_k}$ une région $(\overline{a})$ sur les systèmes de laquelle les systèmes de valeurs de la région (*a*) sont appliqués bi-univoquement par les équations $\overline{a_k} = \beta_k(a_1,...,a_r)$. [Lie 1888 24][36]

Cet aspect était passé entièrement sous silence en 1880, mais il ne s'agit que d'un contrecoup de l'explicitation des demandes relatives au groupe ; l'exigence non-locale d'injectivité conduit à expliciter des conditions non-locales sur les changements de variables ou de paramètres. Nos auteurs précisent que sans ces conditions sur les changements de variables, on pourrait perdre certaines propriétés essentielles d'un groupe, par exemple en transformant un groupe possédant la transformation identique en un groupe ne la possédant pas. Le caractère non-local de ces réflexions est souligné, par contraste, par la précision qu'on trouve quelques lignes plus loin :

Dans certains cas il arrive qu'on ait à étudier la famille des transformations $x_i' = f_i(x,a)$ au voisinage [*in der Umgebung*] d'un seul point $a_1,\ldots, a_r$ ou $x_1,\ldots,x_n$. Cette étude sera souvent simplifiée par l'introduction de nouvelles variables ou de nouveaux paramètres satisfaisant à ces conditions au voisinage du point en question.

Dans un tel cas il n'est absolument pas nécessaire de s'occuper de savoir si ces conditions sont remplies dans toute l'étendue de (*x*) (resp. (*a*)). [Lie 1888 25][37]

---

[36] „ *Wir haben oben von Einführung neuer Parameter und neuer Veränderlicher gesprochen, ohne auf die Voraussetzungen einzugehen, unter denen wir behaupten können, dass hierbei alle für uns wesentlichen Eigenschaften des Gleichungssystems $x_i'=f_i(x,a)$ bewahrt bleiben. Ueber diesen Punkt jetzt noch einige Worte. Soll es erlaubt sein, in die Gruppe $x_i' = f_i(x_1...x_n,a_1...a_r)$ an Stelle der a die neuen Paramater (...) einzuführen, so müssen die $\overline{a_k}$ in dem ganzen früher definirten Bereich (a) eindeutige Functionen der a sein und sich daselbst überall regulär verhalten; die Functionaldeterminante (...) darf in dem Bereich (a) nirgends verschwinden, und endlich müssen zu zwei verschiedenen Werthsystemen $a_1...a_r$ dieses Bereiches auch stets zwei verschiedene Werthsysteme $\overline{a_1},...,\overline{a_r}$ gehören. Mit anderen Worten : es muss sich im Gebiete der $\overline{a_k}$ ein Bereich $(\overline{a})$ abgränzen lassen, auf dessen Werthsysteme die Werthsysteme des Bereiches (a) durch die Gleichungen (...) ein-eindeutig abgebildet werden.*"

[37] „ *Unter Umständen kommt es jedoch blos darauf an, die Schaar der Transformationen $x_i'=f(x,a)$ in der Umgebung einer einzelnen Stelle $a_1...a_r$ oder $x_1...x_n$ zu untersuchen. Diese Untersuchung wird oft dadurch*

La notion d'étude locale est clairement distinguée de ce qui précède. Ce souci de distinguer, dans les fondements de la théorie, des conditions non locales par rapport à de simples propriétés locales ne conduit pas nos auteurs à développer une théorie globale de leurs objets. Le fait que chaque transformation agit sur un domaine maximal qui peut lui être propre – ces considérations de domaine maximal interviennent aussi, par exemple au §8 – et l'applique sur un domaine spécifique interdit toute théorie globale, au sens que ce terme prendra dans les années 1925-1930. Ce paragraphe 8 est atypique pour son interrogation sur le prolongement des fonctions dont on s'assurait jusqu'ici que, quitte à ne les considérer que sur de plus petits domaines, elles possèdent de bonnes propriétés ; il nous livre quelques clés sur les conceptions du global chez Lie et Engel. Après avoir établi la prolongeabilité des fonctions apparaissant dans les équations de définition au delà des domaines (x), (a) (ou ((x)), ((a))), et avoir souligné que les relations vérifiées dans ces domaines demeurent du fait de l'analyticité des fonctions considérées, ils font remarquer qu'on ne peut par contre pas être certain que le prolongement ne fait pas apparaître des points où le comportement n'est pas général, i.e. des points où certains déterminants s'annulent. Le prolongement des relations permet d'asseoir l'idée qu'un groupe est entièrement déterminé dès qu'on le connaît dans un certain domaine, il est donc raisonnable d'exiger l'existence d'au moins un domaine sur lequel de bonnes propriétés sont vérifiées ; se hausser au niveau de la rigueur moderne – du moins dans les pages d'ouverture – coûte finalement peu, puisqu'il s'agit d'expliciter l'existence de domaines où le comportement est général – en un sens d'ailleurs non exclusivement local, comme le montre la condition d'injectivité. La présence d'énoncés non locaux dans cette phase de fondement d'une théorie locale résulte aussi du mode de saisie des objets mathématiques par des équations : l'objet commenté en termes de domaines n'est pas la situation dynamique de composition indéfinie des transformations mais l'objet statique qu'est une équation. Pour chaque équation importante de la théorie – $x' = f(x,a)$ définissant le groupe, $x'' = f(f(x,a),b) = f(x,c)$ caractérisant la stabilité par composition, les équations reliant de nouvelles variables (ou de nouveaux paramètres) aux anciens – des domaines sont associés sur lesquels des propriétés raisonnables et non locales d'injectivité sont demandées. Cette lecture statique semble exhiber des domaines privilégiés : au moins quelque part, les groupes de transformation possèdent les mêmes traits que leurs cousins finis, les « groupes de

---

erleichtert, dass man neue Veränderliche oder neue Parameter einführt, welche in der Umgebung der betreffenden Stelle *die früher gennanten Forderungen erfüllen. In einem solchen Falle braucht man daher gar nicht auf die Frage einzugehen, ob die betreffenden Forderungen in der ganzen Ausdehnung der Bereiche (x) bezüglich (a) erfüllt sind.*"

substitutions », et le souci de « fonder rigoureusement » une théorie non globale passe par des énoncés syntaxiquement globaux et explicitement distingués des énoncés locaux.

On ne trouve plus guère de ces passages en petits caractères au delà du second chapitre, et les contraintes d'injectivité (au moins dans un domaine assignable) n'interviennent plus. Une forme d'attention subsiste toutefois, qui marque aussi un changement par rapport à la rédaction de 1880 : dans un grand nombre d'énoncés, le caractère local est explicité ; donnons-en quelques exemples. Dans l'étude des groupes à un paramètres, on trouve un cas où le caractère local est explicite dans la démonstration mais plus discret dans l'énoncé. Après avoir établi qu'on peut se restreindre à un voisinage de $t = 0$ sur lequel le changement de paramètre est régulièrement inversible, nos auteurs énoncent :

> Théorème 6. Si un groupe d'ordre 1
>
> $$x_i' = f_i(x_1,\dots,x_n, a) \qquad (i = 1\dots n)$$
>
> contient la transformation identique, alors ses transformations sont permutables et se regroupent en paires d'inverses. Chaque groupe à un paramètre de ce type est semblable à un groupe de translations
>
> $$y_1' = y_1\ ,\ \dots,\ y'_{n-1} = y_{n-1}\ ,\ y_n' = y_n + t.$$ [Lie 1888 49][38]

Le caractère local de la notion de groupes semblables est ici confirmé. Dans le paragraphe suivant, toujours consacré aux groupes à un paramètre, c'est dans l'énoncé du théorème que le caractère local est marqué ; l'énoncé peut sembler inutilement contourné, mais il est destiné à englober le cas où le groupe ne contient pas l'identité :

> Théorème 7. A chaque groupe d'ordre 1
>
> $$x_i' = f_i(x_1,\dots,x_n, a) \qquad (i = 1\dots n)$$
>
> appartient une transformation infinitésimale bien déterminée[39]
>
> $$x_i' = x_i + \xi_i(x_1,\dots,x_n) \quad (i = 1\dots n) \qquad \text{ou} \qquad X(f) = \sum_1^n {}^i\ \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
>
> ayant la propriété suivante : soit $\overline{x}_i = f_i(x_1,\dots,x_n, \overline{a})$ une quelconque transformation du groupe d'ordre 1, alors toute transformation $x_i' = f_i(x_1,\dots,x_n, a)$ dont le paramètre a se trouve dans un certain voisinage de $\overline{a}$ peut être obtenue en réalisant d'abord la transformation
>
> $$\overline{x}_i = f_i(x_1,\dots,x_n, \overline{a}) \qquad (i = 1\dots n)$$

[38] „ *Theorem 6. Enthält eine eingliedrige Gruppe (...) die identische Transformation, so sind ihre Transforationen unter einander vertauschbar und ordnen sich paarweise als inverse zusammen. Jede eingliedrige Gruppe dieser Art ist mit einer Gruppe von Translationen (...) ähnlich.*“

et ensuite une transformation particulière

$$x_i' = \bar{x}_i + \frac{t}{1}\,\xi_i(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) + \ldots \quad (i = 1\ldots n)$$

du groupe engendré par la transformation infinitésimale X(*f*). [Lie 1888 55] [40]

Il s'agit donc du caractère local de la représentation exponentielle des transformations finies d'un groupe à un paramètre. On trouve quelques pages plus loin l'analogue sur « l'engendrement » d'un groupe d'ordre *r* par les groupes à 1 paramètre associés aux transformations infinitésimales [Lie 1888 72] ; rappelons que l'énoncé équivalent de 1880 était implicitement local. Un dernier exemple d'énoncé explicitement local montre aussi une forme ambiguë d'explicitation. Au début du chapitre 5, Lie et Engel rappellent les principaux énoncés de la théorie des systèmes complets d'équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre ; ce rapide rappel d'Analyse pure ne contenait aucune allusion au caractère local des énoncés. Vient ensuite le paragraphe 24, dans lequel nos auteurs disent que l'existence des solutions (et le nombre de solutions indépendantes) ne leur suffit pas, et qu'ils ont aussi besoin d'étudier la nature analytique des fonctions obtenues. Le théorème 12 établit alors que ces fonctions sont régulières dans un certain voisinage d'un point en position générale [Lie 1888 91]. On demeure finalement dans une perspective classique, dans laquelle la notion de fonction n'est pas liée à des domaines et seuls les problèmes d'analyticité en un point font apparaître le terme de « voisinage » : c'était déjà le cas chez Lie en 1880.

On voit qu'à mesure que l'on avance dans le traité, non seulement les passages en petits caractères disparaissent – et avec eux les longues discussions de domaines associés – mais l'évocation explicite du caractère local des résultats retrouve sa stricte association aux questions relatives au développement en série de puissances (non nullité du rayon de convergence, absence de termes d'exposant négatif ou fractionnaire, discussion selon l'ordre d'annulation etc.). Nous en arrivons à la troisième forme d'attention au lieu : l'absence d'attention explicite, l'énoncé de résultats locaux dans lesquels aucune mention de « sur un voisinage » n'apparaît. Le cas est particulièrement frappant dans le théorème d'engendrement d'un groupe d'ordre *r* par l'exponentielle[41] de ses transformations infinitésimales : deux pages

---

[39] On retrouve ici la conception projective, sans quoi la transformation infinitésimale n'est pas « bien déterminée ».

[40] „ *Theorem 7. Zu jeder eingliedrigen Gruppe (...) gehört eine ganz bestimmte infinitesimale Transformation (...) von der folgenden Beschaffenheit : ist (..) irgend eine Transformation der eingliedrigen Gruppe, so kann jede Transformation (...), deren parameter a in einer gewissen Umgebung von* $\bar{a}$ *liegt, dadurch erhalten werden, dass man zuerst die Transformation (...) ausführt und nachher eine geeignete Transformation (...) der von X(f) erzeugten eingliedrigen Gruppe.*"

[41] Le terme n'est pas chez Lie, il ne donne pas de nom à l'opérateur différentiel définit par $\Sigma\, X^n/n\,!$, où X est une transformation infinitésimale (vu comme opérateur) et X^n désigne l'opérateur itéré.

après l'énoncé explicitement local du théorème 11, quasiment le même théorème est reformulé (dans le cas, plus simple, des groupes contenant la transformation identité) en disant que l'ensemble (*Inbegriff*) des transformations données par l'exponentielle « est identique à l'ensemble de toutes les transformations du groupe (…) » [Lie 1888 75][42]. On trouvait certes le même énoncé en 1880, mais l'écriture universellement et implicitement locale en rendait alors la lecture moins ambiguë ! C'est bien aussi une lecture locale qui permet de prendre la juste portée du théorème fondamental (et d'énoncé implicitement local) selon lequel si le **C**-espace vectoriel (en termes anachroniques) engendré par r transformations infinitésimales indépendantes est stable pour le crochet, alors ces transformations sont celles d'un groupe d'ordre r (théorème 24 [Lie 1888 158]). Donnons un dernier cas important où un résultat local est énoncé d'une manière qui semble globale. A côté de la notion de groupes semblables, Lie a introduit la notion de groupes « de même structure » (*gleichzusammengesetzt*) : en termes anachroniques, il s'agit de groupes dont les algèbres de Lie sont isomorphes ; en termes plus proches de ceux de Lie, il s'agit de groupes (agissant éventuellement sur des espaces de dimensions différentes) tels qu'un changement de paramètre permet de faire apparaître le même système de constantes de structure dans les expressions des crochets des transformations infinitésimales de base. Le théorème 75 affirme qu'on peut alors bien remontrer à l'isomorphisme des groupes de transformations finies :

> Théorème 75. Deux groupes d'ordre r sont de même structure si et seulement si il est possible d'associer de manière inversiblement univoque les transformations de l'un aux transformations de l'autre de telle manière que si l'on réalise l'une après l'autre deux transformations de l'un des groupes, et dans l'autre groupe les transformations correspondantes dans le même ordre, alors la transformation que l'on obtient dans le premier groupe correspond à celle que l'on obtient dans le deuxième groupe. [Lie 1888 418][43]

La bijectivité (inversible univocité) est soulignée quelques lignes plus loin et rapprochée de la notion d'«isomorphisme holoédrique » de la théorie des groupes finis **[1888 p.419]**.

[42] „*ist identisch mit dem Inbegriff aller Transformationen der Gruppe* (…)“

[43] „ *Theorem 75. Zwei r-gliedrige Gruppen sind dann und nur dann gleichzusammengesetzt, wenn es möglich ist, die Transformationen der einen derart eindeutig umkehrbar auf die Transformationen der anderen zu beziehen, dass Folgendes stattfindet : Führt man in der einen Gruppe zwei Transformationen nach einander aus und führt man in der andern Gruppe die entsprechenden Transformationen in derselben Reihenfolge nach einander aus, so entspricht die Transformation, welche man in der einen Gruppe erhält, derjenigen Transformation, welche man in der andern Gruppe erhält.*“

Sur le fond, c'est bien la même théorie locale que l'on trouve en 1880 et en 1888, qui repose sur des résultats locaux d'Analyse et établit des résultats locaux, sous des hypothèses de position générale[44]. Mais le souci d'une écriture plus rigoureuse – du moins pour une première partie consacrée à la mise en place des notions – conduit à un entrelacement de styles susceptible de troubler un lecteur. Ainsi, une brève remarque de 1880 sur une contrainte de domaine associée à la condition de stabilité par composition donne lieu à de longs développements (en petits caractères) en 1888, dans un style emprunté à Weierstrass et à ses élèves. On pourrait aussi signaler que la distinction faite en fin d'introduction entre groupes continus (i.e. connexes) et groupes mixtes (formés de plusieurs composantes connexes, l'exemple donné étant celui des transformations linéaires transformant les repères orthonormaux en repères orthonormaux) pourrait orienter le lecteur vers une lecture globale. Quant à l'explicitation du caractère local des énoncés, elle est d'autant plus ambiguë qu'elle est fluctuante. L'allure globale de certains énoncés fondamentaux est en partie compréhensible lorsqu'on garde à l'esprit un trait fondamental du dispositif théorique : les groupes ne sont pas donnés comme des ensembles munis de structures mais comme des équations (entre grandeurs indéterminées, mais en nombre minimal) vérifiant certaines propriétés formelles. Cette même perspective invite à des explicitations syntaxiquement globales lorsqu'il s'agit de préciser comment associer des domaines à ces équations, et à considérer que – par unicité du prolongement analytique – le travail dans un quelconque ouvert où de bonnes propriétés sont vérifiées (et des « demandes » garantissent l'existence d'un tel ouvert) enseigne tout ce qu'il y a à savoir.

3. Lectures de Lie.

i. Dispositif théorique et horizon théorique.

Si l'on peut tenter de reconstituer une cohérence sous-jacente à cet entrelacement de styles, on peut aussi se demander comment il a été reçu par les lecteurs de Lie et Engel. Notons tout d'abord que les premiers surpris sont parfois les auteurs eux-mêmes. Nous nous appuyons ici entièrement sur le travail de Thomas Hawkins utilisant les archives d'Engel [Hawkins 2000 86] : lorsque Engel se rend compte que toute transformation de **SL**(2,**C**) n'est pas « engendrée » par une transformation infinitésimale, il fait part de son étonnement à Study,

[44] C'est par exemple une lecture parfaitement locale des théorèmes fondamentaux de la théorie de Lie que fait Poincaré, par exemple en 1899 dans le cas du troisième théorème fondamental. [Poincaré 1899a].

qui répond à son camarade qu'il a toujours trouvé ce résultat « *wunderbar* » ; Study va jusqu'à suggérer à Engel de publier quelque chose sur ce « paradoxe » dans la théorie de Lie. Après cet échange épistolaire de 1890, Engel préfère publier des résultats établissant l'engendrement de toutes les transformations pour certains groupes linéaires importants.

La question réapparaît quelques années plus tard dans un contexte plus polémique qui pousse Engel a expliciter certains points. A la suite d'un travail de H. Taber sur la question des transformations singulières, son étudiant S.E. Slocum fait une thèse sur le « théorème fondamental de la théorie de Lie », i.e. l'existence d'un groupe associé à toute algèbre de Lie de champs de vecteurs. Intéressons-nous aux notes qu'Engel publie en 1900 sur les travaux de ces deux auteurs dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* [Engel 1900]. Les remarques de Slocum sont traitées avec dédain :

> Ces considérations sont certes instructives pour un débutant ; mais elles n'ont rien à voir avec la soi-disant erreur de Lie, car Lie n'a jamais affirmé autre chose que : pour un groupe $x_i' = f_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_r)$ à r paramètres contenant la transformation identique et des transformations inverses par paires, la forme canonique associée
>
> $$x_i' = x_i + \sum_k^{1\ldots n} e_k \xi_{ki} + \ldots \qquad (i = 1,\ldots,n)$$
>
> représente les transformations se trouvant dans un certain voisinage de l'identité. Il ne lui est jamais venu à l'esprit d'affirmer que, par la forme canonique, chaque transformation du groupe est engendrée par une transformation infinitésimale, et reprocher à Lie une telle chose, comme le fait l'auteur, reviendrait à l'accuser de ne pas avoir conscience de ce que le développement en série de la représentation canonique ne converge en général que dans un certain voisinage de la transformation identique, ce que personne n'ose sérieusement affirmer. [Engel 1900 149] [45]

Engel souligne plus loin :

> (…) que toutes les propositions groupe-théoriques générales de Lie sont bien évidemment [*selbstverständlich*] conçues comme n'étant valides que dans certaines régions, à savoir dans un certain voisinage d'un point de l'espace considéré, et pour les

[45] „ *Diese Betrachtungen sind ja für einen Anfänger ganz lehrreich; aber mit dem angeblichen Irrtume Lie's haben sie nichts zu thun; denn Lie hat nie etwas anderes behauptet, als dass bei einer r-gliedrigen Gruppe (...), die die indentische Transformation und lauter paarweise inverse Transformationen enthält, die zugehörige kanonische Form (...) alle Transformationen der Gruppe darstellt, die in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation liegen. Es ist ihm nie eingefallen, zu behaupten, aus der kanonische Form gehe hervor, dass jede Transformation der Gruppe von einer infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt sei, und ihm so etwas vorzuwerfen, wie es der Verf. thut, käme darauf hinaus, Lie zu beschuldigen, er habe nicht gewusst, dass die Reihenentwicklungen in der kanonischen Darstellung im allgemeinen nur in einer gewissen*

transformations du groupe considéré dont les paramètres se trouvent dans un certain voisinage de la transformation identique. Il serait injuste d'exiger de Lie qu'il répète ces restrictions dans chaque proposition particulière. [Engel 1900 149] [46]

Engel trouve ici les mots pour exprimer de la manière la plus claire le caractère local de la théorie de Lie, mais des mots qu'on n'avait pas lu dans le traité dont il est question ! Quant à la défense du mode d'écriture de Lie, la multiplicité des arguments montre l'embarras d'un Engel qui n'est pas ici en train d'exposer les principes ayant consciemment guidé la rédaction, mais plutôt de formuler des hypothèses rétrospectives. Le premier argument est qu'il n'est pas nécessaire de préciser que tout ce qui dépend d'un développement en série est associé à un certain domaine (mais Lie et Engel sont parfois très explicite sur ce point) : il est attendu du lecteur qu'il puisse se les expliciter. Le deuxième argument utilise la notion d'énoncé « général » : la discussion des domaines de validité nécessiterait des distinctions propres à chaque cas particulier ; l'argument est détruit par le fait même que, dans la phrase précédente, Engel exprime le caractère local de manière générale. On a d'ailleurs vu que, en 1888, le caractère local pouvait être parfois explicité et parfois passé sous silence à deux pages d'intervalles, dans deux énoncés d'égale généralité. Le troisième argument est celui de l'inutile répétition. Il éclaire la progressive disparition de l'attention au lieu à mesure que l'on avance dans le Traité : les deux premiers chapitres n'ont rien épargné au lecteur des rigoureuses mais fastidieuses discussions en termes de domaines, il ne peut, sans mauvaise foi, ignorer ce cadre posé une fois pour toute.

Dans la première note qu'il consacre aux travaux de Taber sur les transformations singulières, Engel, moins polémique, donne deux autres arguments : après avoir rappelé que Lie n'a jamais envisagé autre chose que des énoncés valides localement, il concède qu'il n'a jamais abordé les difficultés relevant spécifiquement de la théorie des fonctions (« *die eigentlichen functionentheoretischen Schwierigkeiten* » [Engel 1900 150]),

(…) car il suppose toujours implicitement qu'on peut toujours trouver une représentation du groupe englobant réellement toutes les transformations et n'entre pas dans l'étude de la nature des fonctions ainsi rencontrées – dans leur dépendance envers les x –, probablement parce qu'il n'envisage [*im Auge hat*] que des groupes projectifs,

---

Umgebung der identischen Transformation convergiren, was doch niemand im Ernste zu behaupten wagen wird."

[46] „ (…) *dass alle allgemeinen gruppentheoretischen Sätze Lie's selbstverständlich so gemeint sind, dass sie nur innerhalb gewisser Bereiche gültig sind, nämlich in einer gewissen Umgebung einer Stelle des betrachteten Raumes und für solche Transformationen der betrachteten Gruppe, deren Parameter in einer gewissen Umgebung der identischen Transformationen liegen. Es wäre unbillig, von Lie zu verlangen, dass er diese Beschränkungen bei jedem einzelnen Satze wiederholen solle ;* "

ce qui n'est toutefois pas licite tant qu'il n'est pas démontré qu'il existe réellement un groupe projectif pour chaque structure quelconque. [Engel 1900 150][47]

Un premier argument associe donc représentation globale et singularités : Lie préfère une représentation analytique partielle mais n'utilisant que des fonctions ayant de bonnes propriétés de régularité (entre autres) ; c'est bien ce que nous lisions dans les deux premiers chapitres du Traité. Le deuxième argument, dont Engel reconnaît qu'il ne constitue qu'une conjecture de sa part, est d'une toute autre nature. Il n'est plus seulement question de malentendus possibles entre rédacteurs et lecteurs, des modes de lectures attendus et des conventions ayant présidé à la rédaction. S'il ne s'était agi que de cela, on ne comprendrait pas comment le rédacteur lui-même, en l'occurrence Engel, aurait pu être étonné du comportement « paradoxal » de $\mathbf{SL}(2,\mathbf{C})$! Les modes d'écriture ne sont plus seuls en jeu, l'*horizon* de la théorie l'est aussi, si nous entendons par là ce sur quoi les auteurs supposent (implicitement) qu'elle porte, ce qu'ils supposent (implicitement) qu'elle dit. Si nos auteurs pensaient que la théorie portait en fait sur des groupes linéaires, la nature locale de l'action dans l'espace des variables x n'était pas un aspect déterminant de la théorie ; signaler (parfois) le caractère local d'un énoncé n'avait pas pour rôle d'expliciter un trait fondamental de la théorie, mais relevait des contraintes d'écriture, ne serait-ce que de l'usage de séries entières. Rédiger un traité ou un article c'est se confronter à la tension entre ce qu'on pense que la théorie recouvre – l'horizon – et ce qu'on arrive à coucher dans un enchaînement de définitions et de propositions, dans le langage dans on dispose et selon le niveau de rigueur qu'on s'accorde. On peut ainsi peut-être comprendre l'explicitation fluctuante du caractère local des énoncés, en particulier sa disparition dans des énoncés centraux et « généraux » qui parlent un peu vite de l'ensemble (*Inbegriff*) de toutes les transformations : ces quelques énoncés éminents se haussent un peu au-dessus de ce que les enchaînements démonstratifs précis permettent d'énoncer ; en surplomb, ils doivent exprimer le contenu réel de la théorie et révèlent l'horizon théorique implicite des auteurs. Ce serait cacher la nature profonde des énoncés que de les encombrer de considérations techniques relatives à des voisinages. Là où un lecteur peut voir des ambiguïtés, des incohérences ou des sauts brusques dans le niveau de rigueur, on peut voir la rencontre entre un *dispositif théorique* local – que des éléments du langage weierstrassien permettent de coucher explicitement sur le papier, et un *horizon*

[47] „*denn er setzt immer stillschweigend voraus, dass man für die Gruppe eine Darstellung hat, die wirklich alle Transformationen der Gruppe umfasst, und auf die Beschaffenheit der auftretenden Functionen, soweit sie von den x abhängen, geht er gar nicht ein, vermutlich weil er immer nur projective Gruppen im Auge hat, was aber doch nicht zulässig ist, solange noch nicht bewiesen ist, dass es wirklich projective Gruppen von jeder beliebigen Zusammensetzung giebt.*"

théorique. Engel peut sans schizophrénie – mais peut-être pas sans mauvaise foi – écrire que Lie n'a jamais envisagé que des énoncés locaux, être lui-même surpris par le comportement de **SL**(2,**C**), et conjecturer que Lie raisonnait comme si tous les groupes étaient des groupes linéaires.

ii. Les « considérations critiques » de Study.

Engel ne peut plus le prendre d'aussi haut lorsque, quelques années plus tard (1908), une critique frontale et argumentée paraît sur le forum (publique s'il en est) du *Jahresbericht der D.M.-V.*; il ne s'agit plus de moucher un thésard américain, mais de subir les attaques d'Eduard Study (1862-1930), dans ses *Considérations critiques sur la théorie de Lie des invariants des groupes finis*[48] *continus*[49]. Ce texte est à la fois l'analyse détaillée d'une affirmation fausse trouvée dans l'ouvrage de Lie et Scheffers, une critique d'ensemble des modes de raisonnement et d'exposition de Lie, et une charge parfois acrimonieuse. Laissons rapidement de côté ce dernier aspect : Study dénonce un silence complaisant autour des erreurs de Lie, justifie son action par la nécessité de dénoncer un mal général et de rompre avec un culte de l'autorité et du héros [Study 1908 125-126] ; la rigueur conceptuelle est aussi une exigence politique. Study est souvent à deux doigts de taxer la théorie de Lie de vaste imposture (malgré quelques bonnes idées).

Sur le fond mathématique, Study commence par relever des erreurs dans la théorie des invariants des courbes analytiques de l'espace et il les attribue à une erreur fondamentale dans la démarche : Lie suppose qu'on peut toujours caractériser une courbe de ce type au moyen de deux équations différentielles.

> Les fondements de la démonstration de cette proposition, qui prend une place centrale dans la théorie de Lie, résident dans une sorte de dénombrement des constantes [*Konstantenabzählung*] que Lie utilise aussi ailleurs. Même pour des résultats exacts, nous ne reconnaîtrions à ce procédé aucune force de persuasion [*Überzeugungskraft*], car il fait regarder les prétendues équations surnuméraires comme superflues, alors tout simplement ignorées. Cela efface donc la différence fondamentale entre variétés analytiques et systèmes de telles variétés.
>
> Cette erreur est la même que celle que commettrait un mathématicien ayant obtenu une certaine courbe de l'espace comme intersection de trois surfaces (…) et qui voudrait

[48] « fini » signifie bien sûr : dépendant d'un nombre fini de paramètres. C'est la terminologie de Lie.

[49] *Kritische Betrachtungen über Lies Invariantentheorie der endlichen kontinuirlichen Gruppen*, [Study 1908].

> conclure, à partir des nombres de dimensions, que deux de ces surfaces suffiront à déterminer la courbe. [Study 1908 130] [50]

Toujours dans le cas des courbes, Study note que Lie prétend donner des systèmes complets d'invariants vis-à-vis, par exemple, du groupe des déplacements, mais deux problèmes se présentent. Premièrement, il ne peut savoir s'il définit des invariants du groupe continu (i.e. connexe) des déplacements ou des invariants du groupe mixte des déplacements et retournements [Study 1908 133]. Deuxièmement, il néglige la multivocité des invariants qu'il obtient, en choisissant arbitrairement une branche donnée par un développement en série entière ; il passe ainsi par exemple de la condition $r^2 = r'^2$ à $r = r'$ et énonce donc comme nécessaire à l'équivalence des courbes des égalités qui ne sont que suffisantes [Study 1908 135]. Après ces critiques circonstanciées des raisonnements par dénombrement et de l'oubli de la multivocité, Study aborde l'erreur fondamentale (*der Grundirrtum*) de Lie :

> Il faut tout d'abord rappeler que Lie a voulu exposer dans sa théorie générale des groupes finis et continus les propriétés qui leur sont communes à tous. Mais, par la nature même des choses, cela ne pouvait être obtenu qu'en acceptant de renoncer à embrasser tout l'espace à considérer et à prendre, en général, la totalité des transformations du groupe. [Study 1908 137] [51]

Cette théorie générale a permis de comprendre et de traiter ce qu'on n'avait jusque là rencontré que dans des exemples, mais il importe, nous dit Study, d'en bien comprendre la portée : au voisinage d'un point de l'espace et au voisinage de la transformation identique, on peut atteindre une certaine exhaustivité dans la formation des invariants, et l'on peut les développer en série ; et certes,

> (…) partout où une théorie complète des invariants d'un groupe particulier est à étudier, les invariants de Lie en constituent un élément essentiel.
>
> C'est une toute autre question de savoir si renvoyer nécessairement à la théorie de Lie constitue un chemin praticable, si dans les cas concrets il est faisable de commencer

[50] „*Die Beweisgründe aber für diesen Lehrsatz, der in Lies Theorie eine zentrale Stellung einnimmt, bestehen in einer Art von* Konstantenabzählung, *wie Lie sie auch sonst verwendet hat. Wir würden diesem Verfahren auch bei richtigem Ergebnis (*unter anderem*) deshalb keine Überzeugungskraft zuschreiben können, weil dabei gewisse sogenannte überzählige Gleichungen als* überflüssig *hingestellt und einfach weggelassen werden.* Es wird so der sehr ins Gewicht fallende Unterschied zwischen analytischen Mannigfaltigkeiten und Systemen von solchen verwischt. *Der Fehler ist derselbe, den ein Mathematiker begehen würde, der irgend eine Raumkurve als Schnitt von drei Flächen erhalten hat (...), und der nun aus den Dimensionenzahlen schließen wollte, daß schon zwei dieser Flächen zur Bestimmung der Kurve hinreichen werden.*"

[51] „*Hier dürfte nun zunächst daran zu erinnern sein, daß Lie in seiner allgemeinen Theorie der endlichen kontinuirlichen Gruppen die Eigenschaften entwickeln wollte, die allen diesen gemeinsam sind. Das aber konnte der Natur der Sache nach durchaus nur dann erzielt werden, wenn gleichzeitig darauf Verzicht geleistet wurde,*

par une théorie des invariants « *im kleinen* » pour ensuite la prolonger en une théorie des invariants « *im großen* ». [Study 1908 138][52]

Lors de la première apparition, « *im Kleinen* » et « *im Grossen* » sont entre guillemets, mais il apparaissent ensuite tels quels alors que, par un ironique jeu de bascule, ce sont les termes essentiels de la théorie de Lie qui sont peu à peu mis entre guillemets (tels « indépendants »). Ce passage du local au global semble à Study peu praticable :

> Il faudrait réussir rien moins que la juxtaposition les uns aux autres de tous ces voisinages de points déterminés jusqu'à remplir tout l'espace ; discuter pour chaque invariant les singularités qu'on ne peut naturellement manquer en rencontrer à mesure qu'on s'éloigne (…) [Study 1908 138][53]

C'est fondamentalement la multivocité globale des invariants qui pose problème, la notion première de « fonctions indépendantes » n'étant bien définie que localement. Study explique que les problèmes de multivocité ne sont pas les seuls, le prolongement des invariants locaux pourrait aussi tout simplement ne pas être possible. Une condition d'équivalence donnée par l'égalité de deux invariants différentiels $J = J_1$ ne peut être globalement remplacée par une égalité de la forme $\Phi(J) = \Phi(J_1)$ si Φ admet une frontière naturelle (i.e. n'est analytique que dans une partie stricte du plan complexe), quand bien même Φ serait univoquement inversible [Study 1908 140]. Ainsi, non seulement la théorie de Lie n'est-elle que locale mais il semble peu prometteur d'essayer de bâtir une théorie globale s'appuyant sur elle, à la fois à cause de difficultés techniques considérables et parce que la saisie locale brouille ou efface des distinctions qui sont fondamentales pour l'étude globale [Study 1908 140] ; non seulement l'étape locale n'aide pas, mais elle trompe.

Le texte de Study entrelace l'analyse conceptuelle dont nous venons de donner les grandes lignes, avec une analyse du style de pensée et de rédaction de Lie. Ainsi :

> Comme une exigence exotique imposée de l'extérieur, l'indubitable compréhension théorique qu'il a, que ses notions et théorèmes n'ont de validité que dans des régions limitées, n'a jamais vraiment pris racine dans l'esprit à la créativité intuitive de Lie.

---

den ganzen jedesmal in Betracht kommenden Raum zu umfassen, und in der Regel auch darauf, die Gesamtheit der Transformationen einer Gruppe mitzunehmen."

[52] „(…) *wo immer eine vollständige Invariantentheorie einer speziellen Gruppe entwickelt werden wird, Lies Invarianten einen wesentlichen Bestandteil von ihr ausmachen werden. Eine ganz andere Frage aber ist es nun, ob der Weg gangbar ist, auf den Lies allgemeine Theorie notwendig verweist, ob es im konkreten Falle durchführbar sein wird, mit einer Invariantentheorie „im kleinen" zu beginnen, und diese dann zu einer Invariantentheorie „im großen" zu erweitern.*"

[53] „ *Denn es wird nun nichts Geringeres verlangt werden müssen, als daß alle jene Umgebungen bestimmter Stellen aneinander gesetzt werden, bis schließlich der ganze Raum ausgefüllt ist; daß die Singularitäten der*

> Elle ne peut guère être ressentie autrement que comme une importune entrave à faire tomber à la première occasion. Ainsi, comme nous l'avons vu, dans l'espace total [*Gesamtraum*], il ne parle pas des invariants multivoques autrement que s'ils étaient univoques ; et chaque élimination d'équations surnuméraires demeure, de sorte qu'une opération possible *im kleinen* (avec certaines précautions) trouve des applications illicites dans des situations d'un tout autre type. [Study 1908 141] [54]

Ailleurs, Study déplore la persistance, à une époque où l'Analyse s'en est libérée, de formulations contraires à la logique :

> Nous pensons entre autres choses à l'usage abusif de certains termes (en général, quelconque, toujours, tous, chaque) ; aux hypothèses « introduites implicitement » (autrement dit implicites) donc aux hypothèses manquantes ; aux définitions sans rives nettes et aux concepts caméléons ; enfin et surtout aux contradictions dont la littérature est pleine. [Study 1908 132][55]

Si ces remarques générales ne s'adressent plus uniquement à Lie et Engel, ceux-ci sont ici les premiers visés.

Face à ce réquisitoire, Engel reconnaît le bien fondé des critiques de son « ami » Study et, en tant que premier élève de Lie, il se donne pour tâche de continuer à disperser les obscurités du maître [Engel 1908]. Quelques années plus tard, l'article que Fano [Fano 1907] consacre à la théorie des groupes de Lie et la géométrie fait état de ces critiques de Study, nous y reviendrons. Ces critiques n'ont pas conduit au développement d'une théorie globale des groupes de Lie mais à la reconnaissance du caractère purement local de celle ci. Comme Klein le disait déjà dans sa conférence de Chicago, la saisie analytique locale *à la* Lie en termes d'invariants différentiels et la saisie par les invariants algébriques des courbes et surfaces de l'espace projectif sont de natures différentes ; chacun chez soi.

---

einzelnen Invarianten, deren Auftreten in weiterer Entfernung man natürlich nicht hindern kann, erörtert werden (…)"

[54] „ *Die unzweifelhaft bei ihm vorhandene theoretische Einsicht, daß seine Begriffe und Theoreme nur in beschränkten Bereichen Geltung haben, hat als eine fremdartige von außen her aufgedrängte Forderung in Lies schaffensfrohem intuitivem Geiste wohl nie recht Wurzel gefaßt. Sie wurde wohl kaum anders denn als eine lästige Fessel empfunden, die bei erster Gelegenheit abgeschüttelt werden durfte. So hat, wie wir gesehen haben, Lie auch in der Theorie des Gesamtraumes von mehrwertigen Invarianten nicht anders geredet, als ob sie einwertig wären; und jenes Weglassen überzähliger Gleichungen besteht ebenfalls darin, daß eine im kleinen bei gehöriger Vorsicht mögliche Operation unter ganz anders gearteteten Verhältnissen eine nunmehr unerlaubte Anwendung findet.*"

[55] „ *Wir denken unter anderem an den Mißbrauch, der mit gewissen Worten (im allgemeinen, beliebig, immer, alle, jeder) getrieben zu werden pflegt ; an die „stillschweigend eingeführten" (oder, wie es gar heißt, stillschweigenden) und also fehlenden Voraussetzungen ; an die uferlosen Definitionen und chamäleontischen Begriffe, an die Widersprüche überhaupt, von denen die Literatur voll ist.*"

Les fils sont donc multiples qui se nouent autour du Traité de Lie et en font, éminemment, une figure de l'entre-deux entre un monde de la grandeur (et son point de vue universellement et implicitement local) et un monde ensembliste. Le dispositif théorique forgé par Lie seul et qu'on observe encore sous sa forme pure en 1880 est purement local : on le décrirait maintenant comme théorie des groupes de Lie locaux plus que comme la partie locale de la théorie des groupes de Lie[56]. La rédaction d'un grand Traité appelle un mode d'écriture plus « rigoureux », et les artifices typographiques montrent clairement que, pour Lie et Engel, cette rigueur passe par les discussions de domaines de validité associées aux définitions et théorèmes obtenus formellement. Mais les explicitations ultérieures rendues nécessaires par des critiques ou la mise au jour de cas « paradoxaux » révèlent que cette explicitation du travail local ne s'est pas accompagnée d'un changement fondamental d'horizon théorique par rapport à la théorie initiale de Lie. Un certain souci du lieu, quelques énoncés syntaxiquement locaux, une explicitation du caractère local de certains résultats etc. ne signifient pas l'insertion du travail dans un univers problématique structuré par un axe local / global ; en particulier, Lie et Engel peuvent énoncer un résultat comme local, cela ne signifie pas qu'ils ne le regardent pas aussi comme global. Si les critiques conduisent à des explicitations qui, chez Study en 1908, peuvent passer par l'opposition entre théorie *im Kleinen* et théorie *im Grossen*, elles ne conduisent pas les uns et les autres à construire ni même envisager sérieusement une théorie globale des groupes de Lie. D'un côté Engel reconnaît la nature locale du travail et cherche à dissiper toute obscurité sur ce point. En face, Study défend des perspectives algébriques classiques dans l'espace projectif : il n'imagine pas pour la théorie de Lie d'autres perspectives globales que l'étude des prolongements des objets définis localement (dans un espace indéterminé), prolongements faisant apparaître de la multivocité, des points singuliers autour desquels s'échangent des déterminations de fonctions multivoques etc. Les questions de compacité ou de simple connexité de l'espace des paramètres, l'isomorphie des algèbres de Lie d'un groupe de Lie et de son revêtement universel, la distinction entre deux types d'engendrement dans un groupe de Lie connexe – par l'exponentielle depuis l'algèbre de Lie, par composition des éléments appartenant à un voisinage de l'identité – sont autant d'éléments centraux dans l'émergence d'une théorie globale des groupes de Lie : ils apparaîtront dans les années 1920 et dans un tout autre contexte.

[56] Pour un exposé récent : [Olver 1993].