

Première partie : ce que Riemann et Poincaré nous lèguent.

Chapitre 1. Riemann.

I. Les *Principes fondamentaux* de 1851.

La dissertation inaugurale de Riemann sur les *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe*¹, soutenue en 1851, semble introduire en analyse complexe un point de vue à la fois géométrique et global, en substituant au plan complexe, comme domaine de la variable, une surface au-dessus du plan, ainsi qu'en proposant une formulation intégrale des principaux théorèmes (§7, 10 et 18) mettant au premier plan le lien entre une surface et son bord. La plus grande part des vingt-deux paragraphes de l'exposé est au service de la mise en place des notions et Lemmes permettant d'énoncer et de démontrer le théorème d'existence et d'unicité du §18, dans une construction rigoureuse ne laissant place ni aux exemples ni aux explicitations *méta*. Une fois le théorème obtenu, un seul exemple est présenté, en détail toutefois : il s'agit du résultat d'équivalence conforme des domaines simplement connexes (§21). C'est en fin d'exposé, dans les paragraphes 20 et 22 et dans une moindre mesure au paragraphe 19, que Riemann quitte l'enchaînement strict des définitions et démonstrations pour justifier sa démarche, en présenter l'esprit, préciser le problème auquel sa théorie répond, faire enfin le lien avec le programme gaussien de géométrie intrinsèque. C'est à la lumière de ces explicitations *méta* que nous choisissons de présenter ce texte de Riemann, ce qui nous conduit à la fois à ne pas suivre l'ordre démonstratif de l'exposé original et à ne pas imposer d'emblée une grille de lecture construite autour du couple local/global ; une synthèse finale centrée sur ce couple cherchera, par contraste, à mieux faire ressortir les spécificités du texte riemannien sur ce point.

¹ Nous utilisons la traduction française [Riemann 1898] et le texte allemand [Riemann 1892].

1. *Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen.*

i. Analyse.

Riemann ouvre cette dissertation en l'inscrivant dans le mouvement de distinction entre fonction et expression. Dans le cas des fonctions d'une variable complexe seules des fonctions particulières, nous dit Riemann, ont jusqu'ici fait l'objet d'étude : « fonctions algébriques, circulaires ou exponentielles, elliptiques et abéliennes » [Riemann 1898 47] et

Les méthodes dont on s'est servi jusqu'ici pour le traitement de ces fonctions partent toujours du principe qui consiste à prendre pour définition une *expression* de la fonction, sa valeur étant ainsi donnée par *chaque* valeur de son argument. [Riemann 1898 47]

Ce mode de définition débouchait naturellement sur un mode de traitement de la question de l'égalité des fonctions :

Ainsi pour démontrer, par exemple, l'égalité de deux expressions de la même fonction l'on devait autrefois les transformer l'une en l'autre, c'est-à-dire faire voir qu'elles coïncident toutes deux pour toutes les valeurs de la grandeur variable ; [Riemann 1898 47]

Remarquons la manière dont Riemann met en parallèle l'aspect analytique – fonction donnée, sinon caractérisée, par une expression – et l'aspect extensif de la coïncidence pour toutes valeurs de la variable. Il ne s'agira pas de revenir sur la notion de coïncidence, la notion extensive étant bien celle utilisée, implicitement, par Riemann dans tout le texte ; mais de distinguer dans le cas des fonctions holomorphes trois éléments : l'égalité des fonctions, la caractérisation des fonctions holomorphes, le mode de donation d'une fonction holomorphe. Les paragraphes 1-4 sont consacrés à la caractérisation intrinsèque des fonctions holomorphes, intrinsèque au sens où elle ne repose en rien sur leur expression particulière, ni même sur un type d'expression privilégié, les séries entières par exemple. Faisant remarquer que pour les fonctions complexes ω données par des expressions en la variable complexe z la dérivée $d\omega/dz$ ne dépend pas de \bar{z} – ce qui équivaut à dire que dans le développement de $d\omega$ selon dz et $d\bar{z}$ le coefficient du terme en $d\bar{z}$ est nul – il choisit de limiter son étude aux fonctions vérifiant cette propriété d'indépendance. Nous utiliserons librement le terme « holomorphe » pour désigner ces fonctions, ce qui n'est pas le choix de Riemann : les fonctions que nous nommons holomorphes sont désignées comme « fonctions de z », où

$z = x + iy$, par opposition aux simples fonctions de deux variables réelles x et y . Cette propriété caractéristique des fonctions de z est ensuite interprétée géométriquement en termes de représentation conforme, ou, pour reprendre les termes de Riemann, de similitude entre les triangles infinitésimaux du plan des z et du plan des ω . Elle est enfin explicitée sous forme d'un système d'équations aux dérivées partielles : si $\omega = u + iv$, ω est fonction de z si et seulement si

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

d'où l'harmonicité des parties réelles et imaginaires de ω :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Riemann s'appuie sur cette caractérisation intrinsèque des fonctions holomorphes pour montrer le caractère redondant du mode de donation d'une fonction par une expression, redondance qui se manifeste de deux manières principales : premièrement les valeurs dans un domaine sont caractérisées par les valeurs sur le bord de ce domaine, deuxièmement, partie réelle et partie imaginaire, loin d'être indépendantes, sont si liées que l'une détermine quasiment l'autre.

Explicitons ces deux points. Riemann aborde le problème en partant de l'analyse réelle, en prenant modèle sur les théorèmes intégraux de la théorie du potentiel pour développer la théorie des fonctions harmoniques de deux variables réelles. Il établit au paragraphe 7 ce que nous nommons la formule de Green-Riemann, reliant une intégrale de surface à une intégrale curviligne : si X et Y sont deux fonctions de deux variables réelles x et y , alors

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dT = - \int (X \cos \xi + Y \cos \eta) ds$$

où $dT = dx dy$ est l'élément d'aire de la surface, ds est l'élément de longueur du contour, ξ et η les angles que la normale rentrante au contour fait avec les axes de coordonnées. Au paragraphe suivant Riemann écrit l'intégrale curviligne de manière plus intrinsèque en remplaçant les composantes du vecteur normal par rapport aux axes du repère global par des

dérivées relatives au repère mobile $\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial p} \right)$ associé à la courbe :

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dT = - \int \left(X \frac{\partial x}{\partial p} + Y \frac{\partial y}{\partial p} \right) ds = \int \left(X \frac{\partial y}{\partial s} - Y \frac{\partial x}{\partial s} \right) ds.$$

En particulier, lorsque l'équation $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$ est identiquement vérifiée dans une partie du domaine, les intégrales curvilignes sont nulles sur le bord complet de cette partie. Riemann en déduit, lorsque le domaine d'étude est un domaine du plan complexe, une formule de représentation intégrale des fonctions harmoniques de deux variables réelles x et y , en continuant à s'inspirer des méthodes de théorie du potentiel : le rôle tenu en théorie du potentiel à trois variables par la fonction $\frac{1}{r}$, où r désigne la distance séparant un point variable O d'un point fixe O_0 , est ici tenu par la fonction $\log r$, harmonique sauf au point singulier, nulle sur le cercle de rayon 1 de centre O_0 (et non à l'infini), de dérivée partielle selon $\frac{\partial}{\partial p}$ constante sur tout cercle de centre O_0 . Riemann obtient ainsi au paragraphe 10 que si u est une fonction harmonique de deux variables réelles sur un domaine contenant le point O_0 , la valeur u_0 que u prend en ce point est

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int \left(\log r \frac{\partial u}{\partial p} - u \frac{\partial \log r}{\partial p} \right) ds$$

l'intégrale curviligne étant prise sur tout le contour du domaine plan. Le premier résultat de dépendance est ainsi établi, pour les fonctions harmoniques : la valeur dans un domaine plan est entièrement déterminée par la valeur sur le contour complet de ce domaine et, en ce sens, il est redondant de se donner la valeur d'une telle fonction dans tout le domaine, par une expression de calcul par exemple. Venons-en au lien entre partie réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe. Alors que les considérations précédentes ne nécessitaient, du point de vue de la topologie, que la distinction entre un domaine et son contour complet, ce nouveau point amène à distinguer topologiquement les différents domaines. Repartons du cas où X et Y sont deux fonctions de deux variables réelles, vérifiant identiquement $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$, on

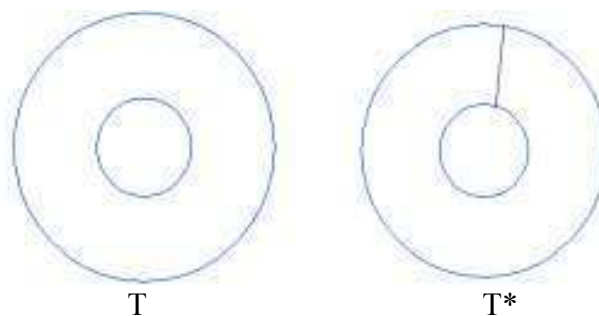
peut considérer les intégrales curvilignes $\int \left(X \frac{\partial y}{\partial s} - Y \frac{\partial x}{\partial s} \right) ds$ prises sur des chemins continus

reliant un point fixé O_0 à un point libre O ; ces intégrales dépendent bien sûr du point O , mais aussi du chemin reliant O_0 à O et ne définissent donc pas, en général, une fonction univoque de O . Riemann se donne dans cette dissertation les moyens d'étudier cette multivocité en introduisant au paragraphe 6 une série de notions que nous rappelons très brièvement ici : une surface est dite connexe si deux quelconques de ses points sont joignables par une courbe continue, cette dernière notion n'étant pas définie ; une surface non connexe est morcelée,

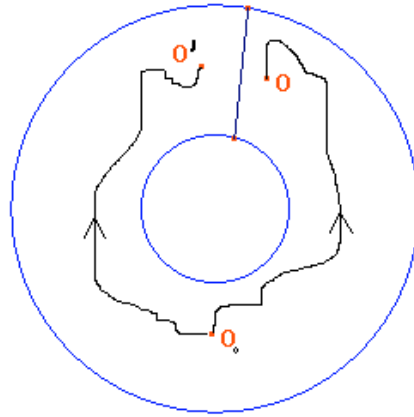
auquel cas elle est formée de morceaux connexes ; une courbe simple – i.e. sans auto-intersection – sur une surface reliant deux points du contour de la surface est une section transverse (« *Querschnitt* » [Riemann 1892 9]) ; une surface connexe est simplement connexe si toute section transverse la morcèle. Riemann démontre que, si une surface connexe est décomposée en m morceaux simplement connexes après n sections transverses, alors le nombre $n-m$ sera le même si l'on mène la décomposition selon d'autres étapes : ce nombre intrinsèquement associé à la surface est appelé son ordre de connexion (*Zusammenhangszahl*) ; il est donc de -1 pour les surfaces simplement connexes, de 0 pour la surface plane délimitée par deux cercles concentriques etc. Ces notions servent à éclairer, au paragraphe 7, la question de la multivocité des fonctions définies par des intégrales curvilignes. Dans le cas où la surface est un domaine simplement connexe du plan, la formule de Green-Riemann montre que la fonction

$$Z = \int_{o_0}^o \left(Y \frac{\partial x}{\partial s} - X \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

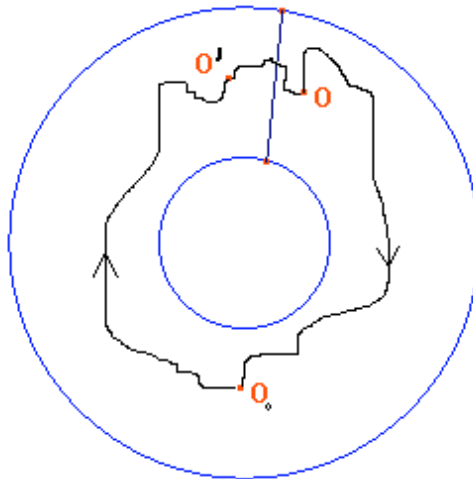
est univoque. Lorsque la surface plane T n'est pas simplement connexe, « en pratiquant des sections transverses, l'on transformera cette surface restante en une surface simplement connexe T^* » [Riemann 1898 20] ; T^* sera donc une nouvelle surface dont le bord est formé du bord de T ainsi que de coupures transverses dans T . A ce titre les éléments du bord de T^* ne sont pas homogènes, ceux provenant des coupures sur T ayant la propriété de posséder deux « rives » sur T ou T^* , de pouvoir être traversés par des chemins continus sur T . On sait que la fonction Z est uniforme si O_0 est un point de T^* et si on limite la variation de O à T^* , il ne reste pour décrire le comportement de Z dans T qu'à étudier les chemins franchissant une coupure ; en décomposant un chemin d'intégration, on est ramené à l'événement élémentaire que constitue la traversée d'une coupure transverse par le chemin d'intégration. Explicitons un peu plus que ne le fait Riemann en prenant l'exemple de l'anneau plan délimité par deux cercles concentriques :



L'unique section transverse transforme T en T^* formée d'un seul morceau simplement connexe, l'ordre de connexion de T est donc $1-1 = 0$. Comparons les valeurs Z et Z' de la fonction univoque dans T^* , en deux points O et O' proches mais situés de part et d'autre de la coupure transverse :



La différence $Z' - Z$ est égale à la somme d'une grandeur fixe, l'intégrale curviligne le long d'un chemin simple entourant exactement une fois le cercle central, et d'une grandeur variable, l'intégrale curviligne le long d'un petit chemin reliant O' à O en traversant la



coupure transverse :

Lorsque O et O' se rapprochent infiniment l'un de l'autre de part et d'autre de la coupure, cette partie variable tend vers 0, de sorte qu'on peut considérer que la fonction univoque dans T^* subit lors du franchissement de la coupure transverse dans un sens donné un saut brusque mais de valeur constante le long de la coupure. Riemann l'exprime ainsi :

L'intégrale $Z = \int_{O_0}^O \left(Y \frac{\partial x}{\partial s} - X \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$ représente donc, le point O_0 étant fixe, une

fonction de x, y partout continue sur T^* , mais qui, à la traversée des sections

transverses de T , varie d'une grandeur constante le long de celles-ci d'un point de branchement à un autre. (...) Les variations à la traversée des sections transverses dépendent de certaines grandeurs indépendantes entre elles, dont le nombre est égal à celui des sections transverses. [Riemann 1898 20]

Si l'on dispose maintenant sur T d'une fonction harmonique u de deux variables réelles x et y , les équations de Cauchy Riemann montrent que u est la partie réelle d'une unique fonction ω de z , dont la partie imaginaire v est donnée par des intégrales curvilignes qui ne dépendent que de u et d'une constante d'intégration arbitraire liée au point de départ des chemins. Cette fonction ω est univoque sur T^* et présente sur T le type de multivocité qu'on vient de présenter.

ii. Synthèse.

Avant de passer au théorème d'existence, revenons sur les points importants de cette partie d'analyse. Riemann a montré que pour une fonction holomorphe, caractérisée par les équations de Cauchy-Riemann, il se présente dans la totalité des valeurs qu'elle prend pour la totalité des valeurs de la variable des solidarités qui font qu'il est redondant, pour déterminer sans ambiguïté une telle fonction, de se la donner pour toute valeur de la variable, comme on le fait en se donnant la fonction par une expression de calcul. Ainsi les valeurs d'une fonction holomorphe sont déterminées par ses valeurs sur le contour du domaine d'étude, ce qui donne une famille simplement infinie de conditions. Ainsi, dans les domaines simplement connexes, les parties réelles et imaginaires se déterminent l'une l'autre, à une constante d'intégration près ; dans les domaines multiples connexes, l'ordre de connexion du domaine mesure le degré de couplage entre partie réelle et partie imaginaire. La synthèse proposée par Riemann dans le théorème du paragraphe 18 s'appuie sur cette analyse pour chercher un mode de donation non redondant des fonctions holomorphes ; on est en effet naturellement conduit à se demander si la donnée sur un contour d'une fonction continue à valeur réelle détermine, quitte à accepter une certaine multivocité de la partie imaginaire, une unique fonction holomorphe sur tout le domaine limité par ce contour. Riemann va étendre la recherche en n'imposant pas à la fonction d'être holomorphe dans tout le domaine, mais d'y présenter des pôles en des points fixés d'avance, avec des parties principales données. C'est le mode de donation qu'il qualifie d'approche « par conditions relatives aux contours et aux discontinuités » [Riemann 1898 48] (« *Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen* [Riemann 1892 39]). Rappelons l'énoncé du théorème central :

Théorème. – Lorsque sur une surface connexe T , décomposée par des sections transverses en une surface simplement connexe T^* , l'on se donne une fonction complexe $\alpha + \beta i$ de x, y , pour laquelle l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] dT$$

étendue à toute la surface, possède une valeur finie, cette fonction peut être toujours, et cela d'une manière unique, transformée en une fonction de z par l'adjonction d'une fonction $\mu + \nu i$ de x, y qui satisfait aux conditions suivantes :

1° Sur le contour, $\mu = 0$ ou, du moins, diffère de zéro seulement en des points isolés ; en un point, ν est donnée d'une manière arbitraire ;

2° Les variations de μ sur T , celles de ν sur T^* ne sont discontinues qu'en des points isolés, et cela seulement de telle sorte que les intégrales

$$\int \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 \right] dT \quad \text{et} \quad \int \left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y} \right)^2 \right] dT$$

relatives à toute la surface, restent finies ; de plus, les variations de ν le long d'une section transverse sont égales sur les deux bords. [Riemann 1898 42]

La démonstration reprend la méthode proposée par Dirichlet dans ses cours, inédits mais auxquels Riemann assistait, sur la théorie du potentiel. La fonction u harmonique en x et y dans tout le domaine et prolongeant la fonction numérique continue α donnée au bord est obtenue par un raisonnement variationnel : elle est, parmi les fonctions continues sur le domaine prenant les valeurs prescrites au bord, celle qui minimise l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dT .$$

Le raisonnement de Riemann diffère légèrement de celui de Dirichlet (tel du moins qu'on peut le lire chez Weierstrass²) puisqu'il se donne initialement non pas une fonction continue uniquement sur le bord, mais une fonction numérique de deux variables réelles donnée dans tout le domaine, y présentant éventuellement des points singuliers. Riemann explique de façon un peu allusive au paragraphe 19 comment, si la fonction initiale $\alpha + \beta i$ coïncide au voisinage d'un point du domaine avec une fonction méromorphe présentant un pôle en ce point de partie principale donnée, la fonction $u + \nu i$ obtenue par la méthode de Dirichlet présente en ce point la même partie principale. Après l'énoncé du théorème, le paragraphe 19

présente les principes généraux devant guider son utilisation, répondant ainsi par avance aux objectifs explicités au paragraphe 20. L'exposé du paragraphe 19 est tout entier construit autour de la notion de condition, cherchant à distinguer les types de conditions, continues ou discrètes, permettant de caractériser une fonction *déterminée* ; lorsqu'une partie des conditions manque, des degrés de libertés demeurent et toute une famille de fonctions satisfait aux demandes. Ainsi, sur un domaine simplement connexe plan, la donnée de la partie réelle au bord détermine une unique fonction holomorphe dans le domaine (à une constante purement imaginaire près) ; une fonction est donc *déterminée* par une infinité de conditions, chacune associant à chaque point du bord une valeur réelle – et non une valeur complexe comme une idée naïve de la théorie le ferait conjecturer :

Le champ d'évolution pour le choix des valeurs de ω sur le contour embrasse donc un ensemble à *une* dimension pour chaque point de l'encadrement, et la détermination complète de ces valeurs nécessite *une* équation pour chaque point de l'encadrement (...).[Riemann 1898 44]

Cette analyse dimensionnelle montre qu'on obtient le même résultat au moyen d'un système de n conditions portant sur des familles de n points du contour d'encadrement. Dans le cas non simplement connexe, ce sont des conditions discrètes qui permettent d'obtenir une fonction *déterminée* et univoque :

Dans le cas où le domaine de variabilité de la grandeur z est représenté par une surface multiplement connexe, ces considérations n'éprouvent aucune modification essentielle ; en effet, l'application du théorème du § XVIII fournit une fonction jouissant des mêmes propriétés que celles que l'on vient d'étudier, aux variations près à la traversée des sections transverses, variations qui peuvent être rendues égales à zéro, lorsque les conditions relatives à l'encadrement contiennent un nombre de constantes disponibles égal à celui des sections transverses. [Riemann 1898 45]

2. Surface au-dessus d'un plan complexe.

La théorie présentée jusqu'ici peut être entièrement lue comme une théorie des fonctions holomorphes dans des domaines simplement ou multiplement connexes du plan, bordés par des contours suffisamment réguliers ; à ce titre elle remplit les objectifs explicités au paragraphe 20 : ni ces objectifs ni les raisonnements menés pour les atteindre ne nécessitent

² [Weierstrass 1894-1927] vol.2, p.49-54.

l'introduction de la notion de surface étendue au-dessus d'un plan complexe qui est pourtant l'un des traits les plus novateurs de ce travail et le cadre dans lequel Riemann place toute la théorie. On est donc amené à s'interroger à la fois sur le pourquoi et le comment de cette introduction d'un nouveau cadre pour la théorie des fonctions d'une variable complexe.

i. Description initiale.

Au paragraphe 3 les équations de Cauchy-Riemann caractérisant les « fonctions de z » avaient été interprétées géométriquement comme caractéristiques de similitudes infinitésimales, ce passage à un cadre géométrique s'accompagnant de l'introduction de points génériques associés aux grandeurs variables, les points associées à des variables complexes étant des points dans des plans : si ω est une grandeur complexe fonction (holomorphe) de la grandeur complexe z , ω peut être représentée par un point Q d'un plan B et z par un point O d'un plan A . Le point Q est explicitement désigné comme l'« image sur le plan B » [Riemann 1898 4] (« *Bild in der Ebene B* » [Riemann 1892 5]) du point O . Nuanceons tout de suite : Riemann commence par souligner que la notion de variabilité complexe « est relative à un domaine connexe à deux dimensions » [Riemann 1898 4] (« *sich auf ein zusammenhängendes Gebiet von zwei Dimensionen erstreckt* » [Riemann 1892 5]) ; c'est seulement dans un second temps qu'il passe à une représentation géométrique plane qui ne constitue donc qu'un cas particulier. Le cadre géométrique est de nouveau élargi au paragraphe 5, sans que le sens et la portée de cette extension soit d'emblée bien clairs :

Dans les considérations suivantes, nous limiterons la variabilité des grandeurs x, y à un domaine fini, et, comme lieu du point O , nous n'envisagerons plus le plan A lui-même, mais une surface T recouvrant ce plan [*eine über dieselbe ausgebreitete Fläche T*]. Nous choisissons ce mode de représentation où il n'y a rien de choquant à parler de surfaces superposées, afin de pouvoir admettre que le lieu du point O puisse recouvrir plusieurs fois la même partie du plan ; [Riemann 1898 6, Riemann 1892 7]

Notons que ce passage de domaines finis (i.e. bornés) du plan à des surfaces n'est ici justifié que par la simple possibilité de le faire (« il n'y a rien de choquant »), sans que cette possibilité soit d'ailleurs légitimée, par exemple en soulignant l'équivalence locale entre un morceau de plan et un morceau de surface. La présentation des paragraphes 3 et 4 permet toutefois de faire sentir cette extension comme naturelle. D'une part, le traitement des similitudes au paragraphe 4 invite à porter le regard au niveau infinitésimal dont Gauss avait montré, dans son Mémoire *Résolution générale du problème : Représenter les parties d'une*

*surface donnée de telle sorte que la représentation soit semblable à l'original en les plus petites parties*³, qu'il peut être traité sur les surfaces comme dans le plan. D'autre part, la notion de « domaine à deux dimensions » ne renvoie que facultativement à la notion de plan ; les *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss [Gauss 1828] avaient montré comment toute surface peut être regardée intrinsèquement comme un objet géométrique bidimensionnel ; on atteint ce nouveau point de vue

Quand l'on considère une surface non comme la limite d'un solide, mais comme un solide (...) dont une des dimensions est regardée comme évanouissante (...). [Gauss 1828 28]

Si Riemann ne renvoie pas explicitement à ce texte de Gauss dans le paragraphe 5, il le fait dans le paragraphe 22, ce qui nous semble justifier une telle interprétation de l'évocation des « domaines à deux dimensions » du paragraphe 2. Notons que ces deux points renvoient moins à une équivalence *locale* – de morceaux petits mais finis – qu'à une équivalence au niveau infinitésimal entre travail dans un plan et travail sur une surface quelconque : c'est sans ambiguïté pour ce qui est de la similitude des triangles infinitésimaux, et c'est une interprétation possible de la bidimensionnalité ; un domaine est bidimensionnel lorsque son point générique dispose de deux degrés de liberté, ou encore, lorsque de tout point on peut s'éloigner selon une double infinité de directions.

Cette possibilité abstraite de considérer comme lieu géométrique de la variabilité d'une grandeur complexe une surface qui n'est pas un plan, ce passage d'un plan ordinaire à une sorte de plan *multiple*, pose de nouveau un problème de donation : qu'est-ce que se donner une surface au-dessus d'un plan, quels sont les renseignements minimaux nécessaires à la caractérisation d'un tel objet ? Riemann répond à ces questions dans le paragraphe 5 en utilisant ce que nous nommerons une stratégie de *carte globale* et que nous nous permettons de présenter, dans un premier temps, en nous autorisant des anachronismes ensemblistes : à chaque point O de la surface T correspond une valeur déterminée de la grandeur complexe z , elle-même représentée par un point dans le plan A ; c'est cette application que nous nommons la carte globale. Cette carte globale ne réalise pas une représentation conforme au voisinage de chaque point de la surface ; si l'on considère qu'une telle représentation conforme au voisinage d'un point est une *bonne carte locale* en ce point, on peut dire que la carte globale n'est pas une bonne carte locale en tout point de la surface. Riemann n'autorise toutefois *a priori* qu'un type particulier de singularité :

³ *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*, [Gauss 1822].

(...) nous supposons que les portions de surface superposées ne se confondent pas tout le long d'une ligne, en sorte qu'il n'arrive pas que la surface soit pliée, ni qu'elle soit morcelée en des parties superposées. [Riemann 1898 6]

Remarquons que cette concentration de la singularité de la carte globale en des points isolés, baptisés en fin de paragraphe « points de ramification » [Riemann 1898 8] (« *Windungspunkte* » [Riemann 1892 8]), est incompatible avec l'image géométrique de la projection parallèle d'une surface ordinaire de l'espace sur un plan ; aucune image spatiale, au sens tridimensionnel usuel, n'est présente dans le texte riemannien. Pour parler d'une telle surface au-dessus du plan, i.e. une telle surface munie d'une telle carte globale, Riemann propose comme mode de description ce que nous nommerions le relèvement des chemins continus du plan A par l'application de carte globale. Ce relèvement est parfaitement implicite dans le texte, Riemann regardant *à la fois* une courbe l comme une courbe dans le plan A et une courbe sur la surface T. Le cours de l (implicitement : sur T) est parfaitement déterminé (implicitement : par son cours sur A) tant que l ne rencontre ni courbe de contour (condition d'existence) ni point de ramification (condition d'unicité). Il reste donc à étudier la nature de l'indétermination due à la rencontre d'un point de ramification, ce qui devrait nécessiter un travail précis sur l'interaction entre le local et le global : on attend une étude locale en un point de ramification, ce qui va nécessiter l'introduction de la notion de feuillet de la surface au-dessus d'une partie du plan, notion délicate car ambiguë globalement et bien définie localement sauf au-dessus des valeurs de ramification. Riemann poursuit sa description en termes de cheminements associés sur le plan et sur la surface, en faisant se succéder deux types de cheminements. Dans un premier temps le chemin passe par un point de ramification :

Nous pouvons donc, en limitant nos considérations à une partie de la ligne l suivant son cours à l'intérieur de la surface et à des bandes suffisamment petites situées des deux côtés de cette ligne, parler des portions de surface limitrophe *déterminées*, dont le nombre est le même de chaque côté de la ligne l . [Riemann 1898 7]

C'est donc en relevant non seulement le chemin mais une bande (« *Flächenstreifen* » [Riemann 1892 8]) assez petite contenant ce chemin que les feuillets sont distingués et non dans une description locale en chaque point. Riemann fait ensuite changer légèrement le point de vue en présentant les régions à gauche (régions a) et à droite (régions a') de la courbe l , sur chaque feuillet, comme se prolongeant (*sich fortsetzen*) l'une l'autre ; nous citons ici le texte allemand, la traduction française utilisant le verbe « se raccorder » qui, nous semble-t-il, renvoie à des images mentales de soudure ou de recollement absentes dans ce passage du texte de Riemann :

Jeder Flächentheil a wird sich dann in einen der Flächentheile a' fortsetzen. [Riemann 1892 8]

Cette notion de prolongement nous semble demeurer dans le mode de description par cheminement, en l'occurrence le passage d'une région a à une région a' le long d'un chemin continu transverse à l . La règle combinatoire d'association des rives gauches et droites se prolongeant l'une l'autre est modifiée lorsque l passe par un point de ramification. Pour décrire explicitement ce réarrangement Riemann abandonne le cheminement le long d'un chemin passant par un point de ramification σ au profit d'un nouveau type de cheminement : le chemin l décrit maintenant sur la surface « un circuit autour du point σ de gauche à droite » [Riemann 1898 7], à ce circuit (« *Umlauf* » [Riemann 1892 8]) étant associé une permutation des rives. Ce que nous voyons comme une description de la surface T au-dessus du plan, i.e. de la fonction carte globale, au voisinage d'un point de ramification est obtenu en décrivant le relèvement de petits circuits autour d'une valeur de ramification ; un tel relèvement est décrit sans ambiguïté par la permutation qu'il induit entre des parties de surfaces, elles mêmes décrites comme des rives immédiatement attenantes à un chemin sur T passant par le point de ramification. Lorsque cette permutation est un cycle d'ordre m , le point de ramification est dit d'ordre $m-1$:

Le point mobile autour de σ revient alors après m circuits sur la même portion de surface, et sa marche est limitée à m parties de la surface superposées qui se réunissent en un point unique sur σ . [Riemann 1898 8]

De même qu'une fonction est donnée, sans ambiguïté et sans redondance, par les valeurs de sa partie réelle sur le contour ainsi que par le lieu et la nature de ses singularités ; de même :

Lorsque la forme et la direction du contour de T , ainsi que la position de ses points de ramification sont données, T est ou bien parfaitement déterminée, ou bien limitée à un nombre fini de figurations [*Gestalten*] distinctes ; ce dernier point résulte de ce que ces données peuvent être relatives à des portions différentes de surfaces superposées. [Riemann 1898 8, Riemann 1892 8]

Si la détermination n'est pas redondante elle présente ici une ambiguïté, les cas possibles demeurant en nombre fini car Riemann ne considère que des surfaces ne présentant qu'un nombre fini de feuillettes au-dessus du plan et des points de ramification d'ordre fini ; ces restrictions ne sont pas commentées par Riemann.

Cette stratégie de carte globale permet de manipuler la notion abstraite de fonction *sur* la surface T , ou pour être moins anachronique de fonction *du* point générique O de la surface T

au-dessus du plan A , au moyen de la notion usuelle de fonction de deux variables réelles x et y , le plan A étant le plan de la variable $z = x+yi$:

Une grandeur variable, qui, d'une manière générale (...) prend en tout point O de la surface T une valeur déterminée variant continûment avec la position de ce point, peut être évidemment regardée comme une fonction de x, y , et, partout où dorénavant il sera question de fonctions de x, y , nous adopterons cette définition. [Riemann 1898 8]

Riemann passe ici très rapidement sur le fait que la mise en relation de points de T et de points du plan par la carte globale n'étant pas bijective, à une fonction univoque sur le plan est associée par la carte globale une fonction univoque sur la surface, mais à une fonction univoque sur la surface est associée, dès qu'il y a plusieurs feuillets, une fonction multivoque dans le plan : la fonction est moins « déterminée » lorsqu'on la regarde comme fonction de x et y . Notons aussi que le passage d'une fonction de x et y à une fonction de O ne pose pas de difficulté si la surface de Riemann est donnée à l'avance, mais qu'il ne semble pas ici être question de la construction d'une surface de Riemann associée à une fonction de variable complexe au sens usuel, par exemple dans un objectif d'uniformisation.

ii. Des résultats d'analyse sur les surfaces.

Une fois établies la notion de surface T au-dessus du plan complexe A et la notion de fonction du point générique O de T , il reste à établir dans ce cadre les résultats d'analyse que nous citons dans la première partie et qui conduisaient à la description des fonctions holomorphes par « conditions relatives aux contours et aux discontinuités ». Présentons les trois éléments principaux de cette nouvelle analyse non dans l'ordre dans lequel on les trouve dans le texte mais selon le degré d'attention qu'ils induisent à ce lieu très spécifique qu'est la surface au-dessus du plan complexe. La partie nécessitant la plus faible attention au lieu est la démonstration *à la* Dirichlet du théorème d'existence et d'unicité du paragraphe 18. La démonstration utilise les notions d'intégrales curvilignes et de surface, de dérivées partielles par rapport aux variables x et y , notions qui sont utilisées par Riemann entièrement comme elles le seraient dans le plan complexe lui-même. Il en va un peu différemment de la démonstration de la formule de Green-Riemann, au paragraphe 7. Si Riemann procède par partage de l'espace total ce n'est ni par un recouvrement ouvert ni par une décomposition cellulaire :

Pour transformer l'intégrale $\int \frac{\partial X}{\partial x} dT$, décomposons la partie du plan A que recouvre la surface T par un système de lignes parallèles à l'axe des x en bandes élémentaires, et cela de telle sorte que chaque point de ramification de la surface T se trouve sur une de ces lignes. [Riemann 1898 14]

L'hypothèse sur les points de ramification sert, semble-t-il, à ce qu'au-dessus de chaque bande du plan A on puisse séparer sans ambiguïté les différents feuillets :

Ceci posé, chaque partie de T se rapportant à l'une de ces bandes est formée d'un ou plusieurs morceaux distincts de forme trapézoïdale. [Riemann 1898 14]

On passe ensuite au niveau infinitésimal en utilisant non pas des bandes finies mais des bandes dont la hauteur est l'infiniment petit dy , de manière que l'intégrale selon $dT = dx dy$ puisse être calculée comme la somme d'une infinité d'infiniment petits :

La contribution qu'apporte à la valeur de $\int \frac{\partial X}{\partial x} dT$ une de ces bandes de surface découpant sur l'axe des y l'élément dy sera évidemment

$$dy \int \frac{\partial X}{\partial x} dx$$

l'intégration ci-dessus étant prise relativement à celle ou celles des lignes droites appartenant à la surface T qui recouvrent une normale issue d'un point quelconque de cet élément dy . [Riemann 1898 14]

Notons que c'est le même terme de « bande » (*Flächenstreifen*) qui désigne ici une bande explicitement *infiniment* petite et qui désignait, dans la description de la surface de Riemann au-dessus du plan au paragraphe 5, le chemin épaissi servant à désigner les rives $s'y$ rejoignant : on aurait sans doute eu tort, alors, d'accorder à cette notion de bande « assez petite » une valeur locale par opposition à une valeur infinitésimale. Si l'on prête un peu d'attention aux notations on remarque aussi, dans cette dernière citation, une dissymétrie entre la différentiation et l'intégration, dissymétrie qui n'est d'ailleurs en rien propre à Riemann.

Les éléments différentiels dx et dy , ou l'opérateur de dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x}$, renvoient explicitement aux variables x et y et représentent des éléments génériques. L'intégration au contraire nécessite un travail sur des éléments particuliers, fixés par avance, et qui ne sont pas désignés par une notation spécifique : le lieu de la sommation est décrit dans le texte, la notation intégrale n'est, à ce titre, pas close ; elle appelle un complément textuel de lieu. Cette spécificité de l'intégration géométrique au 19^e siècle facilite le passage du morceau de plan à

la surface de Riemann au-dessus du plan, une petite modification dans la désignation rhétorique du lieu suffisant. La fin de la démonstration ne se distingue en rien de ce qu'elle aurait été pour un morceau de plan : $\int \frac{\partial X}{\partial x} dx$ est remplacé par la somme signée des valeurs de X en les différents points du contour interceptés par la bande infinitésimale dy ; dy est transformé en $\pm \cos \xi ds$ où ξ est l'angle entre dy et la normale à ds ; enfin l'intégrale selon l'élément de surface dT est ainsi remplacée en la somme des $-X \cos \xi ds$ pour tous les éléments du contour.

Une troisième famille de résultats d'analyse nécessite, elle, une attention plus particulière aux spécificités d'une surface de Riemann au-dessus du plan : il s'agit du théorème de représentation intégrale des fonctions harmoniques et de ses conséquences immédiates, exposés dans les paragraphes 10-14. Dans les paragraphes 10-13 le travail a ceci de particulier qu'il est mené sous des hypothèses très restrictives :

Supposons maintenant que la surface T , représentant le lieu du point O , recouvre partout le plan A d'une manière simple (...).[Riemann 1898 22]

Ce travail dans un domaine plan permet l'usage de la fonction $\log r$, où r désigne la distance du point générique à un point fixe. Aux paragraphes 12 et 13 la surface est, en outre, supposée simplement connexe. L'objectif du paragraphe 14 est de montrer la portée de ces résultats – représentation intégrale et corollaires – dans le cas d'une surface T quelconque :

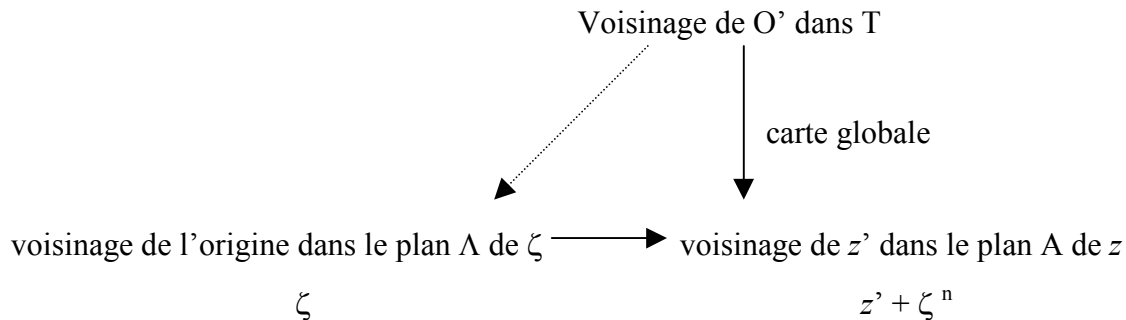
Les restrictions qui ont été faites dans les §XII et XIII, relativement à la surface T , ne sont pas essentielles à la légitimité des résultats acquis. En effet, l'on peut joindre tout point situé à l'intérieur d'une surface quelconque à une partie de ladite surface qui jouit des propriétés supposées en ces §XII et XIII, exception faite du seul cas où ce point est un point de ramification de la surface. [Riemann 1898 30]

Ainsi les résultats démontrés pour une surface simple (sans point de ramification) et simplement connexe au-dessus du plan sont-ils encore valables dans le cas général, mais pour une petite région autour d'un point ordinaire de la surface : validité locale. Il reste à déterminer si ces résultats demeurent valides au voisinage d'un point de ramification. Riemann propose dans ce but un changement de carte locale :

Pour faire l'étude de ce cas, concevons la surface T ou une portion quelconque de cette surface, renfermant un point de ramification O' d'ordre $(n-1)$ où l'on a $z = z' = x' + y'i$, représenté par l'entremise de la fonction $\zeta = (z - z')^{1/n}$ sur un autre plan Λ , c'est-à-dire que nous supposerons la valeur de la fonction $\zeta = \xi + \eta i$ au point O représentée sur ce

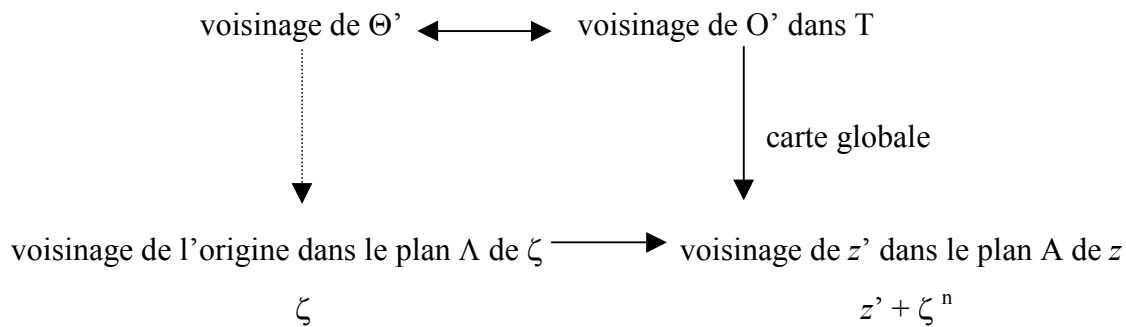
plan Λ par un point Θ dont les coordonnées rectangulaires sont ξ et η , et nous regarderons Θ comme l'image (*Bild*) du point O . De cette manière nous obtenons comme représentation (*Abbildung*) de cette partie de la surface T une surface connexe recouvrant Λ et qui, au point Θ' , image du point O' , n'a pas de point de ramification, comme nous allons le faire voir par la suite (...). [Riemann 1898 30] ⁴.

En s'éloignant radicalement de la formulation de Riemann on peut reformuler ce passage au moyen d'un diagramme :



L'objectif de Riemann est de montrer que la flèche en pointillé est une bonne carte locale. Avant de présenter les arguments allant dans ce sens, faisons deux remarques importantes sur la formulation de ce passage. Tout d'abord notre diagramme renverse la présentation de Riemann : nous composons des applications, soumises donc à une condition d'univocité, en montrant comment on peut rendre compte de la non-injectivité de la carte globale au voisinage d'un point de ramification en la décomposant en une application bijective, donnée ici en pointillé, suivie d'une application bien connue, l'élévation à la puissance n ; une interprétation intrinsèque consisterait à dire que la carte globale se comporte en un point de ramification d'ordre $n-1$ comme l'élévation à la puissance n se comporte en zéro. Riemann, lui, compose la carte globale non injective avec une fonction multivoque, la racine n -ième, pour obtenir au bilan une bijection ; encore cette formulation est-elle trop ensembliste, Riemann ayant recours à des changements de variables et non à des « compositions d'applications » – fussent-elles multivoques. La deuxième remarque concerne l'introduction du point générique Θ . On pourrait bien considérer que Θ est le point générique du plan Λ , mais Riemann préfère invoquer une nouvelle surface au-dessus d'un plan, surface dont Θ serait le point générique. Le schéma suivant serait donc sans doute moins infidèle à Riemann :

⁴ Les termes allemands sont donnés dans la traduction française de Laugel.



la « surface connexe recouvrant Λ », lieu de Θ , n'ayant pas été baptisée dans le texte. Ce schéma plaide, semble-t-il, dans le sens d'une distinction fine entre la notion de point d'une surface et de point d'une « surface au-dessus d'un plan » : T étant une *surface au-dessus du plan* A , l'association aux points de la *surface* T d'une nouvelle grandeur complexe ζ définit sur l'ensemble de points sous-jacent à T une nouvelle structure de *surface au-dessus d'un plan*, donc une nouvelle surface au-dessus d'un plan dont le point générique ne peut légitimement rester désigné par O . La distinction entre points de la surface sous-jacente et points de la surface au-dessus d'un plan est parfaitement claire chez Riemann en fin de paragraphe, lorsqu'il exprime le résultat de bijectivité que nous avons représenté diagrammatiquement par la double flèche en écrivant qu'« à chaque point O correspond un seul point Θ et *vice versa* » [Riemann 1898 32]]. Après ces deux remarques sur la formulation du résultat il nous reste à examiner comment Riemann démontre à la fois cette bijectivité de double la flèche et la non ramification de la flèche en pointillés en Θ' . Ces deux résultats sont obtenus ensemble en montrant que la description de T au voisinage de O' formulée en termes de relèvement par la carte globale de circuits au voisinage de z' est indiscernable de la description du relèvement des chemins au voisinage de z' par la fonction racine n -ième. Le caractère local du travail est explicité en ces termes :

Pour fixer les idées, concevons qu'autour du point O' comme centre, sur le plan A , on décrive un cercle de rayon R et que l'on mène un diamètre parallèle à l'axe des x . Le morceau détaché de T par ce cercle et contenant le point de ramification se décompose alors sur les deux bords du diamètre, lorsque R est pris suffisamment petit, en n portions de surfaces ayant leurs cours séparés de chaque côté du diamètre et ayant la forme de demi-cercles. [Riemann 1898 31]

Le passage en coordonnées polaires permet opportunément d'éclairer la situation en permettant de décrire la réunion en O' de n secteurs. L'étude peut ainsi se conclure : on avait vu que les résultats établis aux paragraphes 10-13 sur les fonctions harmoniques dans les domaines plans, puis plans et simplement connexes, sont valides pour de petits morceaux de

surface associés aux points ordinaires d'une surface au-dessus d'un plan. En un point de ramification O' la *surface* ne présente pas de singularité topologique puisqu'on vient d'établir qu'un voisinage d'un tel point peut aussi donner lieu à une surface simplement étendue au-dessus d'un plan ; c'est la *surface au-dessus de A* qui présente une singularité en O' , c'est la carte globale z qui y est singulière. Les résultats établis pour les domaines plans simples et simplement connexes sont donc valides au voisinage d'un point de ramification pour peu qu'on y utilise une bonne carte locale :

Une grandeur variable, qui a en chaque point O une valeur déterminée, a de même une valeur déterminée en chaque point Θ et réciproquement, puisqu'à chaque point O correspond un seul point Θ et *vice versa*. Ensuite, si la grandeur est une fonction de z elle le sera aussi de ζ , car lorsque $\frac{d\omega}{dz}$ est indépendant de dz , $\frac{d\omega}{d\zeta}$ l'est aussi de $d\zeta$, et réciproquement. De ceci nous concluons qu'à toutes les fonctions ω de z on peut appliquer aussi, pour les points de ramification O' , les propositions des §XII et XIII, lorsque ces fonctions sont considérées comme fonctions de $(z - z')^{\frac{1}{n}}$. [Riemann 1898 32]

La seule application donnée par Riemann, dans le cadre très général de cette dissertation, de ce principe de traduction consiste à donner l'allure en z de la partie principale d'une fonction méromorphe en O' , point de ramification.

iii. Surface de Riemann associée à une fonction, uniformisation, inversion.

Cette étude du paragraphe 14, indéniablement *locale* sans d'ailleurs qu'un terme *méta* vienne la qualifier ni que des termes plus précis que « petit morceau », attaché à un point ou détaché de la surface autour d'un point, soient employés, s'intègre à la mise en place des résultats d'analyse : formule de Green-Riemann aux paragraphes 7-8, traitement géométrique de la multivocité des fonctions définies par des intégrales curvilignes au paragraphe 9, formule de représentation intégrale et corollaires aux paragraphes 10-14, principe de Dirichlet et théorème fondamental d'existence et d'unicité aux paragraphes 16-18. Le paragraphe 15, qu'il nous reste à présenter joue à ce titre un rôle particulier, moins soumis aux strictes nécessités du développement d'une série de résultats d'analyse. Revenant sur la notion même de surface au-dessus d'un plan complexe, il apporte un autre éclairage que celui initialement donné au

paragraphe 5, auquel il fait écho. Riemann y propose le traitement au moyen d'une surface au-dessus d'un plan de la situation suivante :

Concevons maintenant une fonction de z , qui, en chaque point O de la surface T recouvrant d'une manière arbitraire le plan A , possède une valeur déterminée, et qui n'y est pas partout égale à une constante, représentée géométriquement de telle sorte que sa valeur $\omega = u+vi$ au point O soit représentée par un point Q du plan B dont les coordonnées rectangulaires sont u et v ; [Riemann 1898 33]

On se donne donc, semble-t-il, une fonction ω univoque méromorphe sur T ; Q désigne le point générique du plan B de la grandeur complexe ω .

Nous aurons alors les propositions suivantes :

I. L'ensemble des points Q peut être regardé comme formant une surface S , à chaque point de laquelle correspond un point O variant avec ce point Q d'une manière continue sur T . [Riemann 1898 33]

La surface S n'est pas ici présente initialement, elle est associée à la donnée plus primitive d'une fonction à valeur complexe sur T ; alors qu'on pouvait lire tout ce qui précédait en s'en tenant à l'idée de fonction sur une surface, il est ici clairement question d'une surface associée à une fonction, surface qui ne semble d'ailleurs pas nécessiter de *construction* particulière. Quelques vérifications techniques sont toutefois nécessaires pour légitimer ce qui est un peu plus qu'un *changement de point de vue* et un peu moins qu'une construction, mais avant la question du « comment » examinons quel est l'objectif de ce changement de point de vue. Si à tout point Q appartenant à l'image de la fonction ω (image collectivisée par la désignation « l'ensemble des points Q » [p.33], « *Die Gesamtheit der Punkte Q* » [all.p.28]) on peut associer *un* point O de T , on a su définir une fonction *univoque* jouant le rôle de réciproque de la fonction $\omega = \omega(O)$; plus précisément, la réciproque $O = O(\omega)$ de la fonction $\omega = \omega(O)$ est *a priori* multivoque si l'on considère la grandeur ω dans son plan, la considération d'une surface S au-dessus du plan des ω permet de voir dans cette fonction multivoque la projection d'une fonction univoque $O = O(Q)$. Le but de ce changement de point de vue faisant surgir une nouvelle surface est donc l'inversion de la fonction ω , plus précisément l'uniformisation de son inverse. C'est explicite dans le passage de conclusion du paragraphe 15 :

III. La surface S , par suite, est une surface pour laquelle ont lieu les hypothèses faites au §V ; sur cette surface, en chaque point Q , la grandeur indéterminée z possède *une* valeur déterminée, qui varie d'une manière continue avec le lieu de Q , et de telle façon

que $\frac{dz}{d\omega}$ est indépendant de la direction de la variation en ce lieu. Ainsi z , en attribuant à ces mots le sens précédemment indiqué, est une fonction continue de la grandeur variable complexe ω dans le domaine représenté par S . [Riemann 1898 35]

Une surface était caractérisée, on l'a vu au paragraphe 5, par son contour et ses points de ramification et Riemann va suivre ici cette voie. Mais au paragraphe 5 nous avons pu interpréter cette analyse dans un cadre ensembliste en supposant une surface T donnée – comme ensemble de points – et une fonction complexe $z = z(O)$ sur cette surface ; ici une lecture ensembliste du texte de Riemann constituerait un contresens. Ainsi à aucun moment Riemann n'explique-t-il à quel ensemble de points correspond la surface Q , ou plutôt il semble dire qu'elle est formée de l'ensemble des points images dans le plan B , ce qui ne rend pas compte du procédé d'uniformisation de l'inverse. A aucun moment il ne nous est expliqué que, par exemple, si un point particulier Q' du plan B est l'image d'exactly trois points de la surface T on va considérer que la surface S possède trois points distincts au-dessus de Q' , la fonction inverse associant à chacun de ces trois points l'un des points appliqués sur Q' par la fonction ω . Si l'on s'en tient à ce que Riemann écrit on doit examiner successivement la donnée du contour et des points singuliers de S au-dessus du plan B . Pour ce qui est du contour une phrase semble suffire :

Ceci posé, le contour de S correspond, d'une part, au contour de T et, d'autre part, aux points de discontinuité ; [Riemann 1898 34]

Le cas des « discontinuités », par exemple de pôles, inviterait à une introduction de la sphère de Riemann en lieu et place du plan B , mais rien de tel n'est esquissé. La plus grande partie du paragraphe consiste en la vérification des hypothèses du paragraphe 5, à savoir que la surface recouvre le plan sans pliure ni déchirure (*Umfaltung, Spaltung* [Riemann 1892 7]). Deux résultats sont établis successivement. Premièrement :

Une fonction $\omega = u+vi$ ne peut être égale à une constante le long d'une ligne, lorsqu'elle n'est pas partout égale à une constante. [Riemann 1898 33]

Ce résultat peut être interprété en disant que la fibre au-dessus de tout point du plan B est, lorsqu'elle n'est pas vide, discrète. Cette formulation très ensembliste n'est bien sûr pas dans l'esprit de celle de Riemann, qui déduit de ce lemme :

II. Par suite de l'hypothèse posée en I, il ne peut exister une connexion [*Zusammenhang*] entre les parties de S , sans qu'il en soit de même pour les parties correspondantes de T . Réciproquement, partout où a lieu une connexion sur T et où ω

est continue, on peut attribuer une connexion correspondante à la surface S. [Riemann 1898 34, Riemann 1892 28]

Le regard se porte ainsi sur un niveau élémentaire, presque infinitésimal : si l'on se fixe deux points O et Q qui se correspondent, l'espace bidimensionnel des variations élémentaires de l'un est mis en correspondance avec un domaine lui aussi bidimensionnel de variations pour l'autre ; il est vérifié que le domaine du point générique Q est bien une multiplicité bidimensionnelle. Il reste à établir que le repérage de Q par le nombre complexe ω constitue une carte globale au sens défini au paragraphe 5. Citons le passage excluant l'existence de plis :

Démontrons, en premier lieu, qu'un point Q' où $\frac{d\omega}{dz}$ est fini ne peut être situé en un pli de la surface S.

A cet effet, joignons le point O' auquel correspond Q' à une portion de la surface de forme quelconque et de dimensions indéterminées. Alors, en vertu du §III, ces dimensions doivent pouvoir être prises suffisamment petites pour que la forme de la partie correspondante sur S diffère aussi peu que l'on voudra de ce morceau sur T ; elles seraient de cette manière si petites que le contour de cette partie sur S séparerait sur le plan B un morceau entourant Q'. Or, ceci est impossible lorsque Q' est situé sur un pli de la surface S. [Riemann 1898 34]

L'hypothèse « $\frac{d\omega}{dz}$ fini » signifie qu'il n'est ni nul ni infini. C'est donc une sorte de théorème de l'application ouverte qui intervient dans cette légitimation géométrique de l'inversion d'une fonction méromorphe. On est toutefois loin des formulations du théorème d'inversion locale ou du théorème de l'application ouverte qui s'imposeront dans les dernières années du 19^e siècle. Notons d'ailleurs que Riemann n'utilise pas non plus d'arguments purement analytiques d'inversion d'une série entière dont le coefficient du terme en z n'est pas nul. L'argument pour expliquer qu'en un point où $\frac{d\omega}{dz}$ n'est ni nul ni infini la fonction ω ne crée pas de pli est géométrique mais infinitésimal : un tel pli contredirait la similitude des plus petites parties dont on a vu au paragraphe 3 qu'elle est la traduction géométrique des équations de Cauchy-Riemann. L'hypothèse de « finitude » de $\frac{d\omega}{dz}$ ne pouvant être violée qu'en des points isolés, la surface S est bien une surface au-dessus du plan B, au sens du paragraphe 5.

3. Place du couple local/global.

Cette présentation assez détaillée de la dissertation inaugurale de Riemann sur les *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe* s'écartait de la lecture cursive à la fois par un non respect de l'ordre de présentation choisi par Riemann et par des reformulations anachroniques. Le non respect de l'ordre nous permettait de regrouper les notions introduites par Riemann autour de deux pôles sensiblement distincts, dont nous voulons montrer qu'ils n'induisent pas le même type de rapport au couple local/global. Les reformulations anachroniques – en termes d'ensembles, d'applications (injectives, surjectives, bijectives, réciproques l'une de l'autre), en termes de relèvement de chemins et de changement de cartes, en termes d'étude *locale* – nous semblaient se justifier pour un faisceau de raisons. Une raison anhistorique : on espère qu'elles permettent d'éclairer un texte riemannien dont l'obscurité ne relève pas uniquement de la distance qui nous en sépare puisqu'elle fut ressentie par les lecteurs du 19^e siècle, nous le verrons. Des raisons historiques surtout : ce type de reformulation est le fruit du travail *sur* l'œuvre de Riemann ou *à la* Riemann mené par de nombreux mathématiciens durant, au moins, les soixante années qui séparent ce texte de, disons, l'*Idée de surface de Riemann* de Weyl [Weyl 1913] ; qu'on ne puisse aujourd'hui rapporter ce qu'écrit Riemann sans utiliser le couple local/global, c'est là un effet de cette histoire ; la formulation délibérément anachronique manifeste, au delà des clarifications espérées, la distance même qui la sépare de la formulation riemannienne.

i. Une analyse globale ?

Ainsi que Riemann l'explique très clairement dans les paragraphes 19 et 20 le problème qu'il traite est celui de la donation, du mode d'accès, aux fonctions d'un type assez général – s'inscrivant par là dans le débat sur la notion de fonction continue arbitraire – mais pas général jusqu'à l'arbitraire : la classe des fonctions étudiées est celle des fonctions vérifiant les équations de Cauchy-Riemann, les « fonctions de z ». L'analyse de cette situation révèle une série de dépendances qui permettent, par contre-coup, de dessiner les systèmes minimaux de conditions indépendantes permettant de caractériser sans ambiguïté *une* fonction parmi celles de cette classe. S'inspirant de la théorie du potentiel cette analyse des dépendances est menée dans des termes géométriques : dépendance absolue, pour une fonction harmonique, entre valeurs dans un domaine et valeurs sur le contour de ce domaine ; dépendance, pour fonction holomorphe, entre partie réelle et partie imaginaire, dont le degré de couplage

dépend d'un nombre fini de grandeurs liées à l'ordre de connexion du domaine. Cette émergence d'une strate d'éléments géométriques – nous dirions topologiques – pertinents en théorie des fonctions de z est, en un sens, strictement corollaire du choix des outils analytiques : formule de Green-Riemann et définition de certaines fonctions par des intégrales curvilignes. Cette attention systématique au lieu – domaine et son contour, contour artificiellement créé par coupure pour rendre compte de la multiple connexité en termes de simple connexité – est non seulement induite par les outils intégraux mais positivement désignée comme ce qui permet la bonne formulation des conditions de détermination, par opposition aux déterminations redondantes par expression de calcul. Si l'on centre maintenant l'attention sur le local et le global, on doit tout d'abord remarquer que le *couple* local/global n'organise pas la démarche riemannienne, en particulier du fait de l'absence de développements en série ; les « fonctions de z » sont définies par des conditions infinitésimales données par des équations aux dérivées partielles, puis étudiées dans des domaines organisés selon le couple domaine/contour : s'il y a un couple organisateur il s'agit bien plus d'un couple infinitésimal/intégral que d'un couple local/global. La non pertinence du couple local/global n'invalide pas l'idée selon laquelle Riemann propose un traitement global de l'analyse complexe. L'outil intégral, le couple domaine/contour imposent bien de désigner par avance le domaine d'étude : globalité syntaxique ; l'ordre de connexion du domaine impose bien une loi commune aux fonctions de z sur ce domaine fixé au départ et ce type d'étude débouchera dans des travaux ultérieurs sur la prise de conscience de ce que nous avons baptisé la *légalité primitive du lieu*. Nous voudrions toutefois nuancer en montrant que si on *peut* y lire une forme de légalité primitive du lieu, le dispositif riemannien est loin d'imposer cette lecture. Cette légalité se dévoile lorsqu'on se fixe un domaine et qu'on considère ce qu'il impose à toutes les fonctions d'un type donné définies sur ce domaine ; l'analyse du paragraphe 19 en termes de degré de détermination ne met en relation explicitement qu'une fonction en face d'un domaine, ne contribuant pas à faire émerger cet aspect de contrainte globale. Alors que tous les outils sont présents, des résultats paradigmatiques de ce type de contrainte sont absents du texte, par exemple la nullité de la somme des résidus d'une fonction méromorphe sur une surface compacte sans bord. On verra que ces aspects de contrainte globale sont beaucoup plus présents dans le travail de Riemann sur les fonctions abéliennes. Une dernière nuance sur cette idée d'une analyse globale. La spécificité du point de vue global nécessite non seulement que dans *chaque* énoncé soit déclaré en premier lieu un domaine auquel s'étend la validité du résultat énoncé, c'est là la globalité syntaxique, mais aussi qu'un domaine soit regardé comme constant et, en un sens,

absolu dans une *série* d'énoncés. Or chez Riemann le domaine est déclaré par l'évocation du contour qui le borde, mais ce contour présente lui-même un caractère relatif. Il faut certes en choisir un pour utiliser les outils mis en place, mais un autre pourrait aussi bien être choisi, ainsi au paragraphe 9 :

La valeur de l'intégrale

$$\int \left(X \frac{\partial x}{\partial p} + Y \frac{\partial y}{\partial p} \right) ds$$

relative au contour total d'une surface recouvrant A, reste constante lorsque l'on agrandit ou que l'on diminue cette surface d'une manière quelconque, pourvu toutefois que cette opération n'ajoute ni ne retranche aucune partie de surface où les hypothèses du théorème I cesseraient d'être satisfaites. [Riemann 1898 17]

Pour le résumer d'une formule : on fait moins ici l'analyse *des* fonctions *sur* un domaine que de l'analyse d'*une* fonction, certes générale, *avec* des domaines.

ii. Un point de vue géométrique non ensembliste.

Une vue d'ensemble sur l'introduction de la notion de surface au-dessus d'un plan complexe doit tenir compte des trois paragraphes qui lui sont spécifiquement consacrés : le paragraphe 5 de description initiale, le paragraphe 15 de traitement par les surfaces de l'inversion d'une fonction méromorphe, le paragraphe 22 esquissant le lien avec les travaux de Gauss sur la géométrie intrinsèque – métrique ou conforme – des surfaces. Le paragraphe 15 nous semble toutefois fournir les clés principales tout en permettant de préciser le rôle de l'introduction des surfaces au-dessus d'un plan complexe dans l'économie générale d'un questionnement centré sur la question de la détermination d'une fonction *déterminée* ; il nous contraint aussi à nous départir de toute velléité de reformulation en termes d'ensembles et d'applications. Une fonction multivoque est moins déterminée qu'une fonction univoque, la donnée d'une valeur particulière de la variable ne suffisant pas à déterminer sans ambiguïté la valeur de la fonction. Montrer comment une fonction univoque peut être associée naturellement à une fonction multivoque, en un mot uniformiser, c'est gagner en détermination, et les surfaces au-dessus de plans complexes rendent ce service. Une interprétation ensembliste de l'exposé riemannien y lirait la construction d'un nouvel objet formé d'un ensemble de points et d'une application à valeurs complexes définie sur cet ensemble de points, application que nous appelions la carte globale ; on dirait alors que Riemann montre comment à une fonction complexe multivoque sur un domaine plan peut être associée naturellement une fonction

complexe univoque sur une surface au-dessus de ce domaine plan. Il nous semble toutefois plus cohérent avec les formulations choisies par Riemann de commencer par remplacer l'alternative ensemble/élément par l'alternative point générique/point spécifié, dualité pour laquelle Riemann utilise une notation systématique : lettre majuscule simple pour un point générique (O, Θ, Q), la même lettre mais accentuée pour désignée une spécification (O', Θ', Q'). La surface de Riemann T n'est pas un ensemble de points, elle est le *lieu d'un point générique* O ; générique, ce point l'est au double sens suivant : point spécifiable en O' , point dont la variabilité *engendre* le lieu. C'est bien par engendrement et non par construction qu'une fonction peut susciter une surface. Lorsque deux grandeurs variables complexes – *complexe* étant ici une déclaration de type et non de domaine – sont liées par une relation, sont donc fonctions l'une de l'autre, on peut envisager deux modes de description. On peut spécifier la valeur de l'une des grandeurs variables et étudier la ou les valeurs associées de l'autre, point de vue statique et presque ensembliste qui permet de formuler le problème de la multivocité comme sous-détermination. On peut aussi spécifier *en même temps* deux valeurs qui se correspondent et étudier dans quelle mesure cette codétermination spécifique s'étend à la covariabilité, ce qui peut se faire de deux façons. La variabilité d'une grandeur de type complexe a ceci de spécifique qu'elle est bidimensionnelle : déclarer qu'une valeur spécifique appartient au lieu d'une grandeur complexe c'est affirmer que le passage de la spécification à la variabilité engendre un continu bidimensionnel. Dans le problème d'inversion, si ω est fonction holomorphe de z , Riemann démontre qu'à la variabilité bidimensionnelle de z répond en général, du fait des hypothèses d'holomorphicité, une variabilité bidimensionnelle de ω : pas de pli, pas de coupure. Le point Q associé à ω n'est ni un point du plan ni un point d'une surface au-dessus du plan, du moins pas dans la mesure où cette formulation utilise le couple ensemble/élément ; le point Q est à la fois point d'un plan complexe et point d'une surface au-dessus de ce plan complexe, seul le regard s'est décalé : fixer z pour regarder ensuite la ou les valeurs de ω c'est voir Q dans un plan, fixer en même temps des valeurs de ω et de z qui se correspondent dans la dépendance fonctionnelle c'est voir Q sur la surface au-dessus du plan. Le fait qu'à une valeur de ω correspondent plusieurs valeurs de z structure le lieu de Q en feuillet ; c'est ce plan Λ , nu puis structuré par une fonction qui est la surface de Riemann au-dessus de Λ . Une autre manière de rendre compte de la codétermination/covariabilité de deux grandeurs complexes, i.e. de deux points génériques à variabilité bidimensionnelle, est d'étudier les liens entre leurs variabilités unidimensionnelles : lorsque l'une suit un chemin elle entraîne l'autre, c'est ce que nous reformulons en terme de relèvement de chemins. Alors

que la notion de variabilité bidimensionnelle élémentaire ne renvoie qu'à des images locales (faute d'un meilleur terme), l'étude des cheminements codéterminés peut permettre un passage vers le global. Cette possibilité n'est cependant guère exploitée par Riemann dans les passages spécifiquement consacrés à la notion de surface étendue sur un plan, où les chemins servent essentiellement à mieux caractériser le comportement local aux points de ramification ; la figure du « petit circuit » autour d'un point de ramification y fait communiquer les aspects uni- et bidimensionnels, non le local et le global. Cette dialectique entre la variabilité bidimensionnelle et le cheminement unidimensionnel se reflète du côté de l'analyse dans l'aller-retour entre domaine (et intégrale de surface) et contour (et intégrale curviligne), mais le statut de cet effet de miroir nous semble problématique. Ce statut diffère selon qu'on considère la surface de Riemann au-dessus d'un plan complexe comme un objet, une méthode ou un point de vue. Sans entrer dans des débats épistémologiques, nous entendons la donnée comme objet dans un sens plutôt ensembliste, objet comme ensemble de points structuré, à construire et à étudier : notre analyse vise à démontrer que cette lecture est sans doute pertinente du point de vue mathématique mais pas dans une perspective historique. Si la surface de Riemann n'est pas un objet à étudier, peut-être est-elle alors un moyen d'étude ? Sans doute oui, et en tant qu'aspect d'une méthode d'étude des fonctions holomorphes ou méromorphes multivoques elle s'inscrit dans un unique cadre massivement organisé autour du couple uni/bi-dimensionalité. Mais cet aspect pragmatique, dont nous verrons qu'il domine une partie de la tradition riemannienne dans la seconde moitié du 19^e siècle, ne nous semble pas épuiser la question du statut de la surface étendue au-dessus d'un plan complexe. Cette lecture pragmatique en termes de méthode ne rend par exemple pas compte du lien que Riemann indique au paragraphe 22, sans l'explicitier, avec le *point de vue* intrinsèque de Gauss. Dans sa dissertation sur les surfaces courbes de 1828, Gauss ouvrait la voie à l'étude de surfaces, certes au départ données comme surfaces dans l'espace, mais dont on découvrait qu'une partie de leurs propriétés ne dépendaient pas vraiment de cette réalisation spatiale ; que ces propriétés intrinsèques étaient celles de la surface comme objet purement bidimensionnel ; que le mode de description adapté était la représentation paramétrique, les trois variables d'espace x , y et z (et le ds^2 euclidien associé) se voyant remplacées par deux variables u et v (et un $ds^2 = E(u,v) du^2 + 2G(u,v)dudv + F(u,v)dv^2$), le caractère géométriquement bidimensionnel de la surface *en soi* se traduisant analytiquement par l'étude au moyen de deux variables libres. Le rapprochement entre le point de vue intrinsèque sur les surfaces formulé par Gauss et la surface au-dessus d'un plan complexe comme point de vue sur la variabilité complexe formulé par Riemann renvoie ainsi à un

aspect purement dimensionnel dont on voit qu'il éloigne la surface de Riemann de l'idée d'un objet donné globalement et destiné à des études globales. Un autre élément du point de vue intrinsèque de Gauss ne semble, lui, pas repris par Riemann : est intrinsèque une propriété d'une surface qui est invariante par certains changements de variables, ceux conservant le ds^2 ; ou encore : une grandeur a un sens en géométrie intrinsèque si elle ne dépend que des coefficients du ds^2 . Il n'est certes pas impossible de rapprocher ces éléments du point de vue intrinsèque gaussien – changements de carte et invariance – de certains points du texte de Riemann : utilisation d'une carte adaptée en un point de ramification, caractère intrinsèque de l'ordre d'un pôle d'une fonction méromorphe. Pour n'être pas impossible, ce rapprochement ne nous semble toutefois pas immédiat ; deux éléments s'interposent. Premièrement, si, comme nous le pensons, une surface au-dessus d'un plan complexe est un *point de vue* sur l'organisation du plan suscitée par une fonction donnée, on voit que la fonction – la carte globale – est première par rapport à la surface, ce qui n'invite pas à une réflexion sur les invariances par changement de carte. Deuxièmement, le changement local de carte est ici avant tout désingularisation, et cette *subordination* à la question des points singuliers structure encore, on le verra, le travail de Neumann sur les changements de carte.

II. *Théorie des fonctions abéliennes* (1857).

1. Position du problème.

Après six années de recherche, Riemann montre tout le parti que l'on peut tirer dans le cas des fonctions abéliennes de la théorie, parfois très générale, présentée en 1851. Il s'agit de fonctions, en général multivoques, qu'on peut se donner comme des intégrales curvilignes $F(z) = \int_{z_0}^z R(s, z) dz$ où R est une fonction rationnelle à deux variables et s une fonction algébrique de z , définie implicitement par une équation polynomiale $F(s, z) = 0$. Le problème présente plusieurs niveaux de complexité, chacun apportant son lot de points singuliers spécifiques et son degré de multivocité : au premier niveau une fonction algébrique de z , la fonction s , dont la théorie des surfaces au-dessus du plan mise en place en 1851 permet de bien rendre compte du fait de la finitude du nombre de feuillettes, de la finitude du nombre et de l'ordre des points de ramification ; au second niveau l'étude du corps des fonctions rationnelles en s et z , d'ailleurs susceptible d'une étude purement algébrique en tant qu'extension de \mathbf{C} de degré de transcendance 1, ou, en termes moins intrinsèques puisqu'un élément z est distingué, d'extension algébrique du corps $\mathbf{C}(z)$. Ces fonctions sont désignées dans le texte de Riemann comme les fonctions univoques « ramifiées comme la surface T » [Riemann 1898 117]. Au troisième, niveau le passage aux intégrales abéliennes, que Riemann nomme fonctions abéliennes ou fonctions ω , fait quitter le strict domaine des fonctions méromorphes en faisant apparaître des singularités logarithmiques ; en l'absence même de singularité logarithmique, les intégrales le long de chemins fermés ne s'annulent pas nécessairement mais sont toujours combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs d'un certain nombre de quantités complexes fixes, en nombre pair, nommées *périodes* de l'intégrale abélienne.

Notre objectif n'est bien entendu pas de rendre compte de l'histoire de cette théorie pour elle-même, ni dans son lien avec d'autres branches des mathématiques. Sur ces aspects historiques et mathématiques, on consultera avec profit l'article de Christian Houzel [Houzel 2002 81-202], le dernier chapitre du classique de Claude Chevalley [Chevalley 1951], ou encore le vif exposé que David Mumford consacre à la théorie des courbes algébriques [Mumford 1975]. Nous ne rendrons pas compte de ce Mémoire de Riemann avec autant de détails que nous l'avons fait pour la dissertation de 1851, et n'aborderons pas sa section II, consacrée aux fonctions ϑ . Ce Mémoire nous importe à au moins deux titres. Premièrement, par ses

méthodes et ses résultats, il inaugure une tradition géométrique en théorie des fonctions algébriques et abéliennes au sein de laquelle, par explicitation, reformulation et approfondissement, se forment des outils fondamentaux de l'analyse sur les variétés. Deuxièmement, cette même tradition voit émerger une strate *méta* constituée autour du couple local/global ; si cette explicitation est historiquement assez tardive, nous voulons montrer en quoi elle s'appuie sur les résultats de ce Mémoire de 1857 qui, bien plus que les conceptions générales de 1851, nous semblent révéler une forme de ce que nous avons appelé la légalité du lieu.

2. Une nouvelle formulation du problème.

Le Mémoire est organisé en deux sections, précédées d'un long avant-propos dont les trois premiers paragraphes reprennent, reformulent et dans certains cas redémontrent les principales notions et résultats de la dissertation de 1851. Dans la même perspective qu'alors, un des objectifs de Riemann est d'étudier les fonctions abéliennes à partir de propriétés caractéristiques et non à partir d'une écriture particulière : les différentes expressions analytiques des fonctions abéliennes sont des résultats auxquels la théorie aboutit et non le point de départ ; les résultats ne sont pas obtenus par calcul. Dans ces préliminaires, le paragraphe 3 redémontre le théorème principal d'existence et d'unicité qui fondait l'approche par conditions relatives aux contours et discontinuités ; en lien avec la formule de Green-Riemann, le paragraphe 2 précise la notion d'ordre de connexion d'une surface en la redéfinissant comme étant d'une unité supérieure au cardinal commun des familles maximales de contours fermés ne formant pas (ni aucune partie d'entre eux) le contour d'encadrement complet d'une partie de la surface. C'est le paragraphe 1 qui contient les reformulations les plus importantes. La surface au-dessus d'un plan y est très explicitement présentée en fin de paragraphe comme un moyen pour donner une représentation univoque⁵ d'une fonction multivoque :

La fonction multiforme admet en chaque point d'une surface, qui en représente ainsi le mode de ramification, *une seule* valeur déterminée, et peut donc être regardée comme une fonction parfaitement déterminée du lieu (d'un point) sur cette surface. [Riemann 1898 93]

⁵ Nous utiliserons systématiquement les termes « univoque » et « multivoque », plus proches des termes allemands ; on notera toutefois que dans les textes français ce sont « uniforme » et « multiforme » qui sont les plus courants.

L'essentiel du paragraphe est consacré à une exposition du problème de la multivocité des fonctions holomorphes, exposition sans équivalent en 1851. Riemann commence par rappeler les équations de Cauchy-Riemann puis écrit :

Comme conséquence de cette équation différentielle, en vertu d'un théorème connu, la grandeur w est représentable par une série procédant suivant les puissances entières de $z-a$, de la forme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (z-a)^n$$

pourvu que dans le voisinage de a elle admette *une* valeur déterminée variant d'une manière continue avec z ; et cette possibilité de représentation a lieu jusqu'à une distance de a , c'est-à-dire une valeur de $\text{mod.}(z-a)$, où il se présente une discontinuité.

[Riemann 1898 90]

Ce sera l'unique apparition dans ce Mémoire de ce type de développement, dont Riemann décrit avec soin le domaine de validité. Toutes les décompositions ou réécritures obtenues par la suite seront des décompositions ou réécritures valides dans tout le domaine d'étude, sur toute la surface de Riemann. La décomposition en série entière n'est évoquée que pour obtenir, par la méthode des coefficients indéterminés, le résultat d'unicité suivant, dans lequel on remarquera le caractère un peu vague du terme « portion » (*Theile*):

Une fonction de $x+yi$, qui est donnée en une portion du plan des (x,y) , ne peut être prolongée au-delà d'une manière continue que d'une seule façon. [Riemann 1898 90]

On voit ainsi apparaître une problématique de *prolongement* d'une fonction, éventuellement univoque, donnée dans une portion de plan, problématique absente en 1851. Le résultat d'unicité cité implique que le prolongement le long d'une petite bande issue de la portion dans laquelle la fonction était initialement donnée est « complètement déterminé » [Riemann 1898 90]. C'est donc en termes prolongement analytique le long de chemins que se formule en premier lieu le problème de la multiformité :

(...) d'après la nature de la fonction à prolonger, elle reprendra, ou non, toujours la même valeur pour une même valeur de z , quel que soit le chemin suivant lequel le prolongement a lieu. Dans le premier cas, je nommerai la fonction *uniforme* [*einwerthig*]; (...) dans le second cas, où l'on dira qu'elle est *multiforme* [*mehrwertig*], on doit avant tout, pour saisir la marche [*Verlauf*] de cette fonction, porter son attention sur certains points du plan des z autour desquels cette fonction se prolonge en une autre. [Riemann 1898 90, Riemann 1892 92]

On verra plus loin combien cette introduction du problème de la multivocité à partir de l'unicité du prolongement analytique est proche de la formulation du problème de la théorie des équations différentielles ordinaires, dans le domaine complexe, tel que Riemann le traite en 1857 dans sa *Contribution à la théorie des fonctions représentables par la série de Gauss* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ [Riemann 1898 61-83]. Un peu moins avare d'exemples qu'en 1851, Riemann poursuit en décrivant la « marche » de la fonction $\log(z-a)$, dont la multivocité est traduite en « discontinuité » le long d'une coupure issue du point a : on retrouve ici le mode de traitement de la multivocité géométrique mis en place dans la *Théorie générale*. Notons aussi dans ce passage l'ambiguïté du vocabulaire : est-on face à une ou plusieurs fonction(s), dans quelle mesure la fonction se prolonge-t-elle en « une autre » qui est pourtant elle-même ? Riemann met en place un vocabulaire plus adapté, dans lequel on voit se nouer de façon plus précise le lien entre une fonction et les différentes parties de son domaine :

Pour simplifier les désignations de ces relations, on nommera les divers prolongements d'une fonction pour une même portion du plan des z les *branches* [*Zweige*] de cette fonction, et un point autour duquel une branche de la fonction se prolonge en une autre un *point de ramification* [*Verzweigungsstelle*] de la fonction. Partout où il ne se trouve aucune ramification, la fonction est dite *monodrome* [*monodrom*] ou *uniforme* [*einädrig*]. [Riemann 1898 91, Riemann 1892 90]

Arrêtons-nous un peu longuement sur le caractère non ensembliste de ces notions : sur le plan privé des points de ramification, la fonction n'est pas uniforme au sens ensembliste où à une valeur de la variable correspond une unique valeur de la fonction ; il s'agit ici de comprendre que si l'on se fixe une valeur particulière z' de la variable et une valeur particulière w' de la fonction qui se correspondent, qu'on étend cette co-détermination à une zone bidimensionnelle élémentaire, i.e. qu'on considère non un couple de points mais un élément de fonction holomorphe, alors si l'on restreint la variabilité de z à une zone non seulement ne contenant pas de point de ramification ni n'en entourant, d'aussi loin que ce soit, alors le prolongement analytique le long de chemins détermine une fonction univoque dans ce domaine : on voit bien ce que *veut* dire Riemann lorsqu'on le lit, ce qui ne signifie pas qu'il n'est pas délicat d'expliciter ce qu'il dit ; on sent combien ce travail d'explicitation est porteur de notions de germe de fonction et de domaine simplement connexe, de monodromie locale dans des espaces qui sont localement simplement connexes, de passage à un revêtement défini par des classes d'équivalences de chemins pour obtenir un domaine sur lequel la fonction est globalement monodrome ... lisons pour l'instant ce que Riemann choisit d'écrire en 1857. « partout où il ne se trouve aucune ramification » est la traduction donnée par Laugel de « wo

keine Verzweigung stattfindet » [Riemann 1892 90] ; si la traduction est peut-être un peu excessive, il n'en demeure pas moins que la référence au lieu de validité de la propriété d'uniformité est plus distributive que collectivisante : il est faux de dire que la fonction est uniforme sur le plan privé des points de ramification, il est compréhensible de dire qu'à chaque point qui n'est pas un point de ramification on peut « joindre » (pour reprendre le terme du §14 de 1851) un domaine sur lequel les déterminations ne s'échangent pas par prolongement le long de chemins. La situation est compliquée par le fait qu'une même valeur z' peut représenter à la fois un point de ramification où deux branches de fonctions s'échangent et un point ordinaire pour une troisième branche ; ce n'est donc pas la fonction qui est uniforme ou non au voisinage de z' , c'est une branche de la fonction, ainsi que Riemann l'explique ensuite, dans le cas des fonctions de plusieurs variables complexes. L'emploi du terme « voisinage » est ici explicite :

Une branche d'une fonction de plusieurs grandeurs variables indépendantes z, s, t, \dots est *uniforme* dans le voisinage [*in der Umgebung*] d'un système déterminé de valeurs $z = a, z = b, t = c, (\dots)$ [Riemann 1898 91]

La référence au domaine de validité de la propriété énoncée est encore délicate dans le passage suivant, sans aller jusqu'à compromettre l'intelligibilité du contenu :

D'après un théorème connu, dont on a parlé précédemment, la propriété d'être uniforme revient pour une fonction à la possibilité d'être développée suivant les puissances entières positives et négatives des accroissements des grandeurs variables, et la ramification de la fonction revient à la non-possibilité d'un tel développement. [Riemann 1898 92]

L'analyse des passages précédents et la référence aux « accroissements » (*Aenderungen*) invite à une lecture locale de cet énoncé ; si le terme « voisinage » n'apparaît pas ici il apparaissait explicitement deux pages avant dans le rappel du « théorème connu » à une variable. En toute rigueur, Riemann devrait sans doute dans ce dernier passage parler d'uniformité d'une branche d'une fonction et non d'uniformité d'une fonction.

Le paragraphe s'achève par la description bien connue de la surface de Riemann, que nous rappelons ici avant de faire deux remarques.

Concevons une surface étendue sur le plan des (x,y) et coïncidant avec lui (ou si l'on veut un corps infiniment mince étendu sur ce plan), qui s'étend autant que la fonction sera prolongée, cette surface sera donc également étendue d'avantage. En une région du plan où se présentent deux ou plusieurs prolongements de la fonction, la surface sera double ou multiple. Elle se composera alors de deux ou de plusieurs feuillets dont

chacun correspond à une branche de la fonction. Autour d'un point de ramification de la fonction, un feuillet de la surface se prolongera en un autre feuillet, et de telle sorte que, dans le voisinage de ce point, la surface pourra être regardée comme un hélicoïde dont l'axe est perpendiculaire au plan des (x,y) et dont le pas de vis est infiniment petit. Mais lorsque la fonction, après que z a décrit plusieurs tours autour de la valeur de ramification, reprend sa valeur initiale (comme, par exemple, $(z-a)^{m/n}$, m, n étant premiers entre eux, après n tours décrits par z autour de a), on devra alors supposer que le feuillet supérieur de la surface se raccorde avec le feuillet inférieur en passant à travers le reste des feuilles. [Riemann 1898 92]

Comme première remarque notons que, de même que la multivocité des fonctions a été introduite en début de paragraphe à partir du prolongement analytique, la surface au-dessus du plan des z est en 1857 une surface qui s'étend à mesure que la fonction se prolonge ; ce type de description était absent en 1851. Ce passage établit un petit dictionnaire permettant de traduire le langage des fonctions en langage des surfaces au-dessus du plan, traduction qui résulte moins, on l'a vu, d'une construction que d'un changement de point de vue : prolongement de fonction / extension de la surface, branche de fonction / feuillet de surface au-dessus du plan, point de ramification d'une branche de la fonction en une valeur particulière z' / point de ramification de la surface en un point au-dessus de z' . Une deuxième remarque concerne l'image de l'hélicoïde dont le pas de vis est « infiniment petit » : on est passé sans heurt du « petit circuit » de 1851 au pas de vis « infiniment » petit ; l'aller-retour entre des niveaux qu'on souhaiterait distinguer comme, respectivement, local et infinitésimal, est ici insensible. Si la surface est un corps « infiniment mince », on peut certes voir dans cette formulation un écho de la description par Gauss du point de vue intrinsèque sur les surfaces plongées, on peut aussi y voir une conception *entièrement* infinitésimale de la surface de Riemann : la surface comme plan compté avec multiplicité ; ses feuillet, qui ne sont séparés les uns des autres par aucun espace (faute d'espace ambiant) peuvent être vus comme séparés par des écarts infinitésimaux, ce qui semble d'ailleurs rendu nécessaire par leur raccordement le long d'hélicoïdes dont l'axe est perpendiculaire au plan des (x,y) et le pas de vis infiniment petit. On retrouvera cette description infinitésimale de la surface de Riemann d'une fonction algébrique de z dans le traité de Hensel et Landsberg en 1901, qui l'introduisent ainsi :

Concevons donc n plans numériques placés les uns au-dessus des autres à une distance infiniment petite (...) de sorte que leurs origines et leurs axes se superposent (...).⁶

[Hensel, Landsberg 1902 91]

Concluons sur un bilan provisoire des remarques de forme. Une formulation précise du problème de la multivocité nécessite, au-delà de l'enchaînement des énoncés mathématiques, la mise en place d'un vocabulaire adapté faisant se répondre propriétés des objets fonctionnels (fonction, branche ...) et des domaines d'existence ou de validité. Le problème se formule naturellement en termes de cheminement, en termes unidimensionnels donc. Le passage à une description bidimensionnelle en termes de branches au-dessus d'un domaine plan présente par contre des difficultés intrinsèques et nécessite des innovations terminologiques, d'ailleurs empruntées à Cauchy [Cauchy 1882-1974 378]. Les références au lieu sont sans doute à lire de manière distributive et non collectivisante : en l'absence de description explicite du lieu de validité – description explicite qui se présente parfois, par exemple, dans le théorème sur le développement en série entière des fonctions uniformes – la propriété est affirmée *en chaque point* du lieu et non *sur* le lieu. L'affirmation en un point est toujours une affirmation locale en ce point, il n'est pas nécessaire qu'un terme comme « local » ou « au voisinage » (*in der Umgebung, in der Nähe*) vienne l'expliquer ; pour n'être pas nécessaires, ces termes (hormis « local » bien sûr) sont toutefois parfois présents chez Riemann. Cette référence implicite, distributive et locale, constitue ce que nous nommerons le *point de vue universellement local* en analyse. On remarque enfin que des propriétés peuvent être formulées et reformulées indifféremment en des termes qui nous semblent relever parfois d'un niveau local et parfois d'un niveau infinitésimal : la frontière n'est pas nette, en tout cas pas marquée, qui séparerait les petits morceaux des morceaux infiniment petits, les chemins épaissis en des bandes minces des chemins épaissis en des bandes infiniment minces, les petits circuits des pas de vis infiniment petits. En ce sens, le choix du terme « local » dans l'expression « point de vue universellement local » invite à l'anachronisme.

3. Surface d'une fonction algébrique : adaptations et innovations.

En un sens on peut relire toute la théorie de 1851 à la lumière des problèmes d'intégrales abéliennes. Choisir d'étudier ces dernières non comme des expressions mais comme des fonctions numériques, multivoques, définies par des intégrales curvilignes depuis un point

⁶ *Wir denken uns also n in unendlich kleinem Abstände übereinander liegende Zahlenebene (...) so gegeben, dass ihre Anfangspunkte und ihren Achsen übereinander fallen (...).*

fixe vers un point variable pose des problèmes de définition des chemins d'intégration ; la surface de Riemann telle que définie en 1851 fournit exactement l'outil d'uniformisation géométrique d'une fonction algébrique d'une variable complexe permettant de donner un sens non ambigu aux intégrales curvilignes de telles fonctions. Toutefois, le développement de la théorie des fonctions abéliennes va enrichir sensiblement la notion de surface au-dessus du plan : enrichissement en compréhension (*Intension*) plus qu'en extension, pour reprendre la formulation d'Erhard Scholz [Scholz 1980].

i. Adaptations.

On trouve tout d'abord, dans les trois premiers paragraphes de la section I, une série de légères modifications. Une première concerne la notion de contour. Une fonction s définie implicitement par une relation polynomiale $F(s,z) = 0$ de degré n en s , prend, en général, n valeurs pour chaque valeur de z ; son domaine d'extension est tout le plan de z , sans qu'un contour se présente naturellement. Riemann propose d'adjoindre au plan un point à l'infini de manière à en faire une « surface fermée » [Riemann 1898 108] (*geschlossene Fläche*) [Riemann 1892 102], ce point ∞ étant vu comme l'unique contour de la surface. Comme en 1851 un système de sections transverses permet de transformer la surface initiale T en une surface simplement connexe T' , dont chaque portion de contour contient deux rives dans T , rives que Riemann nomme le bord positif et le bord négatif. Un raisonnement rapide montre que l'ordre de connexion de la surface est du type $2p+1$ car le nombre de sections à pratiquer est pair $2p$ (sans que p soit ici nommé le « genre », terme dû à Clebsch), et que T' possède un contour total d'un seul tenant. Une deuxième modification concerne la notion d'infiniment petit. Lorsqu'en 1851 Riemann avait besoin d'un infiniment petit de premier ordre il posait explicitement, si z' n'est pas un point de ramification, $r = z-z'$, utilisant ainsi la carte globale comme étalon puis indiquant les modifications à apporter en un point de ramification. Une formulation beaucoup plus intrinsèque est donnée en 1857 :

Pour simplifier ce qui suit, je dirai qu'une fonction est *infiniment petite du premier ordre en un point de la surface* T lorsque son logarithme augmente de $2\pi i$, quand on décrit dans le sens positif le contour d'une portion de surface renfermant ce point où la fonction reste finie et différente de zéro. [Riemann 1898 109]

Cette définition unique est alors explicitée selon que le point est ordinaire ou de ramification. Troisièmement, la détermination d'une fonction par conditions relatives aux contours et aux discontinuités prend dans ce cadre une allure un peu particulière. L'objectif étant de définir la

classe de fonctions à étudier, nommée classe des fonctions ω , indépendamment d'un mode d'écriture particulier – par exemple comme intégrales de fonctions rationnelles en s et z – Riemann impose *a priori* aux fonctions sur la surface au-dessus du plan d'être définies par des discontinuités du type $\varphi = A \log r + B r^{-1} + C r^{-2} \dots$, où r est un infiniment petit du premier ordre au point singulier ε . Les valeurs sur le contour ne sont pas données par une fonction continue sur le contour de T' , mais simplement par la « discontinuité » que le franchissement de telle portion de contour va faire subir à la fonction multivoque :

Les constantes additives $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(2p)}$, dont s'accroît une pareille fonction en passant du bord négatif au bord positif des sections transverses, seront dites les *modules de périodicité*. [Riemann 1898 111]

Rappelons que le passage de la fonction $\alpha + \beta i$ de x, y à la fonction $u + vi$ de z conserve la partie réelle des modules de périodicité mais affecte la partie imaginaire d'une manière déterminée : on dispose donc de $2p$ degrés de libertés (au sens réel). La multivocité due à la présence de pôles logarithmiques est aussi traitée géométriquement en terme de « discontinuité » lors du franchissement d'une nouvelle série de coupures, reliant simplement dans T' tous les points singuliers logarithmiques à un point ordinaire arbitrairement choisi.

ii. Innovation : la surface dépliée.

Ces reformulations ne sont pour l'instant que des variantes par rapport à la présentation de 1851, mais elles débouchent sur une construction inédite, que nous nommerons la *surface dépliée* ; nous la présentons ici sans respecter l'ordre du texte riemannien. On sait que T' étant connexe elle est conformément équivalente à un disque plan : Riemann l'a établi en 1851 au paragraphe I.21 et il le redémontre rapidement au paragraphe I.7, mais cette application n'est pas réalisée par une des fonctions de la classe ici considérée. Au paragraphe I.12 Riemann utilise une application de T' dans le plan complexe, application conforme dans ses plus petites parties en général et non nécessairement bijective, mais permettant d'obtenir une nouvelle représentation de la classe des fonctions étudiées. Cette application est donnée par une intégrale abélienne de première espèce, ce qui garantit que l'image ne s'étend pas à l'infini, et non par la fonction z :

(...) on introduira, comme grandeur variable indépendante dans un système de fonctions $(2p+1)$ fois connexes à même ramification, non une de ces fonctions mêmes, mais une intégrale partout finie d'une telle fonction. Les valeurs que prend la fonction

w de z sur la surface T' seront représentées géométriquement par une surface recouvrant une ou plusieurs fois une partie finie du plan des w , surface que nous désignerons par S et qui est une représentation (semblable en les plus petites parties) de la surface T' . [Riemann 1898 132]

Une telle intégrale de première espèce ne peut être univoque, les deux rives d'une même coupure transverse se voient donc appliquées sur deux courbes distinctes ; plus précisément, si la constante complexe k est le module de périodicité de la fonction w relativement à une section transverse de T , les deux rives de cette section sont représentées dans le plan des w par deux courbes, l'une translaturée de l'autre selon le vecteur d'affixe k :

Comme la valeur sur le bord positif de la $v^{\text{ième}}$ section transverse surpasse de la constante additive $k^{(v)}$ la valeur qu'elle prend sur le bord négatif, le contour d'encadrement de S est formé de paires de courbes parallèles qui sont la représentation de la même portion du système de sections qui figurent l'encadrement de T' . [Riemann 1898 132]

Riemann établit ensuite l'équivalence entre la classe des fonctions méromorphes (univoques) sur T , dont il a été démontré qu'elle coïncide avec la classe des fonctions rationnelles en s et z , et la classe des fonctions de w vérifiant une propriété de périodicité :

Les fonctions rationnelles de s et z sont alors les fonctions de w qui, pour chaque point de S , ont une valeur *unique* variant d'une manière continue partout où elles ne deviennent pas infinies, et qui reprennent la même valeur aux points correspondants sur les portions parallèles d'encadrement. Elles forment donc un système de fonctions de w à même ramification et $2p$ -uplement périodiques. [Riemann 1898 133]

Soulignons toutefois qu'il ne s'agit pas ici de l'uniformisation de la surface de Riemann par des fonctions univoques, méromorphes et périodiques d'une simple variable complexe : le lieu de la nouvelle variable w n'est pas un domaine plan mais une surface ramifiée et à plusieurs feuillets. Cette surface S joue un rôle d'intermédiaire entre la surface T et la version découpée simplement connexe T' ; elle a l'avantage de posséder un véritable contour, qui plus est d'un seul tenant, au-dessus du plan des w .

4. Légalité du lieu : des théorèmes globaux.

Dans notre analyse de la dissertation de 1851 nous reconnaissons le caractère syntaxiquement global des énoncés sans aller jusqu'à reconnaître dans la conception d'ensemble de la théorie une perspective globale au sens où elle aurait distingué une strate particulière de propriétés

communes à des familles d'objets soumis à la contrainte de « vivre » sur un espace premier, absolu, leur imposant une légalité spécifique. Cet aspect de légalité primitive du lieu est par contre central dans l'exposé de 1857 sur les fonctions abéliennes dans lequel sont étudiées les propriétés communes aux fonctions d'une famille caractérisée, entre autres, par une surface de Riemann au-dessus du plan, surface qui se donne par son genre p et la répartition et l'ordre de ses points de ramification au-dessus d'un plan complexe complété par un point à l'infini. Présentons quelques-uns de ces résultats globaux. Précisons avant toute chose que notre emploi dans ce paragraphe du terme « global » ne renvoie à aucun terme équivalent chez Riemann, ni notre analyse en terme de légalité primitive du lieu à une analyse ou une remarque dans le texte, hormis en un endroit que nous signalerons bien sûr avec soin.

Riemann utilise tout d'abord librement et sans démonstration des résultats globaux du type : une fonction univoque de z n'ayant (y compris en ∞) que des pôles est une fonction rationnelle de z ; une fonction univoque de z n'ayant comme singularité qu'un pôle en l'infini est une fonction entière, un polynôme en z [Riemann 1898 116 et 125] ; une fonction univoque de z n'ayant aucune singularité ni à distance finie ni à l'infini, ou comme l'écrit Riemann « reste partout uniforme et finie » [Riemann 1898 136] est égale à une constante. Ce type d'énoncés était déjà évoqué en 1851, non à titre d'exemples de théorèmes globaux sur la sphère de Riemann, mais à l'appui de la thèse selon laquelle les fonctions peuvent être caractérisées par des conditions relatives aux contours (ici aucun) et discontinuités (ici, nature polaire et disposition) aussi bien que par une expression de calcul.

Le point de départ effectif de la théorie consiste en la série de théorèmes de décomposition du paragraphe I.4, dans lesquels on voit le genre p jouer un rôle fondamental. Une application directe du théorème d'existence et d'unicité d'une fonction donnée par conditions de contours et de discontinuités permet d'établir que toute fonction ω partout finie (*allenthalben endlich* [Riemann 1892 105], i.e. sans singularité ni polaire ni logarithmique, sur T peut s'écrire, à une constante additive près, comme une combinaison linéaire à coefficients complexes de p d'entre elles :

$$\omega = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \dots + \alpha_p\omega_p + \text{const. [Riemann 1898 112]}$$

Ces fonctions, les intégrales de première espèce, sont multivoques si elles ne sont pas constantes. L'existence de la décomposition fonctionnelle est ramenée à une question purement numérique en termes de périodes : si les combinaisons linéaires des ω_p permettent d'engendrer numériquement tout système de période le long des $2p$ coupures alors elles engendrent toutes les fonctions. On voit comment la démarche par conditions relatives aux

contours et aux discontinuités permet d'établir un résultat de décomposition globale (i.e. valide pour toute valeur de la variable) sans passer par le niveau local, sans passer donc par des questions de passage du local au global. Un résultat du même type est donné pour les intégrales de deuxième espèce, nous dirions multivoques et méromorphes. Par exemple, toute fonction ayant en un unique point donné ε un pôle simple s'écrit :

$$t = \beta t^0(\varepsilon) + \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \dots + \alpha_p \omega_p + \text{const. [Riemann 1898 113]}$$

où t^0 est une fonction de ce type et β une constante arbitraire. Le cas des fonctions à pôle logarithmique fait apparaître une autre contrainte globale que celle liée au genre p . Rappelons qu'au paragraphe précédent Riemann avait décrit le type de comportement autorisé, au sein de sa classe de fonctions, en un point singulier par la forme $\varphi = A \log r + B r^{-1} + C r^{-2} \dots$, A étant, pour le dire comme Weyl, le résidu de la différentielle méromorphe dont on étudie l'intégrale ; nous utiliserons le terme de résidu dans ce cas. Soucieux d'établir un système de conditions indépendantes caractérisant une fonction particulière de la classe, Riemann remarque que la donnée des singularités est soumise à une contrainte lorsqu'on les considère toutes d'un seul regard :

Il est aisé de reconnaître que cela est toujours possible [de trouver une fonction satisfaisant à ce système de conditions relatives aux contours et aux discontinuités] quand la somme de toutes les grandeurs A est égale à zéro, et de plus n'est possible que sous cette condition, car c'est seulement en ce cas que la fonction, après un circuit décrit le long du système des lignes l , peut reprendre de nouveau sa précédente valeur. [Riemann 1898 111]

Rappelons que les lignes l sont les coupures reliant dans T les points à singularité logarithmique à un point ordinaire fixe. Le circuit le long de ce système de lignes (*nach einem Umlaufe um das System der Linien l* [Riemann 1892 105]) n'est pas un petit circuit entourant un point particulier d'aussi près que l'on veut. C'est la trivialité du prolongement analytique le long d'un grand circuit qui implique une contrainte globale, la nullité de la somme des résidus, on retrouvera ce mode d'engendrement de relations globales dans le travail sur les fonctions représentables par la série hypergéométrique. Nous verrons ce que les lecteurs de Riemann penseront du caractère « aisé » à « reconnaître » de cette condition, nécessaire et suffisante.

Ces théorèmes de décomposition fonctionnels globaux permettent des raisonnements linéaires, ainsi celui qui aboutit à la forme générale – au sens de cas général – de ce qui deviendra le théorème de Riemann-Roch, donnant la dimension de l'espace vectoriel des

fonctions méromorphes *univoques* (i.e. dont les modules de périodicité sont tous nuls) sur la surface, dont les m pôles simples $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ sont donnés de position ; partant de la forme générale $s = \beta_1 t_1 + \dots + \beta_m t_m + \alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_p \omega_p + \text{const.}$ dans laquelle les fonctions t_i et ω_i sont fixées et les constantes libres :

Les $2p$ modules de périodicité de cette fonction sont des fonctions linéaires homogènes des $p+m$ grandeurs α et β . Lorsque $m \geq p+1$, parmi les grandeurs α et β , $2p$ d'entre elles peuvent donc être déterminées comme fonctions linéaires homogènes de celles qui restent, de sorte que les modules de périodicité sont tous nuls. La fonction renferme alors encore $m-p+1$ constantes arbitraires (...).[Riemann 1898 115]

Lorsqu'on ne se donne pas la position des m pôles on gagne m constantes, envers lesquelles la dépendance n'est toutefois pas linéaire.

Un autre exemple de théorème global donne, quant à lui, lieu à une des rares explicitations *méta* du texte. La surface T étant la surface au-dessus du plan des z associée à la fonction s définie implicitement par $F(s,z) = 0$, polynôme de degré n en s et dont le coefficient de s^n est de degré m en z :

Les propriétés des fonctions ω dépendent essentiellement de l'ordre de connexion de la surface T . Pour les trouver, proposons-nous d'abord la détermination du nombre des points de ramification de la fonction s . [Riemann 1898 119]

La lecture n'est donc pas ordonnée selon un couple local/global – ce qui ne surprend pas en l'absence de niveau local pertinent dans le dispositif riemannien – mais elle articule deux familles de propriétés, les propriétés analytiques de ramification⁷ et les propriétés, nous dirions topologiques, d'ordre de connexion. Cette remarque de Riemann est précisée un peu plus loin, à propos du même résultat :

Cette relation, indépendante au fond de toute relation métrique et qui se rapporte à l'*analysis situs*, peut se déduire pour la surface T comme il suit. [Riemann 1898 123]

Cette lecture d'un résultat, ici encore à établir, en termes de correspondance entre deux familles de propriétés de types distincts se reflète dans la présentation de la démonstration en deux paragraphes, le paragraphe 6 (section 1) consacré à un calcul reposant sur les propriétés analytiques du polynôme F étudiées au moyen de son développement de Taylor, le paragraphe 7 (section 1) consacré à l'évaluation d'une même grandeur par une intégrale curviligne traduisant le lien entre T et T' , donc l'ordre de connexion. Le problème est de déterminer le nombre de points de ramification de la surface T , en les supposant tous simples (seuls deux

⁷ Du moins vues ici comme analytiques plutôt qu'algébriques.

feuillet s'y réunissent) ; Riemann note w le nombre de ramifications simples effectives et $2r$ le nombre de celles qui se détruisent. Pour illustrer ce point par un exemple qui n'est pas chez Riemann, si s est définie par $s^2 = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)$, la surface possède trois points de ramification simple effectifs si les a_i sont deux à deux distincts ; elle ne possède qu'un seul point de ramification effectif et deux points de ramification se détruisant si deux des a_i coïncident en demeurant différents du troisième. L'étude d'*Analysis situs* du paragraphe 7 utilise la représentation conforme de T sur un disque plan et l'évaluation de l'ordre total des zéros et des pôles calculée par formule des résidus appliquée à une dérivée logarithmique. La confrontation des résultats des deux paragraphes permet d'établir la formule

$$p = (n-1)(m-1) - r \quad [\text{Riemann 1898 124}].$$

Signalons une autre utilisation de ces méthodes de calcul des résidus au paragraphe I.12 où une intégration sur le contour d'encadrement de la surface dépliée S permet d'établir que les intégrales uniformes de deuxième espèce prennent chaque valeur complexe un même nombre de fois :

Si une telle fonction z est infinie du premier ordre en n points de S et n'est discontinue nulle part ailleurs, elle prend alors chaque valeur complexe en n points de S . [Riemann 1898 133]

La restriction au cas des fonctions méromorphes n'ayant que des pôles simples permet opportunément d'évacuer les problèmes de multiplicité pour donner au résultat un caractère plus ensembliste qu'à l'accoutumée.

Terminons rapidement sur deux autres résultats globaux. Riemann établit au paragraphe I.5 que toute fonction méromorphe sur la surface T est fonction algébrique de z , i.e. lui est lié par une relation polynomiale. La connexité de la surface implique que le polynôme de dépendance construit par Riemann est une puissance d'un polynôme irréductible : autre exemple de lien entre propriétés topologiques et propriétés analytiques, d'ailleurs non relevé comme tel par Riemann. Il est établi au paragraphe I.8 que si T est la surface de la fonction algébrique s et z , toute fonction méromorphe univoque sur T n'ayant que des pôles simples peut s'écrire comme fonction rationnelle en s et z ; le raisonnement est algébrique et procède en établissant l'égalité du nombre de constantes arbitraires dont les deux familles de fonctions dépendent linéairement. Pour toute fonction ω la dérivée $\frac{d\omega}{dz}$ est méromorphe univoque sur T , d'où la possibilité de représenter toute fonction ω par une intégrale de fonction rationnelle en s et z (§I.9).

5. Corps de fonctions, classes de « surface au-dessus » : quel référent pour une théorie globale ?

La *Théorie des fonctions abéliennes* introduit la notion de transformation birationnelle et de classe d'équations algébriques. Nous voudrions montrer que ces notions introduisent dans la théorie un niveau de complexité supplémentaire qui, à long terme, débouchera sur la distinction entre structure de variété topologique et de variété analytique complexe, mais à court et moyen terme va brouiller un peu la lecture de la théorie et jouer contre une explicitation en termes de local et de global.

Nous avons brièvement analysé dans le texte de 1851 le lien entre surface au-dessus d'un plan complexe (§5) et surface de Riemann au-dessus d'un plan complexe associée à une fonction à valeur complexe (§15). Le jeu entre ces deux notions est ici repris et progressivement complexifié. Au paragraphe I.1 Riemann explique que si s est une fonction algébrique de z , la relation de dépendance étant de degré n en s , alors la surface associée est une surface sans contour à n feuillettes au-dessus du plan des z . Au paragraphe I.3 est formulé l'objectif du Mémoire : étudier les fonctions de la classe ω sur une surface T sans contour au-dessus du plan des z , sans préjuger du fait que cette surface est celle d'une fonction algébrique de s ; la surface est bien ici au-dessus d'un plan mais pas la surface d'une fonction. Il est établi au paragraphe I.5, on l'a signalé plus haut, que toute fonction univoque méromorphe sur T est une fonction algébrique de z , ce qui ne signifie pas que T soit la surface associée à la fonction s de z : Riemann montre que la surface uniformisant s , tout en recouvrant le plan des z , peut elle-même être recouverte strictement par la surface T . La classe des fonctions ainsi doublement caractérisée est regroupée sous l'appellation de fonctions « ramifiées comme la surface T » [Riemann 1898 117], c'est-à-dire comme elle l'est au-dessus du plan des z . C'est ce qu'en version algébrique intrinsèque on nommerait un corps, extension de \mathbf{C} de degré de transcendance 1. Aux paragraphes I.6 et I.7 l'étude repart d'une équation algébrique de dépendance entre deux grandeurs variables complexes s et z pour établir le lien entre genre de la surface T associée à s au-dessus du plan des z et degrés en s et z du polynôme de départ. On part au contraire d'une surface T sans contour au-dessus du plan des z pour démontrer au paragraphe I.7 l'égalité des classes de fonctions méromorphes uniformes sur T de pôles simples donnés de position et de la classe des fonctions rationnelles en z et s' , où s' est une quelconque de ces fonctions. Ce jeu déjà complexe d'allers-retours débouche aux paragraphes

I.11 et I.12 sur la notion d'équivalence birationnelle. C'est une surface T au-dessus du plan complexe des z qui donne le point de départ ; en un bref paragraphe combinant tous les allers-retours décrits dans les paragraphes précédents il est établi que la classe des « fonctions de z ramifiées comme T l'est » [Riemann 1898 130] est aussi la classe des fonctions sur une nouvelle surface T_1 , au-dessus du plan d'une nouvelle variable z_1 , pouvant elle-même être vue comme la surface associée à une nouvelle équation de dépendance polynomiale entre deux grandeurs complexes $F_1(s_1, z_1) = 0$. Les surfaces T et T_1 sont distinctes puisqu'elles ne sont pas au-dessus du même plan complexe – elles n'ont d'ailleurs pas nécessairement le même nombre de feuillettes au-dessus de leur plan de référence – elles sont toutefois conformément équivalentes et définissent, en un sens particulier, les mêmes classes de fonctions :

(...) lorsque l'on s'imagine chaque point de T représenté par un point d'un plan représentant géométriquement la valeur de z_1 en ce point, la totalité de ces points forme une surface T_1 recouvrant partout n_1 fois le plan des z_1 , surface qui est, comme l'on sait, une représentation, semblable en ses plus petites parties, de la surface T .

A chaque point d'une de ces surfaces correspond alors un point *unique* de l'autre. Les fonctions ω , c'est-à-dire les intégrales de fonctions de z , ramifiées comme T l'est, se transforment alors, lorsqu'au lieu de z on introduit z_1 comme grandeur variable indépendante, en fonctions qui sur la surface T_1 ont partout une valeur *unique* déterminée et ont mêmes discontinuités que les fonctions ω aux points correspondants de T , et qui, par suite, sont des intégrales de fonctions de z_1 , ramifiées comme l'est T_1 [Riemann 1898 130]

Se combinent ici la subtilité des concepts, la complexe sinuosité du parcours, et une certaine lourdeur de l'expression, en particulier dans la désignation des deux classes de fonctions : classe des fonctions méromorphes univoques (fonctions sur T ramifiées comme T l'est au-dessus du plan des z) et classe des intégrales abéliennes ω . Ces concepts permettent de faire sentir l'existence, sous chaque surface au-dessus d'un plan complexe, de quelque chose de plus fondamental ; quelque chose qui ne dépend pas du lien avec un plan complexe particulier, quelque chose qui demeure lors d'un bon changement de variable. Cette chose, que nous nommerions la variété analytique complexe ou tout simplement surface (et non plus surface *au-dessus* d'un plan), Riemann la désigne comme une classe d'équations polynomiales équivalentes par transformations rationnelles sur les deux variables. Le paragraphe I.12 est consacré au dénombrement de ce qu'on nommera les « modules » : pour un genre p fixé une telle classe dépend de $3p-3$ paramètres libres, sauf si $p = 1$ où un

paramètre libre demeure. Ainsi l'étude de classes de fonctions se libère-t-elle de la dépendance envers une variable particulière z et fait émerger, au delà du paramètre entier naturel p qui imposait des contraintes relevant de l'*Analysis situs*, une série de paramètres continus caractérisant, pour nous, la structure analytique à structure topologique donnée.

Cette structure globale mais non topologique va se révéler difficile à assimiler par des lecteurs qui identifieront longtemps aspect global et aspect topologique. La subtilité de la démarche de Riemann et, dans une certaine mesure, son peu de souci d'explicitation *méta* ou d'innovation terminologique aidant à clarifier les différents niveaux, vont constituer une difficulté à la reprise de la théorie. Ainsi, si cette théorie des fonctions abéliennes présente pour nous les traits d'une théorie globale, il sera difficile aux lecteurs du 19^e siècle d'y lire la théorie des fonctions *sur* un objet donné, tant différents types d'objets semblent servir successivement de référent : surface au-dessus d'un plan complexe, surface au-dessus d'un plan complexe associé à une fonction complexe d'une variable complexe, surface topologique et surface analytique, famille de surfaces au-dessus de différents plans complexes formant une classe d'équivalence birationnelle etc. Cette diversité a sans doute semblé plus aisée à saisir sous le mode plus familier de classes de fonctions caractérisées par des types d'expressions et étudiées au moyen de changements de variables adaptés. Les aspects spécifiques de la méthode riemannienne peuvent faire l'objet d'une lecture dans laquelle ce que nous regrouperions sous le terme de global se présente comme un entrelacement d'aspects intrinsèques et d'aspects topologiques. Le traitement par conditions relatives aux contours et aux discontinuités fournit des systèmes de conditions indépendantes caractérisant des classes de fonctions, conditions dans lesquelles le genre p (ou l'ordre de connexion $2p+1$) relevant de l'*Analysis situs* joue un rôle essentiel. Cette traitement par systèmes de conditions, intrinsèque en ceci qu'elle ne repose pas sur une expression particulière, permet d'établir élégamment les propriétés des fonctions d'une classe, y compris les modes d'écriture possibles. On verra cet entrelacement entre l'intrinsèque et le topologique, et la clé de lecture qu'il fournit au niveau *méta*, ordonner dans ses grandes lignes la tradition riemannienne en théorie des fonctions abéliennes.

III. Lieux et fonctions : deux autres cas de figure.

1. *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* (1854)

Nous voudrions ici suivre le fil du local/global en confrontant les notions de variété mises en place par Riemann en analyse complexe, en 1851 et 1857, et dans la Dissertation de 1854 *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, ainsi qu'en faisant le lien avec la *Dissertation générale sur les surfaces courbes* de Gauss [Gauss 1828]. Apportons deux précisions préliminaires. Premièrement, le terme de « variété » choisi par Laugel pour traduire « *Mannigfaltigkeit* » a pris depuis un sens technique précis – du moins lorsqu'on accole un complément tel topologique ou riemannienne ; pour tenter de combattre cet effet de lecture anachronique, nous utiliserons indifféremment les termes de « variété » et de « multiplicité »⁸ pour rendre « *Mannigfaltigkeit* ». Deuxièmement, notre analyse laissera de côté la question des fondements de la géométrie, celle des multiplicités discrètes, et ne touchera la question de la géométrie de l'espace physique que sur quelques points spécifiques.

i. Aspects non-métriques.

Le travail sur une surface était introduit en 1851 en soulignant que la notion de « variabilité, qui est relative à un domaine connexe à deux dimensions » [Riemann 1898 4] était, interprétée géométriquement, aussi bien compatible avec la variation d'un point sur une surface que celle d'un point d'un plan. L'étude est sensiblement plus détaillée en 1854 tout en reposant toujours sur la notion de variabilité, de grandeur variable. Alors qu'en 1851 il suffisait de passer de la variabilité plane aux variabilités du même type qu'une variabilité plane, sans que ce qui constitue ce type soit évoqué autrement qu'en termes dimensionnels, il s'agit au paragraphe I.1 des *Hypothèses* de distinguer les différentes formes possibles de variabilité, en commençant par une distinction entre discret et continu qui n'avait pas sa place en 1851. La notion de continuité repose sur la notion primitive de passage continu d'un mode de détermination (nous dirons plutôt point ou élément) à un autre : « *stetiger Übergang* » [Riemann 1892 273], ce qui renvoie pour nous à la fois à une notion de continuité et à une

⁸ Une précision importante : dans tout notre travail, le terme « multiplicité » est utilisé dans deux sens différents que le contexte permet toujours de distinguer. Il est utilisé soit pour rendre « *Mannigfaltigkeit* », soit pour désigner de manière plus informelle l'idée qu'un objet doit être « compté plusieurs fois » (ainsi on peut désigner dans le plan (xy) le lieu de l'équation $y^2 = 0$ comme une droite double, ou dire que par la fonction $x \rightarrow x^2$ (sur \mathbf{R}),

notion de connexité par arc. Riemann procède ensuite dans toute la partie I à une *analyse* du concept de variabilité continue pour montrer deux choses. Premièrement ce concept, si pauvre qu'il puisse sembler faute de recouvrir une notion de transport d'un étalon de mesure, n'est pas si pauvre qu'aucun champ de recherche spécifique ne puisse lui être associé. On dispose dans une multiplicité relevant de ce concept d'une notion de partie (« *Theile* » ou « *Quanta* », plus loin « *Gebiet* » [Riemann 1892 284]) et d'une notion d'inclusion entre parties, notions qui suffisent à fonder l'étude des propriétés d'*Analysis situs*, nouvelle « branche générale de la théorie des grandeurs étendues » [Riemann 1898 283]. Deuxièmement une multiplicité continue possède une dimension, ce dont Riemann rend compte de deux manières complémentaires dans les paragraphes I.2 et I.3. Une analyse un peu détaillée s'impose car ces paragraphes posent chacun une question relative au couple local/global.

Dans notre analyse de la *Théorie générale* de 1851 nous avons mis en avant deux mouvements qui nous semblaient, entre autres, caractéristiques de la conception de la surface de Riemann : la capacité de spécialisation du point générique O en un point particulier O' , la capacité du point générique de quitter une spécialisation selon une double infinité de déterminations possibles, sans que cette dernière capacité dût être analysée en termes ensemblistes de voisinage ou de plan tangent conçu comme ensemble des déplacements infinitésimaux. Cette double capacité – en un sens les deux facettes d'une même capacité – pouvait être rapprochée de la notion de point de vue universellement local que nous introduisons dans notre analyse de la *Théorie des fonctions abéliennes* : une référence à la totalité des points à la fois distributive et implicitement locale. Nous l'avons toutefois alors rapprochée d'un point de vue génétique, lue comme une réponse à la question de la donation d'une surface ; un mode de donation génétique nous semblait plus compatible avec la donnée d'un objet comme type que comme totalité, nous éloignant ainsi d'un point de vue global. Une telle étude génétique est explicitement introduite comme telle à la fin du paragraphe I.1 des *Hypothèses* : il y est écrit que le paragraphe I.2 sera consacré à « la génération du concept d'une variété de plusieurs dimensions » [Riemann 1898 283], « *Erzeugung des Begriffs einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit* » [Riemann 1892 274]. Le paragraphe commence toutefois par ces mots :

Etant donné un concept dont les modes de détermination forment une variété continue, si l'on passe, suivant une manière déterminée, d'un mode de détermination à un autre,

les réels positifs sont atteints deux fois). Le lien entre ces deux sens de « multiplicité » est bien sûr fondamental pour comprendre Riemann.

les modes de détermination parcourus formeront une variété étendue dans un seul sens (...)[Riemann 1898 283]

Riemann se donne donc d'emblée une totalité particulière au sein de laquelle sera décrit l'engendrement selon des dimensions successives : cette donnée *a priori* d'une totalité particulière semble contredire nos analyses précédentes en satisfaisant à l'un des traits caractéristiques d'un travail global. On peut gagner un peu de lumière sur cette question en nous concentrant quelques instants sur le terme de « concept » (*Begriff*) tel qu'il est utilisé par Riemann. Le texte concerne à la fois *le* concept de grandeur et *les* concepts de grandeur, qu'il importe de distinguer. Le concept de grandeur est analysé, on y distingue les grandeurs continues et les discrètes ; le concept de grandeur continue ne recouvre pas de notion intrinsèque de mesure, il donne sens et repose à la fois sur la notion de transition continue etc. En quittant le vocabulaire philosophique on pourrait rapprocher cette analyse d'un concept mathématique de l'analyse d'une structure, au sens que ce terme prendra au 20^e siècle en mathématiques : structure de variété topologique, structure de variété riemannienne. Bien qu'éclairant, ce rapprochement entre *le* concept et la structure nous semble faire fi du caractère non ensembliste du concept riemannien ; pour cette raison nous parlerons de concept/type pour désigner cette acception du terme « concept ». Riemann mène son analyse du concept/type au moyen de l'analyse *des* concepts de grandeurs. Ces concepts ont la propriété de posséder des modes de détermination, il leur est associé une variété, une multiplicité de modes de déterminations. Bien qu'anachronique, une interprétation ensembliste nous semble ici pertinente : *un* concept particulier renvoie à un ensemble en compréhension, la variété des modes de détermination à l'ensemble en extension, lui-même collection de modes de déterminations ou éléments. La dialectique entre compréhension et extension intervient toutefois dans la question du caractère global ou non du traitement riemannien. Nous isolions comme trait de la globalité la donnée *a priori* d'une totalité, nous l'opposions à la démarche génétique pour laquelle la totalité est un *horizon* et non un donné. Dans la dialectique compréhension/extension, la compréhension renvoie à l'*unité* du divers, l'extension à la *totalité* d'un divers. Dans le paragraphe I.2 *un* concept est donné *a priori* dans son unité, en compréhension donc, ce qui n'exclut pas l'engendrement de ce concept en extension ; un concept peut ainsi apparaître comme donné *et* comme horizon, ce qui rend difficile une analyse du caractère global de la démarche riemannienne en termes binaires de oui ou non.

Après un paragraphe I.2 renvoyant à la question du global, c'est le local qui semble en jeu au paragraphe I.3, du moins pour un lecteur du 21^e siècle. Le point de départ est ici *un* concept de grandeur donné, semble-t-il, en extension et non en compréhension :

Je vais maintenant montrer comment une variabilité, dont le champ [*Gebiet*] est donné, peut se décomposer en une variabilité d'une dimension et une variabilité d'un nombre de dimensions moindres. [Riemann 1898 284, Riemann 1892 275]

L'objectif est résumé au début du paragraphe II.1 : établir comme

caractère essentiel d'une telle variété cette propriété que la détermination de lieu [*Ortsbestimmung*] peut s'y ramener à n déterminations de grandeurs [*Größenbestimmungen*]. [Riemann 1898 285, Riemann 1892 276]

On s'attendrait donc à la mise en place d'une notion de carte locale, du moins à la possibilité de représenter des morceaux du domaine total de la variété par des systèmes de n nombres (réels). On ne trouve pourtant pas ces références à une restriction du lieu de validité dans ce passage qu'on nous permettra de citer un peu longuement :

(...) imaginons, à l'intérieur de la variété donnée [*innerhalb der gegebenen Mannigfaltigkeit*], une fonction continue du lieu [*eine stetige Function des Orts*], fonction qui ne soit pas constante le long d'une portion [*längs eines Theils*] de cette variété. Tout système de points, pour lequel la fonction a une valeur constante, forme ainsi une variété continue d'un moindre nombre de dimensions que la variété donnée. Ces variétés, lorsqu'on fait varier la fonction, se transforment d'une manière continue les unes dans les autres ; on pourra donc admettre que l'une d'entre elles engendre les autres, et cela pourra avoir lieu, généralement parlant, de telle façon que chaque point de l'une se transporte en un point déterminé de l'autre. Les cas d'exception, dont l'étude est importante, peuvent être ici laissés de côté. [Riemann 1898 284, Riemann 1892 275]

L'idée est exprimée en parfaite clarté d'une fonction numérique continue à variabilité maximale (non constante le long d'une portion) partitionnant la multiplicité initiale en une famille à un paramètre de sous-multiplicités ; le transport « de telle façon que chaque point de l'un se transporte en un point déterminé de l'autre » exprime une condition de bijectivité de la relation ainsi induite entre les sous-multiplicités, relation dans laquelle on peut lire sans trop faire violence au texte une idée de fibration triviale. Cette trivialité est d'ailleurs nécessaire à ce que

(...) la détermination du lieu dans une variété donnée se ramène à une détermination de grandeur, et à une détermination de lieu dans une variété d'un moindre nombre de dimensions. [Riemann 1898 285]

Sans cette trivialité, la détermination du lieu dans l'une des sous-multiplicités ne permet pas de repérer dans les autres fibres, dont Riemann montre ensuite qu'elles sont de dimensions $n-1$ si la variété de départ était de dimension n ; il note qu'un tel procédé de descente ne préjuge pas de la finitude du nombre de degrés à descendre, laissant la possibilité de considérer des variétés de dimension infinie. Il n'est pas utile ici d'insister sur la nouveauté et la profondeur des idées de ce paragraphe : que les coordonnées sont avant tout des fonctions sur la variété, que le repérage des points par des systèmes de nombres ne résulte pas d'une mesure de distance et est finalement indépendant de tout rapport métrique – on sait l'importance de cette prise de conscience dans la mise au point de la relativité générale [Riemann 1919, Stachel 1989] –, constat de l'infinie multiplicité des repérages possibles ouvrant la question de l'expression par des grandeurs invariantes des propriétés intrinsèques. Ce qui surprend ici c'est l'absence de toute référence au caractère local ou partiel du repérage dont la possibilité et la nature générale est ainsi établie. On pourrait sans doute s'interroger sur le sens de la distinction entre cas général et cas d'exception ; par exemple en utilisant la notion de point de vue universellement local : Riemann montrerait dans ce paragraphe qu'en chaque point il existe une fonction continue réalisant une fibration triviale, la validité de cette dernière affirmation étant à entendre comme relative à un voisinage de ce point. La construction du paragraphe ne va toutefois pas dans le sens de cette lecture. Ce n'est pas en effet d'un point que l'on part mais d'une fonction du lieu, et c'est de cette fonction qu'il est affirmé que, pour le dire de manière un peu relâchée, toutes ses fibres sont de même nature, sauf exceptions. Ainsi, si l'on considère sur la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2 = 1$ la fonction du lieu qui à chaque point associe sa cote z , les fibres sont toutes des cercles, sauf deux réduites à des points (la sphère n'est par un cylindre !) ; la fonction considérée est pourtant continue et ne demeure constante dans aucune portion bidimensionnelle. S'il n'est pas impossible d'interpréter ce terme de « général » pour y voir une notion de restriction locale, ce choix ne nous semble pas s'imposer. Pour éclairer ce qui nous semble donc être l'absence de référence au caractère partiel, dans son domaine de validité, du raisonnement riemannien, nous voulons présenter deux arguments. Premièrement une telle référence n'est pas nécessaire au développement du raisonnement dans la suite du texte. L'objectif de ce passage est d'établir le lien entre la notion générique abstraite de n -dimensionnalité et la possibilité de déterminer les points (ou modes de détermination du concept d'une grandeur continue n fois étendue) par des systèmes

de n grandeurs numériques. Il importe en fin de compte assez peu de savoir si cette traduction entre modes de détermination – points et systèmes de nombres – est valide sur toute la multiplicité des déterminations ou seulement morceau par morceau, car la suite du texte ne fait de cette possibilité de traduction qu'un usage infinitésimal. Les fonctions coordonnées x_1, \dots, x_n doivent permettre de considérer les accroissements associés dx_1, \dots, dx_n puis les relations métriques dans l'infiniment petit au moyen d'un ds^2 . Il importe peu que ces coordonnées soient locales, il importe par contre infiniment qu'elles ne soient pas uniques, puisque la théorie que Riemann esquisse dans les *Hypothèses* est une théorie des invariants différentiels métriques : c'est la possibilité de changer de variables de repérage qui est fondamentale, dans un texte qui s'inscrit dans et renouvelle une perspective gaussienne de géométrie différentielle intrinsèque. Non seulement la référence au caractère local n'est pas nécessaire à l'économie du texte, mais, c'est là notre second argument, les éléments du contexte mathématique ne rendent cette référence au local ni aisée ni obligatoire. Nous développerons ce point dans la deuxième partie de notre travail, restons pour l'instant dans le contexte de la géométrie différentielle en faisant un détour par Gauss.

ii. Digression : la théorie métrique intrinsèque des surfaces chez Gauss.

La *Dissertation générale sur les surfaces courbes* que Gauss fait paraître en 1828, constitue l'arrière plan indispensable non seulement à la compréhension des *Hypothèses* de Riemann, mais à de nombreux autres textes de notre étude. Il importe dans un travail sur l'émergence du couple local/global de comprendre en quoi Gauss formule un point de vue radicalement nouveau en géométrie différentielle ainsi qu'un programme de recherche articulé sur ce point de vue, sans que ces innovations impliquent de façon essentielle le couple local/global, ni même qu'on trouve trace de ce couple dans le mode d'expression. On sait que le point de vue intrinsèque sur des surfaces qui sont au départ données comme des surfaces dans l'espace ordinaire prend appui de façon essentielle sur la possibilité de représentation paramétrique. Gauss rappelle au paragraphe 4 qu'il y a « deux méthodes générales pour montrer la nature d'une surface courbe » [Gauss 1828 9], soit relier les trois coordonnées d'espace x, y, z par une équation $W = 0$, soit exprimer ces trois coordonnées en fonction de deux variables indépendantes p et q ; détermination implicite par une équation et représentation paramétrique. Aucun commentaire en termes de globalité ou de localité n'est fait, aucune question d'équivalence entre les deux modes de représentation n'est soulevée, aucun argument du type « fonctions implicites » n'est mentionné. On pourrait user ici du même type

d'argument que celui que nous avons avancé à propos du texte de Riemann : l'objectif est d'établir des relations différentielles, d'exhiber l'invariance de la courbure par isométrie.

Il serait pourtant faux de considérer que la théorie de Gauss travaille uniquement au niveau infinitésimal. Ainsi la mise en place au paragraphe 6 de la notion de courbure totale d'une figure – une figure étant une portion de la surface délimitée par une courbe sur la surface – impose-t-elle de distinguer selon que la restriction à cette figure de l'application de Gauss est ou non injective. Rappelons que l'application de Gauss associe à chaque point d'une surface courbe, plongée dans l'espace usuel et orientée, son vecteur normal sortant, ou plus précisément le point déterminé par ce vecteur sur la sphère de rayon 1 centrée sur l'origine du repère. Gauss souhaite définir la courbure totale (*curvatura integra*) d'une figure comme l'aire de son image sur la sphère par l'application de Gauss, affectée d'un signe traduisant la conservation ou le renversement de l'orientation. Cette définition n'est plus appropriée si l'application de Gauss n'est plus injective sur la figure, ou si l'orientation, bien définie en chaque point, varie dans la figure. Le traitement de cette question par Gauss est parfaitement explicite :

Le signe positif ou négatif, que nous avons assigné à la mesure de courbure pour la position d'une figure infinitésimalement petite, nous l'étendons aussi à la courbure totale d'une figure finie sur la surface courbe. Si cependant nous voulons embrasser cette matière dans toute sa généralité, il est besoin de quelques éclaircissements, que nous ne ferons que toucher ici en passant. Quand la figure sur la surface courbe est de telle nature qu'à chacun des points dans son intérieur répond sur la surface de la sphère un point *différent*, la définition n'a pas besoin d'explication. Mais chaque fois que cette condition n'a pas lieu, il sera nécessaire de faire entrer en compte deux ou plusieurs fois certaines parties de la figure sur la surface sphérique, d'où, pour une position semblable ou opposée, pourra naître une accumulation ou une destruction. Le plus simple, en pareil cas, est de concevoir la figure sur la surface courbe divisée en parties telles, que chacune, considérée isolément, satisfasse à la condition précédente, d'attribuer à chacune d'elles sa courbure totale, en en déterminant la quantité par l'aire de la figure correspondante sur la surface sphérique, et le signe par la position, et enfin d'assigner à la figure entière la courbure totale provenant de l'addition des courbures totales qui répondent aux différentes parties. [Gauss 1828 14]

On ne saurait exprimer plus clairement à la fois l'objectif de passage d'une définition infinitésimale à une définition globale – du moins relative à des domaines finis –, le problème qui se présente dans ce passage, et la solution générale consistant à définir une fonction

additive sur l'ensemble des figures à partir de sa donnée sur des figures suffisamment petites auxquelles on ramène les autres par découpage. Il n'est toutefois pas inintéressant de noter que Gauss s'excuse presque d'entrer dans de tels détails : il ne les touchera « qu'en passant », il n'y reviendra d'ailleurs pas dans la suite du texte, on le verra. Un point de vocabulaire ne manque pas non plus d'intérêt : Gauss distingue la *définition* (*definitio*) d'une part, l'*explication* et les *éclaircissements* (*dilucidationes*) d'autre part. Ces remarques nous permettent de formuler une hypothèse assez générale, en deux volets. Premier volet : quand l'auteur, dans un contexte certes géométrique, souhaite exposer un problème nécessitant une attention détaillée au lieu relevant pour nous du couple local/global, il est faux de penser que le langage mathématique du 19^e siècle ne lui fournit pas les ressources pour le faire ; on pourrait certes expliciter plus que ne le fait Gauss en utilisant des termes techniques tels que recouvrement ouvert, décomposition simpliciale subordonnée à un recouvrement etc. ou bien sûr les termes *méta* de local et global, mais l'absence de ces termes en 1828 ne nuit ni à la formulation du problème ni à l'expression claire de l'idée de la solution. Deuxième volet : porter son attention sur ce type de problème ne relève pas du travail de définition du concept lui-même, mais d'une forme de discours ancillaire – l'éclaircissement ou explication – qui est une forme *facultative*, presque déplacée, dans l'exposé d'une théorie *générale*. Ce deuxième volet de l'hypothèse nous invite à une attention au *genre* dont relèvent les textes étudiés, les conventions de rédaction d'une théorie générale n'étant pas les mêmes que celles présidant à la rédaction d'un article de recherche ou, par d'exemple, d'un manuel universitaire. Les *Hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* relèvent d'un genre dont le degré de généralité est encore supérieur à celui d'une théorie générale, puisqu'il est un exposé des premiers principes et d'un programme de recherche ; ceci permet d'éclairer sous un nouveau jour l'absence de référence au caractère local des cartes au paragraphe I.3 dont nous avons rendu compte plus haut en faisant valoir la prééminence du travail au niveau infinitésimal dans la suite du texte riemannien. Cette interaction entre les effets de genre et de niveau de travail mathématique est aussi essentielle dans le texte de Gauss. En effet, le passage que nous citons ne représente qu'une étape intermédiaire dans la mise en place du lien entre deux notions, celle de courbure totale (ou intégrale) d'une figure et celle de mesure de courbure en un point de la surface. L'éclaircissement que donnait Gauss contribuait à définir sans ambiguïté la notion de courbure totale. Par un passage au niveau infinitésimal, la courbure totale permet de définir la mesure de courbure comme densité surfacique de courbure totale ; la mesure de courbure en un point est donc définie comme le rapport des aires (signées) d'éléments de surface, qu'on pourrait reformuler en terme de quotient de deux 2-formes

différentielles sur la surface, ou comme déterminant jacobien de l'application de Gauss. La courbure totale d'une figure est alors retrouvée comme intégrale sur la figure de la mesure de courbure, cette intégrale étant explicitement présentée par Gauss comme l'analogie analytique du procédé sommatoire (fini) évoqué dans l'extrait cité. Ce passage par l'infinitésimal non seulement permet d'obtenir des expressions de calcul pour les grandeurs introduites par des considérations géométriques, mais rend rétrospectivement presque superflus les éclaircissements sur la formulation initiale de la notion de courbure totale. Ces éclaircissements relatifs à un problèmes de passage du local au global ne semblaient déjà pas entièrement légitimes dans un texte relevant du genre « théorie générale », les voilà mis hors de propos dans une théorie dont la lisibilité s'organise autour du couple infinitésimal/intégral : la courbure totale est une notion intégrale plus qu'une notion globale ; elle renvoie à la sommation par intégration d'une infinité de courbures infinitésimales plus qu'à la sommation d'un nombre fini d'aires de figures finies et suffisamment petites. La suite du texte de Gauss n'utilise plus que les notions différentielles et intégrales. Pour ce qui est du principal théorème non infinitésimal démontré par Gauss, le théorème reliant, pour un triangle géodésique, la courbure totale et la somme des mesures en radian des trois angles (§20), il n'est fait aucune mention du fait que la démonstration utilise le calcul intégral dans une carte et n'est donc valide au sens strict que pour des triangles suffisamment petits.

iii. Propriétés métriques et propriétés d'*Analysis situs*.

La deuxième partie des *Hypothèses* est consacrée aux « rapports métriques dont est susceptible une variété de n dimensions » [Riemann 1898 285]. Le point de vue est, nous l'avons déjà signalé, entièrement infinitésimal : une fois garantie la possibilité de repérer les points de la multiplicité continue par la donnée de n variables numériques indépendantes, le regard se centre sur un point, les éléments de lignes issues de ce point, les triangles infinitésimaux ayant ce point comme sommet, les éléments de surface déterminés par ces triangles ; les courbures sectionnelles sont introduites par l'étude des premiers termes du développement limité du ds^2 en coordonnées polaires géodésiques ; l'étude de l'effet d'un changement de variables indépendantes est menée par simple dénombrement de conditions linéaires : si le ds^2 est donné, pour un système de variables, par une forme différentielle (symétrique) du second degré, il contient $n\frac{n+1}{2}$ fonctions arbitraires ; le changement de variable donne n degrés de liberté, les classes d'équivalences de telles formes différentielles

dépendent donc de $n \frac{n-1}{2}$ paramètres. On semble s'écarter du point de vue infinitésimal au paragraphe I.5, où Riemann propose d'illustrer géométriquement la notion abstraite de variété de courbure constante en se limitant au cas des surfaces et en cherchant une représentation dans l'espace tridimensionnel ordinaire. On pourrait donc se trouver face à un problème de plongement isométrique, inédit jusqu'ici, qui peut présenter des difficultés locales et des impossibilités globales. Riemann emploie la technique suivante :

(...) pour embrasser d'un coup d'œil la variété tout entière de ces surfaces, donnons à l'une d'elle la forme d'une sphère, et aux autres, la forme de surfaces de révolution la touchant suivant l'équateur. [Riemann 1898 293]

Cet artifice permet l'étude en *un* point, dont la révolution engendre un cercle dans l'espace usuel, et non l'étude sur toute la surface, ou simplement sur un morceau fini. La condition de tangence permet de fixer l'une des deux courbures eulériennes, la valeur de la courbure gaussienne au point considéré de la surface abstraite déterminant les positions relatives de la sphère de référence et de la surface de révolution le long de leur cercle de contact. Riemann n'aborde donc ici aucun problème de plongement isométrique, ni local ni global, mais propose un dispositif permettant l'étalement visible dans l'espace usuel de la situation infinitésimale en un point de la surface abstraite.

La troisième partie du texte invite en plusieurs points à une lecture en termes de local/global, mais c'est à chaque fois vers un autre aspect du problème que Riemann attire l'attention. De même que l'approche en théorie des fonctions d'une variable complexe privilégiait la recherche des systèmes de conditions indépendantes caractérisant une telle fonction, il s'agit ici de chercher les systèmes de conditions indépendantes caractérisant le concept d'une grandeur continue. Ces conditions sont de deux type, des conditions relatives aux « rapports d'étendue ou de régions » (« *Ausdehnungs- oder Gebietsverhältnisse* ») [Riemann 1898 294, Riemann 1892 283] dont l'étude relève de l'*Analysis situs* et des conditions relatives aux « rapports métriques » (« *Massverhältnisse* ») [Riemann 1898 294, Riemann 1892 283]. Alors que des problèmes importants de passage du local au global se posent dans la question du lien entre ces deux familles de propriétés, c'est l'indépendance de ces deux familles qui est soulignée par Riemann :

(...) nous avons trouvé que, pour les mêmes rapports d'étendue, on pouvait concevoir différents rapports métriques ; [Riemann 1898 283]

Le seul rapport d'étendue ici considéré semble être la dimension. Cette indépendance est au cœur de l'argumentation riemannienne : les *Hypothèses* ont en effet pour objectif de montrer

que le concept abstrait de grandeur étendue ne contient pas en lui-même de composante métrique ; que c'est par une synthèse qu'on peut former la notion de variété métrique. Encore cette démarche s'avérerait-elle un exercice purement intellectuel s'il était établi, par analyse du concept de rapport métrique, que la seule métrique possible est la métrique euclidienne, d'où l'importance qu'il y avait à montrer la diversité des métriques possibles en établissant l'existence de $n \frac{n-1}{2}$ métriques non équivalentes possibles en un point d'une multiplicité n fois étendue. C'est la multiplicité de ces métriques qui donne sens à la question abordée dans la troisième partie : puisque la métrique euclidienne n'est pas la seule possible pour les multiplicités trois fois étendues, comment déterminer la métrique de cette multiplicité triplement étendue qu'est l'espace physique ? Cette question devrait recouvrir deux niveaux, celui des propriétés d'*Analysis situs* de l'espace physique, interrogation globale s'il en est, puis celle des propriétés métriques. Ce n'est pourtant pas dans cette direction que Riemann oriente l'exposé. Il considère la différence de nature entre les paramètres dont dépendent la structure topologique et la structure métrique, en posant la question de leur détermination empirique ; du point de vue de l'expérience :

(...) il existe, entre les simples rapports d'étendue et les rapports métriques, cette différence essentielle que, dans les premiers, où les cas possibles forment une variété discrète [*discrete Mannigfaltigkeit*], les résultats de l'expérience ne sont, à la vérité, jamais complètement certains [*gewiss*], mais ne sont pas inexacts [*ungenau*]; tandis que, dans le second, où les cas possibles forment une variété continue, toute détermination de l'expérience reste toujours inexacte. [Riemann 1898 295, Riemann 1892 284]

On peut penser que cette allusion au caractère discret des invariants topologiques renvoie au nombre de contours d'encadrement et au degré de connexion, des entiers naturels donc. La distinction entre propriétés métriques et propriétés topologiques conduit ensuite à une discussion qui nous rapproche de la question de la non indépendance globale de ces deux familles de propriétés. Que cette interaction se manifeste au niveau global est ici exprimé en termes physiques puisqu'il s'agit de l'espace « immensurablement grand » [Riemann 1898 295], celui dont les mesures astronomiques seules permettent l'étude. Curieusement, cet unique résultat de couplage entre topologie et métrique est énoncé dans le but d'illustrer, une fois de plus, la différence de ces deux familles de propriétés : c'est pour faire sentir la différence entre la propriété topologique d'illimitation (i.e. ne pas avoir de bord, « *Unbegrenztheit* » [Riemann 1892 284]) et la propriété métrique d'être de diamètre infini

(« *Unendlichkeit* ») que Riemann affirme qu'un espace tridimensionnel de courbure constante strictement positive est illimité sans être infini. L'importance de cette question de l'infiniment grand est d'ailleurs minorée au dernier paragraphe :

Les questions sur l'immensurablement grand sont des questions inutiles pour l'explication de la nature. [Riemann 1898 296]

Un point de lexique pour finir. Riemann fait remarquer que si l'on suppose la courbure constante, on peut conclure à sa valeur en chaque point dans l'infiniment petit à partir de mesures réalisées « en grand » : ce n'est pas un couple « *im Grossen* » / « *im Kleinen* » qui apparaît mais un couple « en grand »/dans « l'infiniment petit » (« *im Grossen* »/« *im Unendlichkleinen* ») [Riemann 1898 296, Riemann 1892 285], qui reflète moins une nécessité interne à l'organisation des mathématiques qu'une opposition empirique entre le télescope et le microscope.

iv. Comparaison avec l'Analyse complexe.

Esquissons pour conclure une comparaison d'ensemble des conceptions géométriques introduites par Riemann en analyse complexe d'une part, en théorie des variétés métriques d'autre part. On peut regrouper les éléments de comparaison autour de trois points. Premièrement, la démarche est dans les deux cas organisée par la recherche de systèmes numériques de conditions déterminant un objet parmi ceux d'une classe ; l'attention se porte sur la nature (discrète ou continue) et le nombre de ces paramètres.

Deuxièmement la mise au jour d'un type de conditions exprimant une nouvelle famille de propriétés, les propriétés d'*Analysis situs*. En théorie des fonctions complexes comme en théorie des multiplicités continues la géométrie consiste en la donnée de deux familles de propriétés, nous pourrions parler d'une structure double : des propriétés géométriques infinitésimales – structure conforme ou ds^2 – et des propriétés topologiques. Les deux théories se distinguent toutefois à la fois par le *mode de donation* de ces structures et par l'accent mis sur leur *interaction* éventuelle. En théorie des fonctions d'une variable complexe les deux éléments de structure sont donnés par une fonction z qui détermine la surface comme surface au-dessus d'un plan complexe, d'un plan complexe toujours déjà là et disponible. Le problème de donation est plus ardu dans les *Hypothèses*, les multiplicités n'étant plus donnée *a priori* en liaison avec l'une d'entre elles (un espace ambiant, par exemple) : l'existence de cartes numériques doit être établie conceptuellement à partir du seul concept de fonction continue. Le lien entre le mode de donation et la disponibilité d'un espace premier et *déjà là*

sur lequel s'appuyer pour en modéliser de nouveaux n'est pas le seul paramètre pertinent ; le caractère très général des *Hypothèses* – d'une *généralité* jouant à la fois comme horizon conceptuel et contrainte de *genre* – modifie aussi ce que la donation vise. On dispose d'un côté d'une carte globale permettant de fournir dans chaque cas une surface particulière – quitte à poser ensuite la question l'intrinséquentialité –, on ne dispose de l'autre que de l'idée de carte (implicitement locale). En théorie des fonctions d'une variable complexe, la notion de surface complexe va de pair avec un mode général de donation d'une telle surface, alors les *Hypothèses* répondent à la question plus fondamentale : qu'est-ce que se donner de l'espace ; quant à savoir comment, dans ce cadre, se donner un espace, cette question porteuse de techniques de recouvrements, de recollements etc. n'est pas abordée. Quant à l'interaction entre propriétés infinitésimales et propriétés topologiques, elle joue un rôle essentiel et explicite en théorie des fonctions abéliennes, une légalité du lieu se manifeste dans les propriétés de différents ensembles de fonctions sur la surface ; la question du lien entre topologie et structure métrique aurait pu fournir matière au dévoilement d'une nouvelle forme de légitimité du lieu, mais ce n'est pas dans cette direction que Riemann formule son programme de recherche dans les *Hypothèses* ; l'interaction est au contraire systématiquement minorée, à la fois pour des raisons techniques ayant trait à la formulation infinitésimale des aspects métriques, et, plus fondamentalement, parce que le découplage de ces deux familles de propriétés est nécessaire à la formulation de ce programme de recherche. Savoir dans quelle mesure ce découplage ne va pas jusqu'à une totale indépendance, la question n'est pas formulée par Riemann, alors même qu'il donne un exemple de non indépendance. C'est dans les propriétés de fonctions sur une surface – sur toute la surface – que se manifestait en théorie des fonctions abéliennes l'interaction entre structure topologique et structure conforme ; en montrant que les coordonnées numériques puis le ds^2 sont des fonctions sur une multiplicité étendue, Riemann se donnait les moyens de formuler sur le même modèle la question du couplage entre structure topologique et structure métrique, mais il ne choisit pas cette voie. L'articulation entre totalité extensive, carte numérique (locale) et propriétés métriques (infinitésimales) demeure à l'arrière plan.

Troisième point de comparaison, les travaux en analyse complexe et les *Hypothèses* s'inscrivent dans un programme de géométrie *intrinsèque* qui contribuera au 20^e siècle à mettre l'accent sur les notions de carte locale, de morphismes de transition admissibles selon la structure dont la variété est porteuse, d'existence globale assurée par des propriétés d'invariances de systèmes de données locales etc. La formulation du programme par Gauss va contribuer à rejeter à l'arrière plan les aspects globaux, en privilégiant la représentation

paramétrique – dont le caractère local demeure implicite – et les questions d’invariants différentiels. Ce privilège de la représentation paramétrique est lié à l’indépendance des paramètres : adopter le point de vue intrinsèque c’est considérer une surface comme un objet bidimensionnel, le repérage par deux paramètres libres (fût-il local) est donc plus naturel que le repérage par trois paramètres liés (fût-il global). En un certain sens, adopter une perspective intrinsèque sur une surface, fût-elle au départ donnée comme plongée, c’est refuser de la contempler de l’extérieur, depuis l’espace ambiant, ce qui peut déboucher sur un rejet de propriétés globales apparaissant rétrospectivement comme extrinsèques. Ce point de vue, et les choix techniques qui lui sont associés, est celui qui organise les *Hypothèses* de 1854. Dans le repérage par carte le caractère local ne joue aucun rôle, et n’est pas signalé, alors que la non-unicité de la carte organise toute la problématique de recherche d’invariants différentiels. A la différence de Gauss toutefois, Riemann met au jour une famille de propriétés à la fois intrinsèques et non locales, les propriétés *d’Analysis situs*. La théorie des fonctions d’une variable complexe entretient avec ce programme d’étude des propriétés intrinsèques un rapport plus compliqué. De ce programme, cette théorie conserve la notion d’objet géométrique donné indépendamment d’un espace ambiant, que sa seule bidimensionnalité – i.e. le repérage des positions au moyen de deux variables indépendantes – suffit à qualifier comme surface. Les problèmes de changement de carte sont par contre loin d’y être premiers : des changements de cartes, qu’on pourrait certes qualifier de locaux, ont lieu pour l’étude aux points de ramification, mais il s’agit d’exhiber une carte conforme et non de rechercher des invariants par changement de carte ; des changements de carte globale interviennent à la fin de la théorie des fonctions abéliennes, dans un contexte dont on a vu la complexité et, en un sens, la faible lisibilité géométrique.

2. *Contribution à la théorie des fonctions représentables par la série de Gauss $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, 1857.*

Ce travail nous intéresse pour au moins trois raisons. Tout d’abord, il constitue une incursion dans une famille de problèmes d’analyse différente de celle des intégrales abéliennes, en l’occurrence l’étude des solutions d’une famille d’équations différentielles complexes ; on sait que cette étude présente à la fois des difficultés locales au voisinage des points singuliers et des problèmes de passage du local au global. Ensuite, ce travail propose un traitement géométrique du problème qui ne passe pas par l’institution d’une surface ni d’une multiplicité continue associée à la situation. Enfin il constitue l’arrière plan indispensable pour l’étude

d'une partie de l'œuvre de Poincaré qu'il nous importera de commenter dans un travail sur l'émergence du couple local/global. Nous nous contenterons toutefois d'une présentation assez rapide, dans la mesure où beaucoup d'éléments ont déjà été relevés à l'occasion de l'analyse de la *Théorie des fonctions abéliennes*.⁹

Le problème est présenté dans le paragraphe introductif de manière très semblable celui de la *Théorie des fonctions abéliennes*. On vu comment en 1851 la représentation des fonctions par des formules de calcul était rejetée comme non pertinent avant tout pour sa redondance, son caractère non minimal. Dans la théorie des fonctions abéliennes, c'est bien pour son caractère partiel que le développement en série de puissances est rejeté ; de même ici :

La série de Gauss $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, considérée comme fonction de son quatrième élément x , ne représente cette fonction que tant que le module de x ne dépasse pas l'unité.
[Riemann 1898 61]

L'objectif est énoncé encore plus nettement que dans la théorie des fonctions abéliennes en terme de domaine de validité de l'étude : étudier

(...) cette fonction dans toute son étendue, c'est-à-dire quand la variabilité de son argument x n'est pas limitée. [Riemann 1898 61]

Cet objectif d'étude globale est rappelé dans le texte dans des termes un peu différents : il s'agit de l'étude de la « marche de la fonction » (*Verlauf der Function*) [Riemann 1898 66, Riemann 1892 70]. Une fois cet objectif énoncé, le problème est présenté, de même que dans la *Théorie des fonctions abéliennes*, en soulignant le contraste entre l'unicité du prolongement analytique le long d'une bande étroite d'une fonction donnée dans une région, et la multivocité de la fonction ainsi obtenue dans son domaine maximal d'extension. Les notions de branche de fonction et de point de ramification sont introduites de la même manière. Une nuance toutefois : nous avons introduit la notion de point de vue universellement local à propos de la définition de la monodromie donnée dans la *Théorie des fonctions abéliennes* : « Partout où il ne se trouve aucune ramification, la fonction est dite *monodrome* ou *uniforme* » [Riemann 1898 91] ; la formulation dans l'article sur les *Fonctions représentables par la série de Gauss* est plus explicite dans sa référence distributive aux points :

(...) pour une valeur [de x] où n'a lieu aucune ramification la fonction est dite *uniforme* ou *monodrome*. [Riemann 1898 63]

On retrouve un autre aspect du point de vue universellement local : la référence au point ne renvoie bien sûr pas au point « nu » mais – implicitement – au voisinage du point ; le référent

⁹ Le travail de référence sur l'histoire de la théorie des équations linéaires dans cette deuxième moitié du 19^e siècle est bien sûr l'ouvrage de Jeremy Gray [Gray 1986].

est d'ailleurs moins une partie d'un plan que le comportement au voisinage du point de la fonction étudiée, appelant au 20^e siècle une formulation en termes de germe de fonction en un point.

Les spécificités d'un problème d'équation différentielle linéaire du second ordre invitent toutefois à un traitement de ce problème de multivocité sensiblement différent de celui adopté en théorie des fonctions abéliennes. La problématisation de la multivocité ne débouche pas sur une stratégie d'uniformisation, stratégie dans laquelle l'introduction d'une surface au-dessus du plan complexe était la pièce essentielle. Une analyse de la situation en un point ordinaire montre aisément pourquoi : l'introduction des surfaces de Riemann permet d'uniformiser géométriquement les fonctions qui, pour une valeur de la variable complexe, prennent un nombre fini de valeurs¹⁰ ; par contre, en un point ordinaire de l'équation différentielle linéaire du second ordre il existe une double infinité de germes de solutions, ou encore, les déterminations de la solution dépendent de deux paramètres complexes indépendants et forment donc une multiplicité continue à deux dimensions. On peut aussi présenter cette différence d'une autre manière : « la » solution de l'équation différentielle ne permet pas de relever de manière non ambiguë – au choix du point de départ près – les chemins continus de l'espace des valeurs, alors que ce relèvement jouait un rôle essentiel dans la description d'une surface de Riemann au-dessus d'un plan complexe. Il est à noter que ni cette analyse locale ni l'analyse en termes de chemins n'est proposée par Riemann. Aucun théorème local d'existence et d'unicité de la solution analytique d'une équation différentielle linéaire en un point ordinaire n'est mentionné : on va voir que la marche du raisonnement riemannien permet de s'en dispenser. Après avoir formulé le problème de multivocité et introduit les éléments de vocabulaire associés, il propose un mode de notation de fonction adapté à ce problème en introduisant une classe de fonctions par des propriétés caractéristiques abstraites :

Je désigne par

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{array} \right\}$$

une fonction de x qui satisfait aux conditions suivantes :

- 1° Elle est pour toutes les valeurs de x , hormis a, b, c , uniforme et finie ;
- 2° Entre trois branches quelconques P', P'', P''' de cette fonction a toujours lieu une équation linéaire homogène à coefficients constants

$$c' P' + c'' P'' + c''' P''' = 0$$

3° La fonction peut se mettre sous les formes

$$c_\alpha P^{(\alpha)} + c_{\alpha'} P^{(\alpha')} , c_\beta P^{(\beta)} + c_{\beta'} P^{(\beta')} , c_\gamma P^{(\gamma)} + c_{\gamma'} P^{(\gamma')}$$

où $c_\alpha, c_{\alpha'}, \dots, c_\gamma, c_{\gamma'}$ désignent des constantes, et cela de telle sorte que, pour $x = a$,

$$P^{(\alpha)}(x-a)^{-\alpha} , P^{(\alpha')}(x-a)^{-\alpha'}$$

restent uniformes et ne deviennent ni nulles ni infinies (...) [Riemann 1898 63]

et les conditions équivalentes en b et c . On peut en faire une lecture en terme de germes de fonctions : en tout point l'espace des germes est un espace vectoriel de dimension complexe au plus deux, et en les trois points singuliers on se donne une base de l'espace des germes (les différences $\alpha - \alpha', \dots$, étant supposées non entières) au moyen de deux fonctions dont on connaît la multivocité. Si cette lecture est possible, elle n'est toutefois pas la plus fidèle aux formulations riemanniennes : la présentation est construite autour de la dualité fonction/branche, dont l'ambiguïté même *permet* la mise en place d'un traitement géométrique du problème de multivocité. L'analyse de la situation ainsi caractérisée est en effet menée en termes géométriques à partir du paragraphe 3 dans lequel la notion de prolongement le long d'un circuit joue un rôle organisateur : c'est cette géométrisation par l'étude des circuits qui constitue l'étude de la « marche » (« *Verlauf* ») de la fonction. On retrouve la dualité chemin/coupure :

(...) concevons une ligne l , qui se ferme en revenant sur elle-même, passant par tous les points de ramification de la fonction, et qui partage l'ensemble de toutes les valeurs complexes en deux domaines séparés de grandeurs. A l'intérieur de chacun de ces derniers, chaque branche de la fonction aura une marche continue et séparée des autres branches ; [Riemann 1898 66]

Ici la situation ne permet plus, comme en théorie des fonctions abéliennes, d'associer aux différentes portions de la coupure des « discontinuités » de la fonction multivoque. Il est par contre possible de choisir dans l'une des deux parties du plan coupé deux branches P' et P'' indépendantes, dont toutes les autres seront combinaisons linéaires à coefficients constants. Ce point est essentiel : nous avons en commentant l'introduction du terme « branche » souligné qu'au sens strict il appelle un complément de lieu ; une branche est branche au-dessus d'une partie du plan. Pourtant dans la caractérisation de la classe de fonctions étudiée le terme apparaît sans complément de lieu ; nous avons proposé une lecture en termes de germes, pour compenser ce qui pouvait alors sembler une ambiguïté dans la formulation

¹⁰ Ou, plus généralement, une infinité discrète de valeurs.

riemannienne. L'ambiguïté devait toutefois être levée au paragraphe 3 dans le passage que nous venons de citer, la coupure du plan permettant de fixer un référent de lieu à la notion de branche ; on peut rapprocher ce mode d'exposition de la distinction gaussienne entre définition et éclaircissement : la définition qui nous semblait ambiguë du point de vue de la référence au lieu (§1) appelait un éclaircissement ultérieur (§3). La condition 2° permet de montrer qu'un circuit fermé induit, en termes anachroniques, une transformation linéaire dans l'espace des germes de solutions en un point ; Riemann parle de relation de dépendance linéaire entre branches et introduit une notation matricielle. Il est affirmé que tout circuit est décomposable en une combinaison de trois circuits élémentaires, chacun entourant une seule fois dans le sens positif l'un des trois points de ramification. Interviennent ensuite deux éléments de passage au global. Premièrement, si l'allure des matrices (A), (B), (C) relatives aux circuits élémentaires autour de, respectivement, a, b et c est aisée à donner dans la base associée à ces points par la condition 3°, leur expression selon (P', P'') fait intervenir des matrices de passage qui viennent traduire algébriquement les contraintes globales. Deuxièmement, une contrainte algébrique vient traduire une contrainte géométrique : un circuit entourant simplement les trois points singuliers est aussi un circuit le long duquel les prolongements analytiques sont triviaux puisqu'il borde un domaine ne contenant pas de point de ramification (on travaille dans le plan complexe muni d'un point à l'infini, donc sur une sphère de Riemann) ; cet aspect topologique implique la relation algébrique $(A)(B)(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [Riemann 1898 67]. On avait déjà noté ce mode d'obtention de relations au moyen de grands circuits dans la *Théorie des fonctions abéliennes* : il servait alors à établir la nullité de la somme des résidus [Riemann 1898 111].

Nous n'avons commenté jusqu'ici que la manière dont Riemann formule le problème et met en place une stratégie de traitement inédite. Après la mise au jour d'une série de paramètres numériques contrôlant la situation et l'étude de leur dépendance, les résultats sont obtenus, comme en théorie des fonctions abéliennes, en combinant raisonnements sur ces paramètres – coïncidence d'objets particuliers pour lesquels les valeurs des paramètres coïncident, décomposition d'objets en objets d'un sous-type par comparaison des dimensions des espaces de paramètres associés – et de lemmes globaux sur la sphère de Riemann : une fonction univoque partout continue (i.e. holomorphe) y est constante, une fonction univoque partout continue sauf pour un unique pôle d'ordre m en l'infini est un polynôme de degré m , une fonction univoque méromorphe est rationnelle (§4 et 6). Le résultat principal est le suivant :

Toutes les fonctions P dont les exposants correspondants diffèrent entre eux de nombres entiers, peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de deux quelconques d'entre elles avec des fonctions rationnelles de x comme coefficients. [Riemann 1898 79]

En appliquant ce résultat à une fonction P , sa dérivée première et sa dérivée seconde, on obtient que toute fonction P satisfait à une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients rationnels. Cette conséquence permet entre autres de démontrer l'existence de fonctions P , cette synthèse tardive permettant à son tour de faire le lien avec les présentations plus courantes des fonctions étudiées, par une série hypergéométrique ou par une intégrale. Rejeté en tant que point de départ, le développement en série entière est étudié au paragraphe 9, au moyen de principes mis en place plus haut (§5) et sans calcul. La théorie de Riemann doit en effet faire la preuve de sa capacité à retrouver les résultats déjà connus, capacité mise en avant dès l'introduction :

Dans le Mémoire suivant, je traite de cette transcendante [« la » fonction définie par la série hypergéométrique] d'après une nouvelle méthode qui reste essentiellement applicable à toute fonction qui satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques. Avec son aide, les résultats trouvés antérieurement par des calculs assez pénibles se déduisent presque directement de la définition ; [Riemann 1898 62]

Ainsi le travail peut-il être caractérisé par son caractère géométrique et son sens de l'intrinsèque, mais pas tout à fait de la même manière que la *Théorie générale* de 1851 ou la *Théorie des fonctions abéliennes*. Le caractère géométrique découle d'une problématisation en termes de multiformité liée à l'unicité du prolongement analytique ; le traitement géométrique passe par un certain nombre de gestes communs à ces trois exposés : relier des points singuliers par des coupures ; cheminer en franchissant les coupures ; entourer d'aussi près qu'on veut un point singulier ou entourer « de loin » la totalité de ces points ; décomposer par découpage le domaine en domaines où les branches sont séparées, sans d'ailleurs qu'un terme vienne dans la *Théorie des fonctions représentables par la série de Gauss* caractériser ces domaines (il est vrai que dans le cas particulier étudié ici on se contente de découper une sphère en deux calottes sphériques). Ce travail géométrique ne passe toutefois pas par l'introduction d'un nouvel espace, tel la surface de Riemann ; il ne débouche pas non plus *explicitement* sur la distinction entre propriétés analytiques et propriétés d'*Analysis situs*, même si on peut considérer que le groupe fondamental de la sphère privée de trois points intervient. Quant au sens de l'intrinsèque nous ne l'entendons pas ici dans l'acception géométrique issue des travaux de Gauss sur les surfaces : donnée d'un

objet géométrique sans espace ambiant, étude de propriétés invariantes par certains changements de paramétrisation. Il ne s'agit ni de la donation ni de l'étude intrinsèque d'un objet géométrique, surface ou multiplicité continue, mais de l'étude d'une famille de fonctions caractérisée sans recours aux expressions de calcul. Il est délicat d'analyser les liens de cette tactique avec le couple/local global. Ainsi, le rejet des expressions analytiques conduit indirectement à un rejet du travail local, lorsqu'il s'agit du développement en série entière, mais pas lorsqu'il s'agit du rejet de représentations intégrales. La définition quasi axiomatique de la classe des fonctions étudiées en propose un mode de donation plus unitaire que global : unité d'un concept, unité d'une structure. On peut certes faire de cette définition axiomatique des fonctions P une lecture presque faisceautique : l'objet est donné globalement par la donnée d'un espace de base – la sphère de Riemann – et d'un système de germes de fonctions caractérisé en les points ordinaires et en trois points singuliers. Mais cette lecture rend mal compte d'une démarche riemannienne qui ne consiste pas en un passage du local au global, mais en l'étude des symétries d'un objet global, la fonction P , induites par les cheminements possibles sur une sphère structurée par la présence de trois points singuliers : cette problématisation en termes de multivocité, cheminements et symétries constitue ce que Riemann nomme l'étude de la « marche » (*Verlauf*) de la fonction. On verra dans la seconde moitié du 19^e siècle cette idée de « marche » ou de « marche d'ensemble » (*Gesamtverlauf*) structurer le niveau *méta* en théorie géométrique des fonctions. Si elle représente une des formes de la démarche globale, elle ne recouvre pas l'idée d'un passage du local au global ; si elle formule explicitement le projet d'étudier d'un objet fonctionnel dans tout son domaine d'extension, elle ne renvoie pas directement à la légalité primitive d'un lieu.

Conclusion.

Dans l'ensemble des textes présentés, des couples tels infinitésimal / intégral, étude intrinsèque / étude extrinsèque, propriétés d'*analysis situs* / autres propriétés géométriques intrinsèques (métriques, conformes), point ordinaire / point singulier etc. organisent *explicitement* la recherche dans sa stratégie comme dans son mode d'exposition ; ce n'est pas le cas du couple local/global, ce dont nous avons cherché à rendre raison au cas par cas. Ce travail au cas par cas, qui serait sans doute fastidieux s'il ne s'adressait à des textes de ce niveau, est rendu nécessaire par le fait même que notre questionnement du texte est mené selon d'autres lignes – essentiellement, suivre l'entremêlement des niveaux infinitésimal, local et global, à la fois dans leur expression et dans leur fonction – que celles qui président aux constructions de l'auteur.

Il n'y a pas de paradoxe à montrer que cette absence du *couple* local/global n'est pas incompatible avec l'émergence multiforme d'aspects globaux : globalité syntaxique des conditions relatives aux contours et discontinuités, légalité du lieu en théorie des fonctions abéliennes, fonctions définies par la série de Gauss étudiées dans toute leur étendue. Riemann lègue ainsi une série de *modèles* de formulations, de résultats et de théories qui le placent au premier rang dans le passé des théories globales. Le travail de géométrisation, dans l'étude des fonctions complexes ou des multiplicités continues abstraites, permet de formuler la question de l'articulation entre aspects infinitésimaux (conformes ou métriques) et aspects globaux, conçus essentiellement – mais pas uniquement – comme des aspects topologiques ; cette articulation peut, selon le texte, jouer un rôle central et souligné comme tel, ou demeurer à l'arrière plan. Ce travail de géométrisation fait fond sur le rejet d'une certaine voie analytique qui se donne les objets comme combinaisons de symboles et procède par manipulation réglée de ces symboles ; cette non pertinence de l'analytique porte au premier plan la pertinence de la référence au lieu. La *pertinence* de cette référence au lieu ne s'accompagne toutefois pas d'une *obligation* de référence, ce dont on peut en partie rendre compte en soulignant le rôle des conventions de rédaction d'exposés mathématiques dont le travail d'analyse passe plus par des *éclaircissements* progressifs que par des définitions devant embrasser, par avance, tous les cas. Ce caractère à la fois essentiel et facultatif de la référence au lieu peut engendrer des difficultés de lecture – qui ne sont d'ailleurs pas nécessairement les mêmes pour les lecteurs du 19^e siècle et pour ceux du 20^e siècle – et laisse dans l'ombre certaines questions mathématiques relatives à l'articulation des niveaux infinitésimaux, locaux et globaux.

Ce caractère facultatif de la référence au lieu renvoie à une autre convention d'écriture que nous avons désignée comme *point de vue universellement local* : une référence implicite et distributive à chaque point. Le référent n'est d'ailleurs ni purement géométrique ni réduit au point seul ; la notion fondamentale est celle de *comportement*, dont les deux compléments implicites sont « comportement [d'une fonction] [en un point] ». Ce comportement peut être décrit par des équations différentielles ou aux dérivées partielles ; il est souvent décrit par référence à une fonction modèle : tendre vers l'infini *comme* $(z-a)^n$, être ramifié *comme* $(z-a)^{m/n}$ ou $\log(z-a)$. Les explicitations auxquelles ce point de vue donnent *parfois* lieu ne laissent à désirer ni en clarté ni en rigueur : si l'évolution des conventions d'écritures et la réorganisation des noyaux conceptuels créent rétrospectivement un effet de flou pour le lecteur, ce n'est pas là l'effet d'un flou conceptuel. Le comportement en un point recouvre des aspects que nous distinguons comme infinitésimaux ou locaux ; il s'articule moins avec un couple local/global qu'avec un couple point ordinaire / points singulier et un couple comportement (en chaque point) / marche (*Verlauf*).

Chapitre 2. Lectures de Riemann.

I. Les *Leçons sur la théorie riemannienne des intégrales abéliennes* de Carl Neumann (1865 et 1884).

Dans la préface de la première édition (1865), Carl Neumann souligne les deux traits principaux de l'approche riemannienne en théorie des fonctions d'une variable complexe : caractérisation des fonctions par conditions relatives aux contours et aux discontinuités – par opposition à une caractérisation par l'expression (*Ausdruck*) – et représentation de la variable complexe par une surface qui ne soit pas un plan. Il présente son projet propre comme essentiellement didactique : ayant mis au point à l'université de Halle un enseignement fondé sur les travaux de Riemann, il nous dit avoir trouvé des moyens de les rendre à la fois plus intuitifs et, sur certains points, plus rigoureux. Il propose une comparaison avec le calcul infinitésimal : comme pour la théorie riemannienne, les premiers principes ne suffisent pas, il faut longuement en étudier les méthodes. Le traitement détaillé de nombreux exemples fait bien de cet ouvrage un manuel proposant une série de techniques correspondant aux présentations très générales de Riemann, mais on ne saurait réduire ce travail à sa dimension technique. En explicitant, au moyen d'exemples, de figures, mais aussi parfois par un vocabulaire ou des notations nouvelles ; en détaillant et justifiant certains choix, la portée et l'intérêt de certaines notions, il propose une clarification conceptuelle. Les différents niveaux de lieu – niveau infinitésimal, voisinage d'un point, recouvrement de la surface, surface complète – s'y trouvent articulés très progressivement et explicitement, d'une manière qui contraste avec la virtuosité de l'entrelacement riemannien. C'est sur cet aspect que nous centrerons notre lecture des *Leçons sur la théorie riemannienne des intégrales abéliennes*, en n'abordant dans ce premier temps que la mise en place des notions et l'analyse des fonctions abéliennes ; nous étudierons plus loin la synthèse – les théorèmes d'existence de fonctions harmoniques ou analytiques complexes – en mettant en parallèle les techniques de Neumann et de Schwarz. Nous nous appuierons sur la deuxième édition (1884) mais nous terminerons sur une brève comparaison avec la première édition (1865).

1. Cas des fonctions uniformes.

Le premier chapitre expose les premières notions de l'analyse complexe, présentées à la Cauchy plutôt que, comme Riemann le faisait, par les fonctions harmoniques. Après avoir rappelé qu'on représente géométriquement deux variables réelles x et y par un plan orienté, il définit rapidement l'intégrale curviligne d'expressions du type WdV , où W et V sont deux fonctions de x et y . Dans le cas où W est univoque et continue – ce qui semble impliquer, implicitement dans tout l'ouvrage, l'infinie différentiabilité – dans une surface A dans le plan, bordé par une courbe orientée simple, il montre :

$$\int_A Wdx = -\iint_A \frac{\partial W}{\partial y} dx dy \quad (\text{formule 5})$$

La méthode de démonstration est exactement celle de Riemann dans le §7 de la *Théorie des fonctions d'une grandeur complexe* : l'intégrale de droite est évaluée en deux temps, en découpant la surface par des bandes parallèles à l'axe des y et de largeur infinitésimale dx . Dans le texte de Riemann, aucun symbole n'accompagne le signe d'intégration pour désigner le domaine d'intégration, il devait être précisé dans le texte ; on voit ici Neumann utiliser les notations \int_A et \iint_A : le passage de l'intégrale curviligne à l'intégrale de surface est marqué par le passage de l'intégrale simple à l'intégrale double (et de dx à $dx dy$), mais aucune notation ne vient distinguer la surface A de son bord. Il est intéressant de souligner une autre différence avec la démonstration de Riemann : alors que ce dernier considérait que ce raisonnement démontrait la formule pour tout type de domaine – surface quelconque étendue au-dessus du plan et présentant un bord formé d'un nombre quelconque de courbes – Neumann ne lui reconnaît de validité que pour les domaines plans limités par une courbe simple. Il montre ensuite comment passer aux domaines plans plus généraux :

Dans la dérivation de la formule (5) nous avons implicitement supposé que la surface A ne possède qu'une courbe de bord, et que cette courbe ne rencontrait les droites parallèles à l'axe de y qu'en deux points. Maintenant, quelle que soit la surface A , on peut toujours la découper en morceaux plus petits au moyen d'un certain nombre de lignes σ , chacun de ces morceaux vérifiant ces hypothèses. Par conséquent la formule (5) est aussi correcte pour chacun de ces morceaux de surface. Mais si on additionne ensemble toutes les formules ainsi obtenues, alors (en vertu de (3)), les morceaux

d'intégrales correspondant aux courbes σ se détruisent mutuellement, pour redonner une formule de la forme donnée dans (5). [Neumann 1884 7]¹

Ce passage est, en un sens, emblématique de ce qui distingue le texte de Riemann de celui de Neumann. Riemann donne les grandes lignes d'une démonstration et affirme qu'elles démontrent le résultat pour toute surface (avec bord) ; la question de l'adaptation de la démonstration aux différents cas de figures n'est pas évoquée : on pouvait y voir un manque de rigueur, la faiblesse de l'attention portée aux conditions de validité du raisonnement et un certain flou dans la référence au lieu ; une analyse en terme de *genre* et de conventions d'écritures nous semblait toutefois plus pertinente, le texte de Riemann relevant du genre « théorie générale ». Dans le cadre d'un manuel, autre *genre*, Neumann donne l'argument de Riemann puis s'arrête pour un petit retour critique, débusque des hypothèses implicites puis indique un procédé pour se libérer de ces hypothèses implicites. Ce procédé passe par un nouveau geste technique : après le découpage en une infinité de bandes parallèles de largeur infinitésimale, un découpage en morceaux finis vérifiant les bonnes hypothèses. La fin du chapitre n'appelle pas de commentaire particulier : lorsque la différentielle $Udx+Vdy$ est complète (*vollständig*) – pour nous *fermée* – l'intégrale au bord est donc nulle. Les fonctions complexes d'une variable complexe sont ensuite caractérisées par les équations de Cauchy-Riemann, sans que Neumann ne donne l'interprétation géométrique, si importante chez Riemann, en terme de similitude dans les plus petites parties ; l'harmonicité des parties réelles et imaginaires n'est pas non plus mentionnée. Dans la suite du texte, le terme « continu » (*stetig*) semble désigner l'holomorphie, ce qui ne contribuera guère à une distinction claire entre structure topologique et structure conforme, on le verra à de nombreuses reprises. La formule de représentation intégrale de Cauchy est ensuite établie ; il en est déduit qu'une fonction de z univoque et continue dans tout le plan infini (« *auf der unendlichen Ebene allenthalben* » [Neumann 1884 23]), majorée en valeur absolue, est constante.

Le deuxième chapitre est consacré aux développements des fonctions en puissances de leur argument, aspect mis de côté par Riemann. Classiquement, la formule de représentation intégrale de Cauchy conduit aux développements en série entière dans les disques et en série

¹ « *Stillschweigend haben wir bei Ableitung dieser Formel (5.) vorausgesetzt, die Fläche A besitze nur eine Randcurve, ußerdem auch noch vorausgesetzt, dass diese Randcurve von jedweder zur y-Axe parallelen Linie immer nur in zwei Punkten getroffen werde. Wie nun aber die Fläche A auch beschaffen sein mag, stets wird man sie durch irgend welche Linien σ in kleinere Stücke zerlegen können, deren jedes jenen Voraussetzungen entspricht. Demgemäss wird also die Formel (5.) correct sein für jedes dieser einzelnen Flächenstücke. Addirt man aber alle so sich ergebenden Formeln zusammen, so wird man, weil [Zufolge (3.)] die den Curven σ*

de Laurent dans les couronnes. Neumann en déduit qu'une fonction de z , continue et uniforme sur une surface A (dans le plan), constante sur un élément de ligne (*Linienlement*) ou de surface (*Flächenelement*) intérieure à A (*innerhalb A*) est constante dans A : le caractère syntaxiquement global de l'énoncé est ici encore marqué par « *allenthalben A* » [Neumann 1884 34]. Les paragraphes 4 et 5 introduisent explicitement un niveau spécifiquement local. Le paragraphe 4 s'intitule : « Représentation d'une fonction $f(z)$ dans le domaine, i.e. au voisinage d'un point particulier » [Neumann 1884 36]². Il y est établi, sans surprise, que si une fonction $f(z)$ est univoque et continue dans un domaine plan A et s'annule en un point c (nécessairement isolé, sans quoi la fonction serait constante, explique Neumann), on peut la représenter dans un disque suffisamment petit autour de c (entièrement contenu dans A , précise Neumann) par $f(z) = (z-c)^n E(z)$, où n est un entier positif strict, et $E(z)$ une fonction univoque, continue et ne s'annulant pas sur le disque ; on note au passage la formulation précise et systématique des domaines associés aux hypothèses ou à la conclusion. Le paragraphe 5 a une ambition plus large et s'ouvre sur les explications suivantes :

Soit dans l'espace une surface quelconque, peu importe qu'elle soit plane ou courbe ; sur cette surface un point quelconque c . Imaginons un petit morceau de surface délimité sur cette surface autour de c ; on peut, en un certain sens, regarder c comme le *centre* de ce morceau de surface ; et par conséquent considérer les lignes les plus courtes de c vers le bord du morceau de surface comme des *rayons vecteurs*.

Définition : à l'avenir, un tel morceau de surface délimité autour du point donné c , lorsque ses rayons vecteurs sont suffisamment petits mais tous non nuls, sera désigné d'un terme particulier, celui de domaine [*Bereich*] du point c . Ce qu'il faut entendre par suffisamment petit, dépendra des circonstances de chaque cas particulier. [Neumann 1884 37]³

De ces petits morceaux délimités ou découpés autour d'un point et dont la taille dépend des circonstances, on en rencontrait bien sûr chez Riemann ; l'innovation de Neumann est, dans

zugehörigen Integraltheile sich gegenseitig zerstören, wiederum zu einer Formel gelangen von der in (5.) angegebenen Gestalt. »

² « Darstellung einer Function $f(z)$ im Bereich, d.i. in der Umgebung eines einzelnen Punktes »

³ « Gegeben sei im Raume irgend welche Fläche, gleichgültig, ob eben oder krumm ; und auf dieser Fläche irgend ein Punkt c . Um c herum denke man sich auf jener Fläche ein kleines Flächenstück abgegrenzt ; c selber mag gewissermassen als der Mittelpunkt dieses Flächenstück angesehen werden ; und demgemäss mögen die von c nach dem Rande des Flächenstücks hinlaufenden kürzesten Linien als die Radii vectores des Flächenstück betrachtet werden.

Definition : Ein solches um den gegebenen Punkt c herum abgegrenztes Flächenstück soll in Zukunft für den Fall, das seine Radii vectores hinreichend klein, dabei aber sämmtlich von Null verschieden, mit einem besonderen Namen bezeichnet, nämlich das Bereich des Punktes c genannt werden.

Was dabei in jedem einzelnen Fall unter hinreichend klein zu verstehen ist, wird abhängen von jedesmaligen näheren Umständen. »

un texte où la référence au lieu est précise et systématique, de nommer ce *type* de lieu, permettant un mode de référence à la fois rigoureux et rapide. Notons l'emploi du pronom défini : il ne s'agit pas de définir ce qu'est *un* domaine (ou un voisinage) mais ce qu'est *le* domaine du point c dans telle ou telle circonstance ; le filtre des voisinages d'un point n'est pas convoqué. Notons aussi le balancement, dans le titre du §4 par exemple, entre les termes « voisinage » (*Umgebung*) et « domaine » (*Bereich*) : le premier renvoie à une notion informelle, le second est la notion formellement définie associée à la notion informelle. Cette notion de domaine d'un point sert à introduire la notion de pôle :

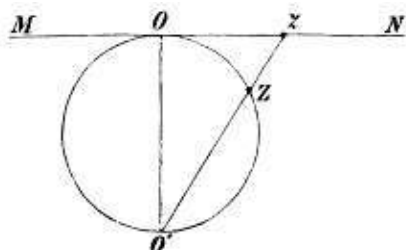
Definition : si une fonction f est en un point quelconque c discontinue, mais discontinue de sorte que sa valeur réciproque $\frac{1}{f}$ demeure continue dans le domaine du point, alors le point c est appelé un pôle de la fonction f , et la discontinuité dont est affectée la fonction en ce point sera appelée discontinuité polaire. [Neumann 1884 38]⁴

Si le caractère local de cette élégante définition intrinsèque est clairement marqué, la notion de prolongement par continuité ou la question de l'analyticité du prolongement ne sont pas évoquées. Nous ne sommes pas encore dans un cadre d'analyse où une fonction continue et sa restriction au domaine précédent privé d'un point sont deux objets distinguables : il n'y a pas de prolongement par continuité dans l'exacte mesure où l'on n'imagine pas qu'il puisse ne pas être fait s'il est possible. Notons aussi qu'on ne sait pas très bien en lisant cette définition, qui repose sur la notion de domaine d'un point, si elle concerne les fonctions continues ou les fonctions de z . La suite du paragraphe montre qu'il s'agit d'une définition s'appliquant aux fonctions de z , sans qu'une notion de structure complexe ait été incluse dans la notion de domaine d'un point sur une surface courbe. Nous utiliserons le terme de fonction méromorphe pour abrégé ce que Neumann désigne toujours par la périphrase : fonction univoque et continue sauf pour des pôles ; nous dirons souvent fonction holomorphe dans le cas où il ne se présente pas de pôles. La suite du chapitre est consacrée à l'extension aux cas méromorphes de résultats obtenus en début de chapitre pour les fonctions holomorphes : les pôles sont isolés, l'annulation sur un élément de ligne ou de surface n'est possible que pour une fonction identiquement nulle, représentation dans le domaine d'un pôle, ordre d'un zéro ou d'un pôle. On termine sur le calcul de la somme des ordres des zéros et pôles d'une fonction dans un domaine borné plan A par l'intégrale le long du bord de A de la dérivée logarithmique de la fonction.

Le troisième chapitre introduit le travail sur la sphère, qu'on dit depuis « de Riemann », et introduit explicitement des notions de carte et de changement de carte. L'usage du point à l'infini ou de la valeur $z = \infty$ n'était pas associé dans les textes de Riemann que nous avons présentés à la substitution d'une sphère au plan ; Neumann signale dans la préface que l'idée de passer du plan à une sphère par projection stéréographique était enseignée par Riemann, mais ne s'est transmise qu'oralement. Il ouvre le chapitre en rappelant que les théorèmes établis jusque là l'étaient pour des domaines plans finis – nous dirions bornés et nous ajouterions connexes, bordés par des courbes suffisamment régulières ; il ne s'appliquent donc pas lorsqu'on veut étudier les fonctions dans toute leur « étendue » :

Pour étudier une fonction $f(z)$ quelconque *dans toute son étendue* [*in ihrem ganze Umfange*], on doit utiliser tout le plan horizontal *infini* comme support [*Träger*] de ses valeurs. Les propositions trouvées jusqu'ici ne se rapportent toutefois qu'aux morceaux de surface *finis* A . On n'est donc plus en état d'étudier au moyen de ces propositions les valeurs de la fonction au *point à l'infini* du plan horizontal. [Neumann 1884 52]⁵

Notons qu'il s'agit dans cette phrase de l'étendue (*Umfang*) de la fonction et non de l'étendue du plan. Neumann présente ensuite la construction qu'on imagine, en partant de la figure suivante :



[Neumann 1884 52]]

Ni le plan des z ni la sphère ne sont des objets abstraits, il s'agit d'un plan (horizontal) particulier librement choisi dans l'espace pour représenter géométriquement la grandeur complexe variable z , et d'une sphère de l'espace, de rayon 1, tangente à ce plan au point d'affixe 0. Il est intéressant de voir que Neumann ne *commence* pas par des changements de variables, fussent-ils introduits géométriquement : il commence, de manière plus intrinsèque

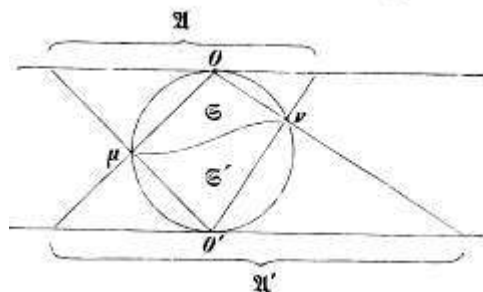
⁴ « Definition : Ist die Function f in irgend einem Punkte c unstetig, jedoch der Art unstetig, dass ihr reciproker Werth $1/f$ im Bereich des Punktes stetig bleibt, so soll der Punkt c ein Pol der Function f , und die Unstetigkeit, mit welcher die Function in diesem Punkte verheftet ist, eine polare Unstetigkeit genannt werden. »

⁵ « Soll irgend eine Function $f(z)$ in ihrem ganzen Umfange untersucht werden, so wird man als Träger ihrer Werthe die ganze unendliche Horizontalebene anzuwenden haben. Die bisher gefundenen Sätze beziehen sich nur auf endliche Flächenstücke A . Und man wird daher mittelst dieser Sätze die Werthe der Function in den unendlich fernen Punkten der Horizontal ebene nicht mehr zu untersuchen im Stande sein. »

et, en un certain sens, conforme à l'esprit riemannien, par la description géométrique d'un changement de porteur, d'une transplantation :

Concevons tout d'abord, de la manière usuelle, les valeurs de la fonction donnée $f(z)$ comme étendues sur le plan horizontal MN, et transplantons [*verpflanzen*] les ensuite de ce plan vers cette sphère (...) [Neumann 1884 52]⁶

On voit à l'évidence, nous dit Neumann, que la fonction $\left(\frac{1}{z}\right)^5$, prend la valeur 0 en le pôle sud O' , qu'elle est donc univoque sur toute la sphère ; la fonction $\sin z$ est par contre infiniment multivoque en O' , car elle prend une infinité de valeurs au delà de tout disque du plan centré sur O et que toutes ces valeurs se retrouvent, en passant à la sphère, sur le point O' . On voit encore comment un problème dans lequel nous verrions un problème d'existence – existe-t-il une fonction continue sur la sphère coïncidant avec $\sin z$ sur le plan – est formulé différemment lorsque la notion de fonction multivoque est légitime. Neumann explique ensuite que ce nouveau mode de représentation, s'il a l'avantage d'embrasser les valeurs à l'infini, conduit à travailler sur une surface courbe plutôt que sur un plan. Il remédie à cet inconvénient en introduisant un second plan, le plan antipodique, tangent au pôle sud cette fois [Neumann 1884 54] :



Ce nouveau plan présente de nouveau l'inconvénient d'avoir un point à l'infini. Neumann propose d'éviter les deux problèmes – présence de points à l'infini et travail sur une surface courbe – en coupant la sphère en hémisphères nord et sud et en représentant chacun par le disque unité du bon plan : on travaille donc dans deux surfaces planes finies A et A' , la fonction présentant les mêmes valeurs aux bord (*Randwerthe*) de l'une et de l'autre ; dès la préface, Neumann signalait que cette innovation lui était propre et ne provenait pas de l'enseignement de Riemann. C'est après cette mise en place géométrique que sont introduites les variables z (dans le plan initial), Z (sur la sphère) et z' (dans le plan antipodique).

⁶ « Wir denken uns zuvörderst die Werthe der gegebenen Function $f(z)$ in gewöhnlicher Weise auf der Horizontalebene MN ausgebreitet, und verpflanzen sodann diese Werthe von jener Ebene nach der Kugelfläche hin (...) »

L'analyticité du changement de variable n'est pas mentionnée, mais le renversement de l'orientation l'est. Neumann introduit la notion d'« état » (*Zustand*) pour expliquer en quoi, en dépit des modifications des formules explicites au cours des changements de variables, c'est une seule et même fonction qui est étudiée sur un plan, sur la sphère, ou sur un système de disques couplés :

On peut concevoir le plan horizontal, la sphère et le plan antipodique comme des états différents d'une et une seule surface pliable, extensible et contractile. [Neumann 1884 54]⁷

Puis :

Le passage du plan horizontal à la sphère, puis de celle-là de nouveau au plan antipodique, ne fait subir aux valeurs de la fonction qu'une variation de *lieu* [*Orts-Veränderung*] mais aucune modification de grandeur [*Grössen-Veränderung*]. [Neumann 1884 58]⁸

Les lettres z , Z et z' désignent trois grandeurs variables et trois positions (*Lage*) d'un même point : la fonction a une seule et même valeur en ces trois positions, seule la forme (*Form*) de la fonction est modifiée lorsqu'on substitue $z = 1/z'$. Cette construction de Neumann – dans les deux sens, construction intellectuelle et construction géométrique – appelle quelques remarques. Premièrement on ne retrouve pas la distinction soignée chez Riemann des structures topologiques, conformes et métriques. Deuxièmement, c'est presque paradoxal, l'effort vers l'intrinsèque peut contribuer à brouiller la notion de domaine de définition : la fonction (indépendamment de sa forme) est ce qui demeure au travers des différents changements de domaine ; il n'y a qu'un pas de l'indépendance envers la forme à l'indépendance envers le domaine. Troisièmement, le procédé de Neumann n'introduit pas deux cartes *locales* sur la sphère : les plans étaient d'emblée conçus comme possédant un point à l'infini, seule sa représentation géométrique manquait ; on dispose de trois états du même domaine fondamental d'une grandeur variable complexe, pas d'une sphère impossible à représenter comme domaine plan mais susceptible d'être recouverte par deux domaines partiels assimilables, eux, à des domaines plans. Après cette longue mise en place de la notion de fonction étendue (*ausgebreytet*) sur la sphère, sont démontrés les théorèmes usuels relatifs aux fonctions méromorphes *univoques* sur la sphère : si une telle fonction ne possède pas de

⁷ « Man kann die Horizontalebene, die Kugelfläche und die Antipodenebene als verschiedene Zustände ein und derselben biegsamen, dehnbaren und zusammenziehbaren Fläche auffassen. »

⁸ « Die Werthe irgend welche Function $f(z)$ erleiden, falls man die Horizontalebene in die Kugelfläche, und diese wieder in die Antipodenebene übergehen lässt, keine Grössen-Veränderung, sondern nur eine Orts-Veränderung. »

pôle alors elle est constante (le fait que le module d'une telle fonction est majoré est cité comme une évidence, on utilise ensuite le résultat du chapitre 1) ; si elle possède $z = \infty$ comme unique pôle alors elle est une fonction rationnelle entière de z ; si elle ne possède qu'un nombre fini de pôles elle est rationnelle.

2. Surface de Riemann d'une fonction algébrique.

Les trois premiers chapitres consistent donc en une mise en place très progressive de la théorie des fonctions méromorphes *univoques*, mise en place au cours de laquelle les différents aspects sont introduits successivement : travail sur une partie bornée du plan et utilisation des intégrales curvilignes (chapitre 1), travail au voisinage d'un point et développements en série (chapitres 2), travail sur la sphère de Riemann (chapitre 3). C'est le chapitre 4 qui aborde la question des fonctions multiformes et introduit les surfaces de Riemann au-dessus de la sphère (*Riemann'schen Kugelflächen*). On se souvient qu'en 1851 Riemann asseyait l'introduction d'une surface au lieu du plan en soulignant que l'essentiel résidait dans la bidimensionnalité et la notion de similitude dans les plus petites parties, notions qui ont un sens pour d'autres surfaces qu'un plan ; il utilisait ensuite un mode de description unidimensionnel, s'appuyant sur le lien entre chemins dans le plan des z et chemins sur une surface au-dessus de ce plan, faisant ainsi apparaître le rôle particulier des points de ramification. La présentation était légèrement différente dans la théorie des fonctions abéliennes, les fonctions y jouant d'emblée un rôle plus structurant : le relèvement des chemins y était rapproché du prolongement analytique des fonctions, la notions de feuillet de la surface de la notion de branche d'une fonction ; l'image du pas de vis infinitésimal enrichissait la description des points de ramification, sans induire de modification du traitement analytique. Pour présenter la notion de surface de Riemann, Neumann dispose donc de plusieurs formulations riemanniennes, ainsi que de notions qu'il a lui-même introduites : domaine d'un point (*Bereich*), support (*Träger*) des valeurs d'une fonction, états (*Zustände*) d'un même support ; auteur d'un manuel et non d'une théorie générale, il dispose aussi d'une ressource non conceptuelle : utiliser de longues séries d'exemples de complexité croissante, à la fois pour introduire les notions et pour enseigner des techniques.

Neumann attaque par les notions de point de ramification (*Windungspunkt*) et de surface de ramification (*Windungsfläche*) ; comme dans les chapitres précédents, le traitement géométrique précède le traitement analytique. Considérons dans l'espace un point c , une

sphère de rayon 1 centrée sur ce point ; la surface décrite par le rayon vecteur issu de c lorsque son extrémité décrit sur la sphère une certaine courbe directrice est un *Kegelmantel*, qu'on dit fermé si la courbe directrice est fermée. Un *Kegelmantel* doit être regardé avec une convention spéciale. Par exemple, si la courbe directrice dessine un huit et possède donc un point double, la surface se coupe elle-même selon un rayon vecteur ; le *Kegelmantel* ne doit pas être regardé comme une surface dans l'espace se recoupant elle-même :

Dans l'avenir nous aurons souvent affaire à ce type de surfaces (...)

Nous fixons une fois pour toute qu'entre deux morceaux de surface se coupant selon une ligne quelconque ne doivent présenter ni connexion [*Zusammenhang*] ni, donc, voisinage [*Nachbarschaft*] le long de cette ligne. [Neumann 1884 65]⁹

« voisinage » étant bien sûr ici à entendre en un sens non technique. Cette convention primitive est explicitée de différentes manières, tout d'abord en termes de chemins sur une telle surface :

Dès qu'il est question d'un point qui *avance sur, progresse sur* ou *parcourt* une surface, on entend toujours, comme chacun sait, un point [*Punkt*] dont la position [*Lage*] varie *continûment* sur la surface, c'est-à-dire un point qui se déplace toujours de tel ou tel emplacement [*Stelle*] de la surface vers un *emplacement voisin*. [Neumann 1884 65]¹⁰

D'où la convention :

En une ligne où se coupent deux morceaux de la surface, le déplacement d'un point qui avance sur la surface est toujours tel qu'il serait si l'un des deux morceaux de surface n'existait pas. [Neumann 1884 66]¹¹

On notera la subtilité du vocabulaire : point (*Punkt*) renvoie au point générique, emplacement (*Stelle*) désigne le point sur la surface indépendamment du point générique, position (*Lage*) désigne la conjonction du point générique et de l'emplacement. La notion de courbe continue reposant sur celle de point générique – seul capable de se mouvoir continûment (*stetig*) donc d'engendrer une courbe connexe (*zusammenhängend*) – et non sur celle d'emplacement, on peut définir sans ambiguïté le cheminement continu sur la surface en oubliant une auto-

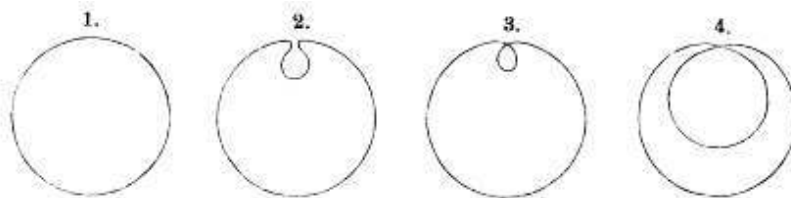
⁹ « Mit Fläche solcher Art werden wir in Zukunft häufig zu thun haben (...). Wir setzen nämlich ein für allemal fest, dass zwischen zwei Flächentheile, welche einander in irgend einer Linie durchsetzen, längs dieser Linie hin kein Zusammenhang, also auch keine Nachbarschaft stattfinden soll. »

¹⁰ « Sobald von einem Punkte die Rede ist, welcher auf einer gegebenen Fläche forgeht, oder fortschreitet, oder fortläuft, so versteht man darunter bekanntlich jederzeit einen Punkt, welcher seine Lage auf der Fläche stetig ändert, also einen Punkt, der von jedweder Stelle der Fläche immer nur zu einer benachbarten Stelle sich fortwegt. »

intersection ensembliste formée d'emplacements. La notion de chemin continu fonde celle de fonction continue dont le support est une surface ; Neumann rappelle qu'il a jusqu'à présent considéré comme support des plans ou des sphères, mais qu'il sera amené à choisir d'autres surfaces comme support pour des fonctions :

Chaque point de la surface choisie sera alors porteur d'une valeur particulière de la fonction. S'il se trouve que des points contigus [*zusammenhängende*] de la surface portent aussi des valeurs continûment contiguës de la fonction, on dira que la fonction est continue sur toute cette surface. [Neumann 1884 66]¹²

On voit que cette définition a valeur générale et ne porte pas spécifiquement sur les surfaces de ramification ; mais on peut penser qu'une notion si commune n'aurait peut-être pas mérité une explicitation pour les surfaces ordinaires : c'est le caractère particulier de ce qu'il faut entendre pas chemin continu sur une surface de ramification qui appelle une explicitation de la notion de fonction continue sur une surface. Neumann propose ensuite un autre mode de représentation d'une surface de ramification, à partir d'une série de disques chacun affecté d'une coupure ou lignes de transition (*Übergangslinie*) du centre vers un point de la périphérie, et de règles de transition (*Übergang*) permettant de relier les disques le long des coupures. L'ordre du point de ramification est d'une unité inférieur au nombre des disques à recoller. Le modèle riemannien associant contours entourant un chemin de ramification et permutation des feuilletts – modèle qu'on retrouve dans la théorie des fonctions vérifiant une équation différentielle linéaire – cède la place au modèle coupure/transition, d'ailleurs *aussi* présent chez Riemann en 1851. Dans le deuxième paragraphe, Neumann entreprend de montrer géométriquement que les surfaces de ramification peuvent être continûment transformées en disque plans usuels. Il nous propose d'imaginer que la courbe directrice est un fil de caoutchouc (*Gummifaden*) subissant continûment la déformation suivante :



[Neumann 1884 70]

¹¹ « Bei einer Linie, in welcher zwei Theile einer Fläche einander durchsetzen, ist die Bewegung einer auf der Fläche fortlaufenden Punktes nothwendig immer der Art, als wäre der eine von diesen beiden Flächentheilen gar nicht vorhanden. »

¹² « Jeder Punkt der gerade gewählten Fläche wird alsdann der Träger einer gewissen Funktionswerthes werden. Trifft es sich, dass hierbei zusammenhängende Flächenpunkte auch jederzeit mit stetig zusammenhängenden Funktionswerthe belastet sind, so wird die Function eine auf jene Fläche überall stetige zu nennen sein. »

Lorsque la courbe directrice passe par ces quatre états (on retrouve *Zustände*), la *Kegelfläche* associée passe continûment d'une surface à un feuillet (ramification d'ordre 0) à une surface à deux feuillets (ramification d'ordre 1). Plus généralement, une surface à un nombre fini de feuillets peut être continûment déformée (*stetige Umformung*) par ce procédé en une surface à un seul feuillet, et réciproquement. C'est seulement après avoir établi géométriquement cette possibilité que Neumann passe à sa formulation analytique (*analytische Einkleidung*). Qu'on se donne deux plans indépendants dans l'espace, orientés, l'un de coordonnées xy , l'autre $\xi\eta$, et associons deux rayons vecteurs tournant chacun autour d'un point, avec des longueurs et des vitesses angulaires dans les rapports suivants : la longueur de l'un est racine m -ième de la longueur de l'autre, l'angle balayé par l'un est égal à l'angle balayé par l'autre divisé par m (m entier positif) :

Après déroulement de tout le processus on a donc dans le plan xy une surface de ramification à m feuillets, de centre ou point de ramification c , et dans le plan $\xi\eta$ une surface ordinaire à un seul feuillet, de centre γ . [Neumann 1884 73]¹³

Neumann explique que les liens de contiguïté sont respectés, qu'on a donc une déformation continue d'une surface à l'autre. Le point le plus intéressant est ici le fait que la surface à m feuillets est une surface *dans* le plan des xy , elle est cette surface parcourue m fois par le rayon vecteur : on retrouve la distinction entre point générique – susceptible de parcourir m fois le même trajet – et ensemble des emplacements qui ne forme après tout qu'un disque plan. Il n'y a plus qu'à passer en coordonnées polaires pour passer aux nombres complexes et se ramener à la correspondance (*Correspondenz*) $z - c = (\zeta - \gamma)^m$, habillage analytique de la transformation géométrique. On retrouve ici encore l'absence de distinction nette entre niveau topologique et niveau analytique.

La surface de Riemann est ensuite introduite aux paragraphes 4 et 5 du chapitre 4, grâce à un exemple traité de deux manières différentes. Neumann considère la fonction

$$f(z) = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)} ,$$

où c_1 , c_2 et c_3 sont trois constantes, implicitement distinctes. Le paragraphe 4 est consacré aux aspects unidimensionnels ; résumons-en les grandes lignes, en restant au plus près de la formulation de Neumann : pour chaque position du point z la fonction possède deux valeurs opposées f et $-f$; ces valeurs simultanées se modifient pas à pas continûment lorsque z

parcourt une courbe $z', z'', z''' \dots$ et produisent ainsi deux courbes correspondant aux séries $f', f'', f''' \dots$ (série α) et $-f', -f'', -f''' \dots$ (série β) ; si la courbe σ passe par l'un des points c_i , il se produit à cet instant (*in diesem Augenblick*) un contact des deux séries, les valeurs à cet instant (*die augenblicklichen Werthe*) étant 0 ; les deux séries demeurent par contre distinctes si la courbe σ évite les c_i : chacune des séries est donc, après déclaration de sa valeur initiale (*durch Angabe ihres Anfangswerthe*), univoquement déterminée (*eindeutig bestimmt*) le long de toute la courbe. C'est une question essentiellement différente, écrit Neumann, de savoir si la série de valeurs revient à la valeur initiale si le point z (*Punkt*) revient en sa position initiale (*Anfangsloge*) tout en évitant les c_i . Une petite étude analytique montre que la fonction revient à la valeur initiale si la courbe fermée simple entoure un nombre pair des points c_i (i.e. 0 ou 2) et à la valeur opposée si elle entoure un nombre impair des c_i . Après cette description en termes de cheminement, des plus classiques, Neumann passe à une approche bidimensionnelle dans le paragraphe 5. Il utilise pour ce faire une nouvelle notion, celle de stock des valeurs (*Werthvorrath*) d'une fonction multivoque, qui joue en face de la notion de support (*Träger*) un peu le rôle de l'image en face du domaine, dans une vision ensembliste.

Soient $(+f_0)$ et $(-f_0)$ les valeurs de f en un point quelconque z_0 . Décrivons autour de z_0 un petit morceau de surface et transplantons [*aufpflanzen*] sur ce morceau de surface aussi bien le système de valeurs $S(+f_0)$ qui se raccorde continûment à $(+f_0)$, que celui $S(-f_0)$ continûment lié à $(-f_0)$.

Laissons maintenant ce petit morceau de surface croître encore et encore de tous côtés, étendant simultanément les deux systèmes de valeurs de façon correspondante (...)[Neumann 1884 77]¹⁴

Les raisonnements du paragraphe précédent montrent que :

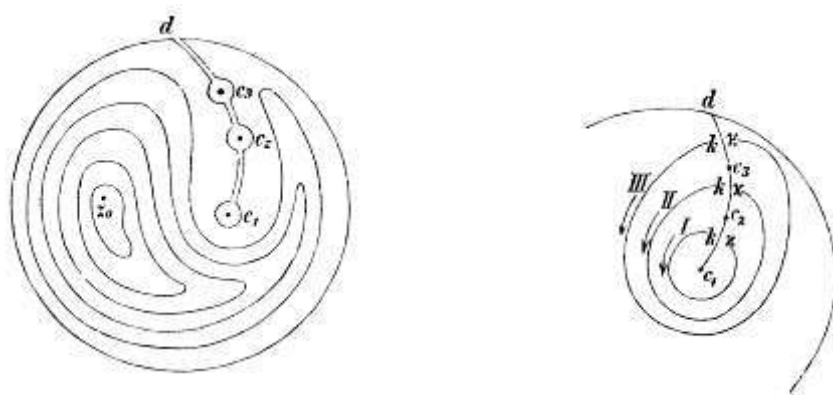
Tant que les points c_1, c_2, c_3 restent à l'extérieur de la périphérie commune des systèmes $S(+f_0)$ et $S(-f_0)$, ces deux systèmes sont sans contact mutuel, sont donc

¹³ « Nach Ablauf des ganzen Processes haben wir also in der xy -Ebene eine m -blättrige Windungsfläche, mit dem Centrum oder Windungspunkt c , anderseits in der $\xi\eta$ -Ebene eine gewöhnliche ein-blättrige Fläche mit dem Centrum γ . »

¹⁴ « Es seien $(+f_0)$ und $(-f_0)$ die Werthe von f in irgend einem Punkte z_0 . Wir beschreiben um z_0 ein kleines Flächenstück und pflanzen auf diesem Flächenstück sowohl dasjenige Werthsystem $S(+f_0)$ auf, welche an $(+f_0)$ sich stetig anschliesst, als auch dasjenige Werthsystem $S(-f_0)$, welches mit $(-f_0)$ stetig zusammenhängt. Wir lassen nun jenes kleine Flächenstück nach allen Seiten hin mehr und mehr anwachsen und gleichzeitig die genannte beiden Werthsysteme in entsprechender Weise sich ausdehnen (...) »

univoquement déterminés et possèdent en chaque point z des valeurs opposées.
 [Neumann 1884 78]¹⁵

Si l'image est claire, on doit constater que les systèmes sont, dans une interprétation ensembliste, à la fois dans le plan (puisqu'on imagine que les points c_i pourraient leur être intérieurs) et non dans le plan ; Riemann évitait cette difficulté en introduisant la notion de surface étendue au-dessus du plan. Neumann poursuit : soit un disque R centré sur l'origine ; retirons à ce disque une bande mince issue de c_1 , passant par c_2 puis c_3 et rejoignant un point d de la circonférence, il reste une surface R' sur laquelle les deux systèmes sont sans contact (figure de gauche ci-dessous); il reste à étudier la nature du lien entre les deux systèmes le long du bord de R' (figure de droite).



[Neumann 1884 79]

L'étude le long des deux rives (*Ufer*) du bord utilise bien sûr les acquis de l'étude unidimensionnelle du paragraphe précédent, ce qui clot le paragraphe consacré au partage du stock des valeurs de la fonction en deux systèmes séparés (*Zerlegung ihres ganzen Werthvorrathes in zwei gesonderte Systeme*). Le paragraphe 6 étend ces considérations à

$$f(z) = \sqrt{(z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_{2n})}$$

et passe à la formation de la surface de Riemann :

Considérons maintenant que la surface R' est *doublée*, c'est-à-dire donnée en deux exemplaires exactement l'un au-dessus de l'autre R' et L' , pouvant être séparés l'un de l'autre par un espace intermédiaire infiniment mince. Laissons le système $S(+f_0)$ sur R' mais transplantons l'autre système $S(-f_0)$ de R' vers L' . Alors deux points l'un au-

¹⁵ « So lange die Punkte c_1, c_2, c_3 ausserhalb der gemeinschaftlichen Peripherie der Systeme $S(+f_0)$ und $S(-f_0)$ bleiben, werden diese beiden Systeme ohne gegenseitigen Contact, mithin eindeutig bestimmt sein, und in jedwedem Punkte z entgegengesetzte Werthe besitzen. »

dessus de l'autre des surfaces R' et L' sont chargés de valeurs opposées de la fonction.

[Neumann 1884 80]¹⁶

La règle d'appariement des rives le long de la coupure est décrite par un petit tableau combinatoire et un schéma en coupe ; ainsi entre c_1 et c_2 [Neumann 1884 81] :

$$\begin{array}{l|l} \text{in } k: +K, & \text{in } \kappa: -K, \\ \text{in } l: -K, & \text{in } \lambda: +K. \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} k \quad \kappa \text{---} \\ \quad \quad \quad \diagdown \quad / \\ \quad \quad \quad l \quad \lambda \\ \text{---} \end{array}$$

et entre c_2 et c_3 [Neumann 1884 81] :

$$\begin{array}{l|l} \text{in } k: +K, & \text{in } \kappa: +K, \\ \text{in } l: -K, & \text{in } \lambda: -K, \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} k \quad \kappa \text{---} \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ \text{---} l \quad \lambda \text{---} \end{array}$$

En agrafant (*zusammenheften*) les rives le long de lignes de transition (*Übergangslinien*) on obtient une unique surface à deux feuillets, que Neumann note $(R'+L')$. Après avoir fait croître le disque jusqu'à englober le point à l'infini, il obtient une surface à deux feuillets au-dessus de la sphère de Riemann, à $2n$ point de ramification et n lignes de transition $(c_1c_2)\dots(c_{2n-1}c_{2n})$. Le terme choisi par Neumann n'est toutefois pas « surface de Riemann étendue au-dessus » du plan ou de la sphère mais « sphère de Riemann » (*Riemann'schen Kugelfläche*) : la surface n'est pas une surface au-dessus de la sphère, elle est la sphère structurée par des feuillets, des points de ramification et des lignes de transition. Pour éviter les confusions nous conserverons le terme de surface de Riemann. Neumann ne parle pas non plus d'uniformisation de la fonction par introduction d'une nouvelle variable, point sur une surface, mais toujours de partage du stock des valeurs :

Sur cette surface R la fonction est partout continue sauf en deux pôles, superposés en $z = \infty$, séparés l'un de l'autre par l'espace intermédiaire infiniment petit qui passe entre les deux feuillets de la surface R . [Neumann 1884 84]¹⁷

Le traitement détaillé de cet exemple permet d'aborder plus rapidement une série d'exemples présentant des cas de figure légèrement différents :

¹⁶ « Wir denken uns jetzt die Fläche R' doppelt, nämlich gegeben in zwei genau übereinander liegenden Exemplaren R' und L' , die etwa von einander getrennt sein können durch einen unendlich dünnen Zwischenraum. Das System $S(+f_0)$ lassen wir auf R' , verpflanzen aber das andere System $S(-f_0)$ von R' nach L' . Alsdann werden also je zwei übereinander liegende Punkte der Flächen R' und L' mit einander entgegengesetzten Functionswerthen belastet sein. »

¹⁷ « Auf dieser Fläche R ist die Function überall stetig bis auf zwei Pole, welche bei $z = \infty$ übereinander liegen, von einander getrennt durch den unendlich dünnen Zwischenraum, der zwischen der beiden Blättern der Fläche R sich hinzieht. »

$$\sqrt{(z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_{2n-1})} , \quad \sqrt[3]{\frac{z - c}{z - \gamma}} , \quad \sqrt[3]{(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)}$$

Cette série d'exemples s'inscrit bien sûr dans un contexte didactique, elle fournit un modèle de résolution d'un nouveau type d'exercice scolaire en même temps qu'un modèle d'enseignement de la théorie dont on verra qu'il est largement repris dans la seconde moitié du 19^e siècle, parfois jusqu'au milieu du 20^e siècle. Cette construction pas à pas de la surface de Riemann d'une fonction algébrique simple conduit aussi à des explicitations et des choix qui ne trouvaient pas si clairement leur place dans les exposés riemanniens ; dans leur ensemble, ces exposés riemanniens laissent d'ailleurs entièrement de côté cette étape de la construction d'une telle surface de Riemann : ils décrivaient la surface après avoir justifié la non restriction au plan. Sans utiliser le terme, Neumann fonde sa construction sur la notion de branche d'une fonction multivoque, qui apparaissait rapidement et sans que les ambiguïtés inhérentes à cette notion soient levées, dans l'introduction de la *Théorie des fonctions abéliennes* de Riemann. La présentation de Neumann ressemble en un certain sens plus à ce qu'on peut lire, sans que Riemann l'explique ainsi, dans l'étude de 1857 sur certaines équations différentielles linéaires : partir du voisinage d'un point non singulier, où les branches (systèmes chez Neumann) sont déterminées sans ambiguïté, puis faire croître les domaines pour obtenir des *branches maximales*, dont il ne reste qu'à décrire la combinatoire des appariement bord à bord.

Après la série des exemples, le chapitre 4 s'achève sur quelques considérations générales. Neumann affirme d'abord que le procédé indiqué pour ces quelques fonctions algébriques simples est utilisable pour toute fonction algébrique. Ceci renvoie au chapitre 6, consacré à la continuité des fonctions multivoques, plus précisément à la continuité des fonctions définies implicitement par une équation polynomiale $F(s, z) = 0$. Il n'est pas inintéressant dans une étude sur l'émergence du couple local / global d'examiner, même rapidement, la notion de continuité des fonctions multivoques proposée par Neumann et la notion d'inversion à laquelle elle conduit. La notion de continuité est locale et concerne la continuité en un point : supposons, écrit Neumann, que pour une valeur particulière $z = c$, v des n -racines, s_1, \dots, s_v , deviennent égales à k , on dit que les v racines sont des fonctions continues en $z = c$ si leurs valeurs s'écartent très peu de k lorsque z s'écarte très peu de c . Neumann explicite cette définition un peu informelle en utilisant la notion de nombre de racines :

Supposons que l'équation $F(s,z) = 0$ possède pour une valeur particulière $z = c$ de l'argument une racine v -uple $s = k$; désignons de plus par ε un degré de petitesse à choisir à volonté. Si l'on peut rendre le nombre de toutes les racines élémentaires s de l'équation $F(s,z) = 0$, pour un argument arbitraire z , constant ($= v$) à l'intérieur d'un cercle de rayon ε décrit autour de $s = k$, en limitant le mouvement de cet argument arbitraire z à un cercle suffisamment petit décrit autour de $z = c$; alors ces v racines élémentaires s seront qualifiées de fonction de z continues au point $z = c$. [Neumann 1884 126]¹⁸

L'étude locale n'est pas menée pour les valeurs non singulières de z : ce que Neumann souhaite étudier c'est la notion de continuité d'une *famille* de fonctions, le comportement du système de racines au moment où elles se rejoignent ; hors au voisinage d'une valeur non singulière de z ces fonctions sont indépendantes les unes des autres et n'appellent donc pas ce type d'étude. Cette caractérisation de la continuité est ensuite utilisée dans l'étude du cas particulièrement simple où l'équation $F(s,z) = 0$ est de la forme $f(s) = z$, pour f polynomiale puis rationnelle. La représentation intégrale du nombre de racines fournie par le calcul des résidus permet en effet de garantir la continuité au sens de Neumann. Cette étude débouche sur celle de l'inversion de l'équation $f(s) = z$ (*Umkehrung der Gleichung*), lorsque f est univoque et holomorphe dans un disque du plan des s autour de $s = k$ [Neumann 1884 131]. Utilisant l'allure générale du développement en série entière, il montre que l'hypothèse $f'(k) \neq 0$ permet de garantir localement l'unicité des racines (localement dans l'espace des s et des z), l'inversion conduit donc à une fonction univoque et, d'après les résultats généraux du paragraphe, continue. On voit que ce théorème d'inversion est purement local, sans que cela semble mériter mention.

Reprenons le fil de l'étude des surfaces de Riemann d'une fonction algébrique. La fin du chapitre 4 introduit, après la construction d'une telle surface, un nouveau mode de description qui nous rapproche du travail par cartes locales ; le titre du paragraphe 14 l'annonce on ne peut plus clairement :

¹⁸ « Die Gleichung $F(s,z) = 0$ besitze für irgend ein spezielles Argument $z=c$ eine v -fache Wurzel $s=k$. Ferner bezeichne ε einen willkürlich zu wählenden Kleinheitsgrad. Kann nun die Anzahl all'derjenigen elementaren Wurzeln s , welche die Gleichung $F(s,z) = 0$, für ein beliebiges Argument z , innerhalb eines um $s=k$ mit dem Radius ε beschriebenen Kreises besitzt, dadurch constant, $= v$ gemacht werden, dass man die Bewegung jenes beliebigen Argumentes z auf einen um $z=c$ beschriebenen hinreichend kleinen Kreis beschränkt ; - so werden die in Rede stehenden v elementaren Wurzeln s als Functionen von z zu bezeichnen sein, die im Punkte $z = c$ stetig sind. »

Sur le découpage d'une sphère de Riemann en morceaux isolés, et sur le transport [Versetzung] de chacun de ces morceaux dans son état *naturel*. [Neumann 1884 94]¹⁹
 Rappelons que Neumann appelle sphère de Riemann (*Riemann'schen Kugelfläche*) toute surface de Riemann au-dessus de la sphère. Suivons Neumann :

Découpons cette surface R en un nombre arbitrairement grand de petits morceaux, tels que chacun ne soit bordé que par *une seule* courbe et contienne au plus *un* point de ramification ; on nommera un tel morceau une petite *surface de ramification à courbure sphérique*. On peut donc aussi subsumer sous ce terme ceux de ces morceaux qui ne contiennent *aucun* point de ramification, qui sont donc à un seul feuillet, vus comme des surfaces de ramification d'ordre 0 ; ainsi on doit comprendre sous le terme de point de ramification d'un tel morceau de surface un quelconque de ses points.

Chacun des petits morceaux en lesquels R est découpée peut être désigné par U ou $U(c,z)$, où c est le point de ramification et z désigne collectivement tous les autres points du morceau. Soit de plus m le nombre de ses feuillets, c étant donc d'ordre $m-1$. Ce morceau U peut maintenant être transformé, de manières d'ailleurs très différentes, par déformation continue en une surface *plane à un seul feuillet* (...).[Neumann 1884 95]²⁰

Neumann décrit un premier procédé consistant tout d'abord en la projection d'un morceau de sphère – on voit encore que la surface de Riemann est bien la sphère, simplement vue autrement – sur le plan horizontal depuis le pôle sud, pour obtenir un morceau plan $B(c,z)$ mais dont le nombre de feuillets demeure ; on poursuit par $z-c = (\zeta-\gamma)^m$ pour obtenir un nouvel état, le morceau à un seule feuillet $U(\zeta,\gamma)$ du plan des ζ . Il montre ensuite comment adapter en changeant de pôle, pour traiter du point à l'infini. L'état U est appelé l'état originel (*ursprüngliche Zustand*), l'état U l'état naturel (*natürliche Zustand*) [Neumann 1884 97]. Après avoir fait remarquer que cette substitution conserve l'orientation, Neumann anticipe le chapitre consacré aux fonctions sur une surface de Riemann en signalant qu'il est donc

¹⁹ « Ueber die Zerschneidung einer Riemann'schen Kugelfläche in einzelne Flächenstücke, und über die Versetzung eines jeden solchen Flächenstücks in seinen natürlichen Zustand. »

²⁰ « Zerschneidet man diese Fläche R in beliebig grosse Anzahl kleiner Stücke, der Art, dass jedes derselben nur eine Randcurve besitzt und nicht mehr als höchstens einen Windungspunkt enthält, so wird jedes solches Flächenstück als eine kleine sphärische gekrümmte Windungsfläche zu bezeichnen sein. Denn auch diejenigen dieser Stücke, welche keinen Windungspunkt enthalten, mithin einblättrig sind, können jenem Namen subsumirt, nämlich als Windungsflächen O^{ter} Ordnung angesehen werden [vgl. Pg.69] ; wobei alsdann unter dem Windungspunkt eines solchen Flächenstücks irgend ein beliebiger Punkt derselben zu verstehen ist. Irgend eins unter den kleinen Stücken, in welche R zerlegt ist, mag nun mit U oder $U(c,z)$ benannt werden. Es sei nämlich c der Windungspunkt, und z Collectivbezeichnung für alle übrigen Punkte des Flächenstücks. Ueberdies sei m die Anzahl seiner Blätter, also c ein Windungspunkt $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dieses Flächenstück U kann nun,

indifférent d'intégrer le long du bord d'un tel morceau de surface dans son état originel ou dans son état naturel ; remarque qu'il résume par la formule [Neumann 1884 97]

$$\int_{\mathbf{u}} f d\varphi = \int_{\mathbf{u}'} f d\varphi.$$

On notera l'apparition du domaine à côté du symbole d'intégration – il faut toutefois que le texte précise qu'il s'agit d'une intégrale curviligne et non de surface – et l'invariance de f et φ : comme Neumann l'avait expliqué au chapitre 3, la fonction se conserve lorsque le domaine change d'état. C'est d'ailleurs sur ce point de Neumann choisit de revenir en cette fin de chapitre 4. Il y revient sur la notion générale de déformation continue :

Pour déformer continûment deux surfaces quelconques l'une en l'autre, il suffit (lorsqu'une telle transformation est tout simplement possible) de trouver une loi par laquelle chaque point de l'une des surfaces correspond à un point déterminé de l'autre, une loi telle que deux points voisins [*benachbarte Punkte*] de l'une soit toujours en correspondance avec des points voisins de l'autre. [Neumann 1884 91]²¹

On retrouve la description usuelle de l'homéomorphie déjà présente chez Möbius ou Jordan, la condition de bijectivité étant implicitement contenue dans le caractère symétrique de la caractérisation (l'une et l'autre surface jouent le même rôle, la transformation n'est pas dirigée *de l'une vers l'autre*) et la condition de détermination, c'est-à-dire d'univocité. Neumann nous explique ensuite que la surface d'un disque peut être continûment déformée en celle d'un carré ou d'une demi-sphère, que par contre on ne saurait déformer continûment une sphère en tore (*Ringfläche*) ; l'objectif est bien sûr de faire sentir la spécificité du niveau topologique, essentielle à la compréhension de la théorie riemannienne des fonctions abéliennes. L'objectif est aussi de revenir, dans un cadre plus général qu'au chapitre 3, sur l'invariance des notions fonctionnelles envers le support des valeurs, du moins tant que ce support ne subit que des déformations continues :

Imaginons une surface quelconque dans l'espace, de courbure et de forme complètement arbitraire ; imaginons les valeurs d'une fonction étendues [*ausgebreitet*] sur cette surface. Cette surface peut subir une modification progressive continue pour passer de son *état initial* à un *état final* déterminé. A mesure que cette transformation

und zwar in sehr verschiedener Weise, durch stetige Umformung in eine ebene einblättrige Fläche verwandelt werden (...) »

²¹ « *Um von zwei beliebig gegebenen Flächen die eine in die andere umzuformen, bedarf es (sobald eine solche Umformung überhaupt möglich ist) nur die Auffindung eines Gesetzes, nach welchem jeder Punkt der einen Fläche mit einem bestimmten Punkt der andern correspondirt, jedoch eines Gesetzes, welches so beschaffen ist, dass demselben zufolge benachbarte Punkte der einen Fläche auch immer mit benachbarten Punkten der andern in Correspondenz stehen. »*

se poursuit, lorsque donc la surface passe d'une forme à une autre par *déformation continue*, chaque point de la surface peut demeurer indissolublement lié avec la valeur de la fonction qui lui fut une fois attribuée. [Neumann 1884 98]²²

On remarque ici encore l'indistinction entre transformation comme application ensembliste – dont les projections stéréographiques ou les changements de variables donnent l'exemple – et les familles à un paramètre de telles transformations ; cette indistinction n'est bien sûr en rien spécifique à Neumann. Ce dernier explique ensuite que si la fonction étendue sur l'état initial est univoque alors elle le demeure en l'état final – ce qui confirme indirectement la bijectivité de la déformation – et que la continuité de la déformation garantit la continuité de la fonction en l'état final, pour peu qu'elle ait été continue en l'état initial. Ayant au chapitre 2 caractérisé les pôles par des conditions de continuité – un pôle est un point où f est « discontinue » mais $1/f$ « continue » – il conclut sur le fait que les déformations continues conservent les zéros et les pôles. On voit encore une fois l'indistinction entre aspects topologiques et analytiques (ou conformes, du point de vue géométrique) : si Neumann est habile à faire sentir l'invariance topologique, il semble qu'elle s'accompagne automatiquement d'invariance de la structure analytique.

3. Fonctions sur une surface de Riemann.

Après ce chapitre 4 consacré à la notion de surface de Riemann d'une fonction algébrique – ou de sphère de Riemann, pour le dire comme Neumann – le chapitre 5 est consacré à la notion de fonction étendue sur une surface de Riemann. Ce chapitre nous fournit l'occasion de voir l'utilisation du découpage en morceaux susceptibles d'une transformation en leur état naturel – une forme de recouvrement par cartes locales donc – et une certaine explicitation de la notion de propriété locale. Neumann pose d'emblée le problème comme un problème de transposabilité (*Übertragbarkeit*) des propositions établies au chapitre 3 pour la sphère usuelle au cas des fonctions sur une sphère de Riemann [Neumann 1884 101] ; il s'agit bien de transposer des *propositions* (*Sätze*), pas des fonctions ou des structures : il s'agit du lien entre deux parties d'une même théorie, pas entre des espaces dont l'un serait modèle local de

²² « Wir wollen uns im Raume irgend eine Fläche denken von beliebiger Krümmung und überhaupt von ganz beliebiger Gestalt ; und auf dieser Fläche wollen wir uns die Werthe irgend welcher Function ausgebreitet denken. Jene Fläche mag nun einer stetig fortschreitenden Veränderung unterworfen und in solcher Weise, von ihrem Anfangszustande aus, in einen bestimmten Endzustand übergeführt werden. Während diese Veränderung aber vor sich geht, während also die Fläche durch stetige Umformung in andere und andere Gestalten übergeht, mögen die einzelnen Punkte der Fläche mit den ihnen einmal zuertheilten Functionswerthen unlöslich verbunden bleiben. »

l'autre, par exemple. Neumann commence, à titre de modèle, par transposer la proposition : une fonction univoque et continue (i.e. analytique) sauf en des pôles qui est constante sur un morceau de courbe ou de surface, si petit fut-il, est partout constante. Il le démontre en raisonnant par l'absurde, en considérant la fonction dans l'état naturel d'un morceau de surface qui contiendrait à la fois des points de constance de la fonction et d'autres points. Ceci montre entre autre que les zéros et les pôles sont isolés sur les sphères de Riemann comme sur la sphère usuelle. On voit ici le lien avec le chapitre 1 consacré aux théorèmes valides pour les fonctions univoques dans une partie *bornée* du plan complexe : après le passage à la sphère usuelle au chapitre 3, on retrouve ces parties dans le rôle de modèle naturel des morceaux d'une sphère de Riemann. Le travail doit être un peu plus précis lorsqu'il s'agit de définir la notion d'ordre d'un pôle ou d'un zéro, et Neumann fait précéder la définition qu'on imagine d'une explication générale particulièrement intéressante ; considérons une fonction étendue sur une sphère de Riemann :

Considérons tout d'abord les points d'annulation [*Nullpunkte*]. En ce qui concerne les valeurs que la fonction possède en ces points *eux-mêmes*, il ne peut manifestement se présenter aucune différence [*Verschiedenheit*] ; car ces valeurs sont toutes nulles, donc *identiques* entre-elles. Si l'on doit répartir ces points en types ou ordres différents, une telle répartition ne peut reposer sur les valeurs de la fonction en ces points *eux-mêmes*, mais seulement sur celles qui se trouvent à *proximité* [*in der Nähe*] de ces points, c'est-à-dire dans leurs domaines [*Bereiche*]. [Neumann 1884 103]²³

Neumann quitte ici délibérément l'enchaînement des définitions et propositions pour préciser l'articulation entre deux points de vue sur le comportement d'une fonction en un point ; bon pédagogue, il fait sentir la tension entre point de vue ponctuel et point de vue local, entre point du domaine de définition vu comme porteur d'une *valeur* ou comme porteur d'un *germe* de fonction. Le soin qu'il y apporte reflète la non-trivialité de cette explicitation dans la seconde moitié du 19^e siècle. On voit enfin dans ce cas le rôle qu'à pu jouer la théorie riemannienne des fonctions dans l'explicitation de l'articulation entre des points de vue structurant toute l'analyse : ce n'est pas à l'occasion de la définition de l'ordre des fonctions dans le plan complexe ou la sphère usuelle (chapitre 2) que Neumann glisse cette remarque, qui pourtant y aurait eu tout son sens, c'est pour justifier le passage à l'état naturel et le rôle

²³ « Wir betrachten zunächst die Nullpunkte. Hinsichtlich der Werthe, welche die Function in diesen Punkte selber besitzt, kann Offenbar keinerlei Verschiedenheit stattfinden ; denn diese Werthe sind sämtlich Null, mithin unter einander identisch. Sollen also jene Punkte in verschiedene Arten oder Ordnungen eingetheilt werden, so kann eine solche eintheilung sich nicht stützen auf diejenigen Functionswerthe, welche in den

spécifique des points de ramification ; la complexité du contexte fait passer la même distinction entre deux points de vue de l'état de *trivialité* qu'il serait bien pédant d'explicitier à celui de point sensible dans la théorie, d'*articulation pertinente*. Reprenons la lecture. Neumann explique ensuite que, puisqu'il s'agit de comparer les différents points d'annulation du point de vue des valeurs fonctionnelles portées par leur domaine, il faut d'abord donner à tout ces domaines la même forme ; de même, écrit-il, qu'un physicien souhaitant comparer les dimensions de différents corps doit s'assurer qu'ils sont tous à la même température. Dans le cas présent, cette forme normale (*Normalform*) sera bien sûr l'état naturel. Après avoir défini conformément à ces principes l'ordre d'une fonction continue et univoque en tout point d'une sphère de Riemann, cet ordre pouvant être un entier positif strict (zéro), négatif strict (pôle) ou nul, Neumann repasse au niveau *méta* pour une dernière remarque à propos de cette définition. Il fait remarquer que l'état naturel est loin d'être entièrement déterminé (*völlig bestimmt*), qu'on pourrait donc s'inquiéter d'une dépendance de la notion d'ordre envers le choix d'un état naturel plutôt que d'un autre ; il nous annonce qu'une des formules du paragraphe suivant viendra balayer ce doute. Il est intéressant de noter que ce sur quoi Neumann va fonder ce caractère intrinsèque de l'ordre d'une fonction en un point est l'invariance de l'intégrale curviligne (établie au chapitre précédent) et non un argument purement local au voisinage du point, en termes de changement de carte ; on ne trouvera jamais dans cet ouvrage l'idée que deux états équivalents du voisinage d'un point sont reliés par une transformation analytique inversible. Au moins deux éléments peuvent rendre compte du choix de Neumann. Premièrement la relative faiblesse de sa notion de déformation continue, dont le contenu essentiellement topologique et intuitif est difficilement habillable analytiquement, alors même que le thème de l'inversion locale analytique est étudié en toute clarté au chapitre 7 : les éléments sont présents mais le lien n'est pas fait. Deuxièmement, le passage par l'inversion locale analytique aurait nécessité un jeu entre les domaines, le voisinage sur lequel l'inversion est possible n'étant pas nécessairement le domaine issu du découpage de la surface en états originels ; non pas que Neumann nous semble incapable d'entrer dans ce jeu, mais la solution qu'il propose permet de l'éviter. Neumann assoie la définition de l'ordre en un point sur son expression comme intégrale curviligne de la dérivée logarithmique, intégrale dont il a montré qu'elle prend la même valeur dans l'état original et dans l'état naturel. Il montre ensuite comment transposer cette même formule intégrale à

Punkten selber vorhanden sind, sondern nur auf diejenigen, welche in der Nähe jener Punkte, nämlich in den Bereichen derselben sich vorfinden. »

différents domaines d'une sphère de Riemann, et pas seulement aux domaines des points dans un découpage :

Soit une fonction $f = f(z)$ univoque et continue, sauf en des pôles, sur une partie S d'une sphère de Riemann. Découpons S en petits morceaux au moyen de quelconques courbes σ :

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_q,$$

et désignons leurs *états naturels* respectifs par

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_q,$$

alors f possède sur U_x *exactement les mêmes* ordres que sur U_x (cf. (3)) [Neumann 1884 105]²⁴

On observe tout de même ici un petit problème de rigueur, (3) renvoyant en effet à la définition de l'ordre donnée au paragraphe précédent, définition provisoire que Neumann est supposé être en train de mieux fonder. Quoiqu'il en soit, on poursuit sur l'égalité des intégrales curvilignes de df/f au bord de U_x et de U_x , on additionne pour faire disparaître la contribution des contours intérieurs à S pour obtenir la représentation de la somme des ordres de f sur S (*sämmtlichen auf S vorhanden Ordnungszahlen*) par l'intégrale de df/f le long du bord de S . Neumann utilise ensuite le même raisonnement sur toute la sphère de Riemann, établissant que la somme des tous les ordres est nulle. Si, en particulier, une fonction $f(z)$ est continue, sauf en des pôles, sur une sphère isolé, et n'a que des zéros et des pôles simples, alors le nombre des premiers est égal au nombre des seconds. Quelques pages plus loin le résultat est appliqué à $f(z) - A$, A une constante quelconque pour décrire ce qu'il nomme les systèmes de points de niveau (*System von Niveaupunkten* [Neumann 1884 115]). On trouve au paragraphe 6 une remarque *méta* pouvant contribuer à la caractérisation d'un niveau spécifiquement *local*. Techniquement, le paragraphe est consacré à l'étude des expressions rationnelles en des fonctions méromorphes, en un certain sens à la stabilité par composition rationnelle de cette classe, ainsi qu'aux opérations induites sur les ordres sur des morceaux S de la surface lorsqu'on multiplie ou divise des fonctions méromorphes. Neumann fait la remarque suivante :

La preuve de ces propositions découle de cette circonstance que les propriétés d'*univocité*, de *continuité*, de *discontinuité polaire*, ainsi que de *valeur de l'ordre* sont

²⁴ « Die Function $f = f(z)$ sei auf irgend einem Theil S einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und bis auf Pole stetig. Zerlegt man S mittelst irgend welcher Curven σ in kleine Stücke : $U_1, U_2, U_3, \dots, U_q$, und bezeichnet die natürlichen Zustände derselben respective mit $U_1, U_2, U_3, \dots, U_q$, so besitzt f auf U_x genau dieselben Ordnungszahlen, wie auf U_x [vgl.(3)]. »

permanentes lorsqu'on passe de l'état originel à l'état naturel et réciproquement de l'état naturel à l'état originel (cf. remarque p.100. [Neumann 1884 113] ²⁵

L'accent n'est toutefois pas mis par Neumann sur le caractère local de ces propriétés mais sur leur caractère intrinsèque, leur indépendance envers l'état particulier dans lequel le domaine d'un point est considéré. La remarque p.100 à laquelle le lecteur est renvoyé est celle concernant la permanence de ces notions au travers des déformations continues : ce qui regroupe ces notions c'est donc un caractère d'invariance – de permanence – et non un caractère local. La proposition dont cette remarque fonde la démonstration concerne d'ailleurs des morceaux finis S de la surface de Riemann. Ce regroupement de propriétés garantit la transférabilité du mode de démonstration utilisé au paragraphe précédent, dans lequel des gestes de découpage du domaine sont compensés par des sommations numériques. Ce paragraphe 7 s'achève sur une dernière remarque intéressante : Neumann y considère z comme fonction sur une sphère de Riemann, pour faire remarque que, jusqu'alors, c'était la seule fonction dont l'existence soit garantie sur toute telle sphère ; les résultats de ce paragraphe montrent au moins que les fonctions rationnelles en z sont bien des fonctions méromorphes sur toute sphère de Riemann. Le chapitre s'achève sur une série de théorèmes globaux qu'on trouvait déjà chez Riemann. Contentons-nous de la démonstration de l'un d'entre eux : une fonction univoque et continue sur toute une sphère de Riemann est constante. On se souvient que sur la sphère de Riemann usuelle, ce résultat était établi au chapitre 3 en utilisant la représentation intégrale des fonctions holomorphes à la Cauchy, jointe au fait (semble-t-il évident), qu'une fonction continue sur la sphère usuelle était de module majoré. Ici Neumann choisit de ne pas reprendre cette démonstration, qui est pourtant directement transférable, d'autant plus qu'il a déjà transféré la proposition selon laquelle une fonction localement constante est constante. Il choisit un procédé plus algébrique permettant une descente d'une sphère de Riemann quelconque vers la sphère usuelle : si f_1, \dots, f_n sont les différentes valeurs que prend cette fonction au-dessus d'un même point de la sphère usuelle, alors les expressions $f_1^k + \dots + f_n^k$ forment, pour toute constante entière positive k , une fonction univoque sur la sphère usuelle, sans pôle donc constante. Un même procédé de démonstration, présente chez Riemann lui aussi, permet d'établir que toute fonction f méromorphe sur une sphère de Riemann est une fonction algébrique, au sens où elle vérifie une équation $f^n + F_1(z)f^{n-1} + \dots + F_n(z) = 0$, où les F_i sont des fonctions rationnelles.

²⁵ « Der Beweis dieser Sätze ergibt sich sofort aus dem Umstande, dass die Eigenschaften der Eindeutigkeit, der Stetigkeit, der polaren Unstetigkeit, und ebenso auch die Werthe der Ordnungszahl beim Uebergange vom ursprünglichen zum natürlichen Zustande, oder auch umgekehrt beim Uebergang vom natürlichen zum ursprünglichen Zustand permanent sind [Vgl. Die Bemerkung p.100]. »

Nous n'entrerons pas dans autant de détail à propos des chapitres suivants : autant le travail progressif de mise en place des notions au cours de sept premiers chapitres conduisait Neumann à des explications et des innovations importantes pour notre étude, autant dans les chapitres 8 à 15 on retrouve les principaux résultats de la théorie des fonctions abéliennes tels que Riemann les avait exposés et démontrés. Quelques lignes cependant sur l'introduction de l'*Analysis situs*, que Neumann n'appelle d'ailleurs pas ainsi, se contentant de parler de « considérations géométriques » (*Geometrische Betrachtungen*). Il choisit de définir la notion de simple connexité comme suit : une surface plane à un seul feuillet limité par une courbe simple est une « surface élémentaire » (*Elementarfläche*), une surface continûment déformable en une surface élémentaire est une surface simplement connexe (*einfach zusammenhängende Fläche*) [Neumann 1884 146]. On retrouve la présentation en termes de modèles (ici la surface élémentaire, plus haut l'état naturel) et de saturation pour la relation d'équivalence qu'est la continue déformabilité. Après quelques considérations intuitives sur la possibilité de faire apparaître des surfaces simplement connexes en coupant suffisamment une surface, et la distinction entre coupures transverses (*Querschnitte*) et rétrosections (*Rückkheerschnitte*), il entreprend une caractérisation axiomatique des surfaces dont il va donner des éléments de topologie. Dès l'introduction du chapitre 7, il soulignait l'insuffisance de la caractérisation des surfaces proposée par Riemann : ce dernier, écrit Neumann, restreignait le champ des surfaces à envisager au moyen de conditions purement négatives, à savoir ni pli ni coupure. Neumann propose des conditions positives :

Première demande.- La surface doit être telle que le domaine de chaque point représente une surface simplement connexe. (...)

Deuxième demande.- La surface doit être telle par quelques rétrosections que ce soit elle puisse être transformée [*verwandelt*] en surfaces simplement connexes. [Neumann 1884 151]²⁶

Neumann établit ensuite pour ces surfaces la notion de nombre fondamental (*Grundzahl*), qui correspond à l'ordre de connexion de Riemann (*Zusammenhangszahl*), se ramenant comme Riemann à une surface privée épointée (*punktierte Fläche*) si la surface initiale n'a pas de bord. Notons une des rares apparitions de l'infiniment petit : la surface pointée est décrite comme possédant une unique courbe de contour *infiniment* petite (*eine unendlich kleine*

²⁶ « Erste Anforderung.- Die Fläche soll von solcher Beschaffenheit sein, dass das Bereich eines jeden Punktes der Fläche eine einfach zusammenhängende Fläche repräsentiert. (...). Zweite Anforderung.- Die Fläche soll von solcher Beschaffenheit sein, dass sie durch irgend welche Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden kann. »

Randcurve [Neumann 1884 150]. A la fin de cette première série de démonstrations, il est pris d'un petit remord et signale qu'elle ne sont pas valides pour *toutes* les surfaces. Il donne l'exemple de la bande de Möbius, expliquant en quoi consiste sa spécificité : si on peint en noir une face d'un élément de surface et qu'on poursuit d'élément en élément, on aura finalement peint les *deux* faces, ce qu'écrivait déjà Möbius [Möbius 1865] ; ainsi, poursuit Neumann, pour certaines surfaces, on ne peut fixer deux faces distinctes pour toute la surface (*für die ganze Fläche*) sans violer la continuité. Il précise donc que sa théorie du nombre fondamental ne s'applique qu'aux surfaces bilatères et nullement aux unilatères. Neumann passe ensuite à l'application de sa théorie du nombre fondamental aux sphères de Riemann, sans d'ailleurs chercher le moins du monde à établir qu'elles vérifient la deuxième demande, ou qu'elles sont bilatères. Il retrouve la formule de Riemann $2p = w - 2n + 2$, où $2p$ est le nombre fondamental de la surface époincée, w la somme des ordres des points de ramification et n le nombre de feuillettes ; il utilise un raisonnement purement topologique s'appuyant sur un découpage de la sphère usuelle – qui découpe d'ailleurs en même temps la sphère de Riemann au-dessus de la sphère usuelle – renonçant à la démonstration de Riemann qui utilisait une représentation conforme de la surface simplement connexe obtenue après découpage, utilisant donc une forme du principe de Dirichlet que Neumann souhaite éviter. Signalons encore le rôle du découpage en morceaux et de l'aller-retour entre état originel et état naturel dans le chapitre 8, pour établir que la fonction définie comme intégrale curviligne de $\varphi d\psi$ (φ et ψ fonctions holomorphes dans un domaine A d'une sphère de Riemann) est univoque lorsque le domaine A est simplement connexe ; et au chapitre 9 pour établir la formule des résidus dans un domaine quelconque A (bordé par une ou plusieurs courbes) d'une sphère de Riemann, puis la nullité de la somme de tous les résidus lorsqu'on remplace un domaine A par toute la sphère de Riemann. Signalons enfin un argument étrange au début du chapitre 10. Au chapitre 1 a été démontré, pour les domaines bornés A du plan, que si U et V sont, respectivement, les parties réelle et imaginaire d'une fonction de z alors l'intégrale sur le bord de UdV est positive ou nulle, nulle si et seulement si la fonction est constante dans le domaine A . Le chapitre 10 transfère par le procédé usuel de découpage et changement d'état cette proposition aux domaines bornés S d'une sphère de Riemann quelconque. Neumann saisit alors l'occasion de donner une nouvelle démonstration de la constance des fonctions holomorphes sur toute une telle sphère :

Si maintenant la fonction $f(z)$ vérifie les hypothèses d'univocité et de continuité sur *toute* la sphère de Riemann R , on peut alors en utilisant la propriété ci-dessus laisser croître encore et encore le morceau S jusqu'à ce qu'il devienne finalement R . A cet

instant [*Augenblick*] le bord de S disparaît [*verschwindet*] et avec lui la valeur de l'intégrale (D). Et de cette disparition ou annulation il suit, d'après la proposition ci-dessus, que $f(z)$ doit être *constante dans tout* R . [Neumann 1884 233]²⁷

Le fait que le terme *verschwinden* puisse désigner à la fois la disparition (du bord) et l'annulation (de l'intégrale) n'est sans doute par pour rien dans cette pratique du lieu jusqu'ici inédite : passer d'un morceau borné simple à la surface entière en faisant croître le premier jusqu'à ce que son bord disparaisse ; gageons qu'à l'instant de sa disparition, ce bord évanouissant passe par l'état d'ouverture infiniment petite !

4. Comparaison des deux éditions.

Il ne s'agit bien sûr de comparer que les points qu'il nous a jusqu'ici semblé pertinent de relever dans l'édition de 1884. On doit tout de même signaler que les deux éditions entrent en matière de façons sensiblement différentes. Alors que l'édition de 1884 aborde la question par la théorie de l'intégrale curviligne, l'édition de 1865 s'ouvre sur un chapitre purement analytique consacré à l'exponentielle et au logarithme complexe, ainsi qu'aux séries ϑ . Le matériau exposé dans le premier chapitre de 1884 se trouve dans les chapitres 2 et 3 de l'édition de 1865, dans laquelle Neumann propose un exposé des premiers principes de la théorie des fonctions : représentation géométrique des fonctions par des courbes ou des surfaces, notion de continuité et de discontinuité, dérivée et dérivées partielles. L'exposé frappe par son caractère peu « moderne » : la continuité y est définie au moyen de la connexité (*Zusammenhang*) des courbes ou surfaces représentatives des fonctions d'une ou deux variables réelles ; le calcul différentiel et intégral est mis en place entièrement à partir d'infiniment petits ; la notion de limite n'apparaît pas ; la distinction entre continuité et dérivabilité ne joue pas de rôle. Il faut toutefois noter qu'admettant les fonctions multivoques, le problème se pose de manière moins précise ; ainsi Neumann peut-il rappeler que la continuité de la fonction ne préjuge ni de la continuité ni de l'univocité de la dérivée [Neumann 1865 55]. Notons toutefois un jeu intéressant entre fonction et domaine dans la série d'exemples que Neumann propose pour faire sentir ce que peut être une fonction de deux variables discontinue en un point isolé. Il propose de considérer une fonction de deux

²⁷ « *Entspricht nun die Function $f(z)$ den Voraussetzungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit auf der ganzen Riemann'schen Kugelfläche R , so kann man, bei Anwendung des vorstehenden Satzes, den Theil S grösser und grösser werden lassen, bis er schliesslich in R übergeht. In diesem Augenblick verschwindet alsdann die Randcurve von S und mit ihr zugleich auch der Werth des integrals (D). Und aus diesem Verschwinden order*

variables réelles $R(x,y)$ égale, sauf en O , à la fonction $U(x,y) = 2+x^2+y^2$, et valant 3 en O ; Neumann utilise ici un point de vue ponctuel, qu'il abandonne très vite : il poursuit en effet en expliquant que cette fonction R est continue sauf en O , car sa surface représentative est formée, au-dessus de O , d'un point isolé et d'un morceau de surface possédant au-dessus de O une ouverture infiniment petite (*eine unendliche kleine Oeffnung* [Neumann 1865 48]). Toute cette partie consacrée aux premiers principes du calcul infinitésimal disparaît en 1884.

La mise en place de l'étude des fonctions d'une variable complexe dans une partie bornée du plan, chapitre 3 de 1865, est très semblable à ce qu'elle sera en 1884, avec en particulier le procédé de découpage pour établir la formule de Green-Riemann ou la représentation intégrale de la somme des ordres des pôles d'une fonction méromorphe. La notion de domaine (*Bereich*) d'un point est mot pour mot ce qu'elle sera en 1884. L'introduction, au chapitre 4, de la sphère de Riemann usuelle est la même qu'en 1884, mais les termes qui la décrivent ne sont pas exactement les mêmes. Ainsi le terme de support (*Träger*) n'apparaît-il pas à cette occasion en 1865 : il y est question d'un plan ou sur une sphère servant à étendre spatialement les valeurs d'une fonction (*räumliche Ausbreitung einer Function* [Neumann 1865 132]) ; il intervient toutefois plus tard [Neumann 1865 181]. Le terme de transplantation (*Verpflanzung*) y est ; les deux plans et la sphère sont déjà décrits comme des états (*Zustände*) différents, une *même* fonction s'y présente déjà sous trois expressions (*Ausdrücke*) différentes. Pour ce qui est des procédés de démonstration, ils diffèrent sensiblement pour le théorème : une fonction univoque et continue (i.e. holomorphe) sur toute la sphère usuelle est constante. En 1884 Neumann utilise, comme une évidence, que son module est borné, puis il passe dans chacun des plans – le plan horizontal et le plan antipodique – dans lesquels il applique le résultat précédemment démontré sur les fonctions bornées continues dans tout le plan. La démonstration de 1865 n'utilise aucun argument topologique mais repose sur du calcul intégral. Soit $U+iV$ la décomposition de la fonction en parties réelle et imaginaire, découpons la sphère en deux hémisphères, projetons depuis le pôle sud l'hémisphère nord en un domaine plan a_0 et depuis le pôle nord l'hémisphère sud en un domaine plan a' . Dans chacun des deux domaines on a :

$$\iint_a \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \int_a U dV \quad [\text{Neumann 1865 150}]$$

Nullsein des Integrals ergibt sich alsdann, auf Grund des vorstehenden Satzes, dass $f(z)$ auf R allenthalben constant sein muss. »

En écrivant les deux égalités, une pour chaque hémisphère, et en additionnant membre à membre, on voit le membre de droite contenir l'intégrale de la même fonction sur l'équateur, mais parcouru dans des sens différents : l'intégrale double de gauche étendue sur toute la sphère est donc nulle, d'où la nullité en tout point de $\partial U/\partial x$ et $\partial U/\partial y$... dans cette seconde moitié du 19^e siècle, la notion de fonction bornée semble plus « moderne » que les théorèmes reliant intégrale curviligne et intégrale de surface. Aucune des deux démonstrations n'utilise, remarquons le, d'arguments comme la locale constance et la connexité globale.

L'introduction de la surface de Riemann d'une fonction algébrique suit exactement les mêmes lignes. L'édition de 1884 contient par contre le chapitre 7 consacré à la continuité des systèmes de solutions d'équations algébriques et au problème de l'inversion de ces équations qui vient légitimer certains des gestes élémentaires du chapitre consacré à la construction des surfaces de Riemann ; ce chapitre fait défaut en 1865. Les chapitres consacrés à la notion de fonction méromorphe sur la sphère de Riemann d'une fonction algébrique ne diffèrent guère. On ne trouve toutefois pas en 1865 la remarque *méta* sur la permanence des propriétés d'univocité, de continuité, de discontinuité polaire et d'ordre par déformation continue. Le travail de maturation est un peu plus grand en 1884 pour ce qui est de la topologie : en 1865 manquent les deux axiomes limitant le champ des surfaces à étudier, manque aussi la remarque sur les surfaces unilatères.

5. Conclusion.

Nous étudions la première partie des *Leçons sur la théorie riemannienne des intégrales abéliennes* de Neumann, partie consacrée à la mise en place de la notion de surface de Riemann et à la notion de fonction sur une telle surface ; les propriétés générales de telles fonctions nous intéressaient seules ici, nous consacrons le chapitre suivant aux théorèmes d'existence les concernant. Le travail de Neumann frappe d'abord, surtout en 1884, par la grande clarté de sa construction : fonctions dans une partie du plan limité par quelques courbes simples, fonctions au voisinage d'un point, passage à la sphère usuelle, construction de la sphère de Riemann associée à une fonction algébrique de z , fonctions méromorphes sur une telle sphère, intégrales de ces fonctions. Cette mise en place très progressive permet de présenter l'articulation des différents niveaux de travail, dans un texte où le souci de la référence au lieu est permanent. Outre la clarification apportée par la structure de la présentation, quelques termes de haut niveau viennent identifier des types de lieu : support (*Träger*) d'une fonction, domaine (*Bereich*) d'un point. Le procédé au cœur des

démonstration semble fournir un exemple de travail par carte locales : la surface (ou la partie étudiée) est découpée en domaines simplement connexes, un aller-retour entre état originel et état naturel de ces domaines permet le transfert des résultats d'analyse dans le plan vers la surface ; couper / transformer, *zerlegen / umformen*. Cet aller-retour ne passe pas par le niveau infinitésimal, après toutefois qu'a été établie la formule de Green-Riemann. L'usage de ce procédé conduit à regrouper explicitement certaines propriétés des fonctions – continuité, ordre d'une fonction en un point, par exemple – sans toutefois qu'un terme tel que *local* vienne sanctionner ce regroupement. En replaçant ce procédé dans son contexte on le voit pourtant s'éloigner des raisonnements que le 20^e siècle mènera par cartes locales. Tout d'abord le découpage est avant tout subordonné à la structure d'une sphère de Riemann au-dessus de la sphère usuelle : ces cellules isolent les points de ramification, c'est le couple point singulier / point ordinaire qui est fondamental. Ce découpage est ensuite subordonné aux problèmes d'intégration. L'accent est enfin moins mis sur la notion de propriété locale que sur cette d'invariance par transformations continues et un certain souci de l'intrinsèque, d'ailleurs à porter au crédit de Neumann. Ce souci de l'intrinsèque et cette sensibilité à l'invariance topologique s'accompagnent toutefois d'une incapacité à distinguer la structure topologique et la structure conforme, distinction pourtant très claire chez Riemann. On voit difficilement comment, dans le cadre qu'il a développé, Neumann rendra compte de la classification des surfaces de Riemann de genre donné mais non conformément équivalentes au moyen de modules : il ne le fera pas.

II. Une nouvelle génération de « démonstrations d'existence ».

La théorie proposée par Riemann repose sur un théorème d'existence fondamental, dont le principe de la démonstration est repris de Dirichlet. Rappelons ce principe général de la méthode de Dirichlet, sous la forme publiée par Weierstrass en 1870 [Weierstrass 1894-1927 vol.2 49-54]. Soit un solide de l'espace et une fonction continue à la surface de ce solide : parmi toutes les fonctions u continûment dérivables dans ce solide et prenant les valeurs prescrites au bord, une minimise nécessairement l'intégrale toujours positive

$$U = \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dt,$$

nommons la u . L'étude, en termes anachroniques, de l'application linéaire tangente au point u permet d'établir que u est harmonique dans le solide. Ce procédé de démonstration ne fait jouer, dans l'espace du solide, que le niveau global, sans aucun passage du local au global. La critique de ce raisonnement que Weierstrass fait paraître en 1870 lui porte, de l'avis de nombre des contemporains, un coup irrémédiable : il y a dans ce raisonnement une confusion, explique Weierstrass, entre borne inférieure et minimum ; la fonctionnelle U est certes positive (ou nulle), l'ensemble des valeurs qu'elle atteint possède donc bien une borne inférieure, mais il est abusif d'en déduire directement que cette valeur est *atteinte* pour l'une des fonctions u envisagées. Dès les années 1860 on voit différents auteurs chercher à résoudre ce problème d'existence de fonctions harmoniques par des méthodes nouvelles. Nous présentons ici, chez H.A. Schwarz (1843-1921) et C. Neumann, quelques aspects de ces nouveaux procédés de démonstration qui introduisent de nouvelles formes de *pratique du lieu*, en proposant une démarche du local au global et en utilisant des recouvrements plutôt que des découpages.

1. H.A. Schwarz.

Schwarz fait paraître en 1869 et 1870 une série d'articles sur le même thème, bien que les titres fassent alternativement référence soit à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ soit au problème de la représentation conforme. Ces articles présentent une

série de résultats assez divers obtenus par Schwarz depuis le milieu des années 60. Dans l'un de ces articles, il se remémore l'origine de son intérêt pour ces questions : il savait que Riemann avait utilisé son théorème d'existence pour établir que toute surface simplement

connexe (et, implicitement, limitée par une courbe simple) était conformément équivalente à un disque de rayon 1 ;

M. Mertens, avec qui j'assistais aux cours de M. Weierstrass sur la théorie des fonctions analytiques du semestre d'hiver 1863-64, me fit à cette occasion remarquer qu'il était bien curieux que Riemann ait pu déjà démontrer l'existence [*Existenz*] d'une fonction qui, par exemple, applique conformément la surface d'un triangle rectiligne plan sur celle d'un cercle, alors que la détermination effective [*wirkliche Bestimmung*] d'une telle fonction semblait encore à l'époque excéder les forces de l'Analyse, du fait des discontinuités aux sommets du contour. [Schwarz 1890 65]²⁸

Ce contexte géométrique, en particulier le problème de la représentation conforme des domaines simplement connexes, va marquer tout le travail de Neumann. On sent aussi dans cette citation le caractère inouï du théorème d'existence riemannien, à la fois pour sa puissance et son caractère complètement non constructif. On va voir Neumann reprendre le problème de manière plus constructive, mais ce que recouvre cette idée de détermination effective (*wirkliche Bestimmung*) prend un tour inédit, bien différent des classiques représentations intégrales ou des décompositions « arithmétiques » proposées par Weierstrass en théorie des fonctions entières.

Appuyons-nous sur l'article de 1870 au titre un peu mystérieux : *Sur un passage à la limite par procédé alternant*²⁹. Schwarz ne donne que le premier résultat d'une série, se bornant à établir l'existence d'une fonction harmonique sans point d'infinité prenant au bord du domaine une (ou plusieurs) « suites » de valeurs finies et continues. L'idée fondamentale est déjà là toute entière, il ne nous importe pas ici d'étudier toute la série ; de plus, nous entrerons dans plus de détails dans le cas – très proche – de Neumann. Schwarz commence par rappeler deux résultats : premièrement, on sait trouver une solution de $\Delta u = 0$ dans un disque (ou tout domaine conformément équivalent) pour toutes données au bord n'ayant qu'un nombre fini de points de discontinuité ; deuxièmement, pour une région T (implicitement : bordée par une courbe fermée, analytique par morceaux) on a le résultat suivant : si le bord est partagé en une succession finie d'arcs numérotés, si l'on fixe sur les arcs pairs la valeurs 0 et sur les arcs impairs une fonction continue majorée par un nombre g , alors les valeurs d'une fonction

²⁸ « Herr Mertens, mit dem ich im Wintersemester 1863-64 die Vorlesungen des Herrn Weierstrass über die Theorie der analytischen Functionen hörte, machte gelegentlich mir gegenüber die Bemerkung, es sei doch eigenthümlich, dass Riemann von einer Function, welche z.B. die Fläche einer ebenen geradlinigen Dreiecks auf die Fläche eines Kreises conform abbildet, bereits die Existenz nachgewiesen habe, während die wirkliche Bestimmung einer solchen Function wegen der in den Ecken liegenden Unstetigkeiten der Begrenzungslinie die Kräfte des Analysis zur Zeit noch übersteigen scheine. »

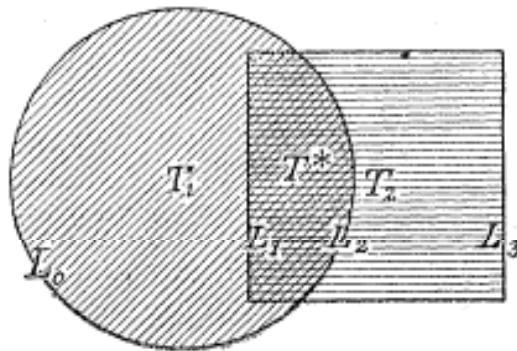
²⁹ Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren [Schwarz 1890 133-143].

harmonique dans T prenant ces valeurs au bord sont majorées, sur une courbe analytique dans T et n'ayant aucun point commun avec les arcs impairs autre qu'éventuellement leurs extrémités, par gq où q est une constante strictement inférieure à 1, qui dépend de la figure mais pas de la fonction donnée au bord³⁰. Le problème est maintenant de partir de régions pour lesquelles le problème d'existence est résolu et de l'étudier pour des domaines moins simples « formés » (*zusammengesetzt*) à partir des premiers. Schwarz présente l'idée générale au moyen d'une analogie physique :

Pour la démonstration de cette proposition nous utilisons un passage à la limite très analogue au procédé bien connu utilisant une double pompe à air pour produire un espace vide d'air. [Schwarz 1890 136]³¹

C'est le fameux passage à la limite par procédé alternant, annoncé en titre. Schwarz part de la figure suivante [Schwarz 1890 136] :

Fig. 10.



supposons le problème d'existence résoluble pour les régions T_1 et T_2 et montrons qu'il l'est alors pour le domaine T formé des deux (d'ailleurs désigné par $T = T_1 + T_2 - T^*$, pour éviter de compter T^* deux fois). Si l'on suit l'analogie physique, T^* est le « récipient » de la pompe à air, et $T_1 - T^*$, $T_2 - T^*$ les deux « cylindres ». Du côté mathématique, le lemme de majoration permet d'associer à la répartition du bord de T_1 en deux arcs une constante q_1 , strictement inférieure à 1, de même une constante q_2 pour T_2 . On se donne des valeurs au bord de T (donc sur L_0 et L_3), on note g la borne supérieure, k la borne inférieure et $G = g - k$. Soit u_1 la fonction harmonique dans T_1 prenant les valeurs prescrites sur L_0 et constamment la valeur k sur L_2 : cette étape est la première pression du premier piston. Soit u_2 la fonction harmonique dans T_2

³⁰ Le raisonnement, un peu allusif dans l'article que nous citons, est plus détaillé dans *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$ unter vorgeschriebene Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen*, *Monatsbericht der Kön. Akad. der Wiss. zu Berlin* (1870) = [Schwarz 1890 144-171], en particulier p.155 et suiv.

³¹ „ Zum Beweise dieses Satzes kann ein Grenzübergang dienen, welcher mit dem bekannten, zur Herstellung eines luftdünnten Raumes mittelst einer zweistiefeligen Luftpumpe dienenden Verfahren grosse Analogie hat.“

prenant les valeurs prescrites le long de L_3 et les valeurs de u_1 le long de L_1 (première pression du second piston) ; on définit u_3 (dans T_1), u_4 (dans T_2) ... comme on imagine. La différence u_3-u_1 est, sur L_1 , positive et majorée par q_1G ; de plus u_1 et u_2 coïncident dans T^* puisqu'elles sont harmoniques et prennent mêmes valeurs au bord. On établit que la suite u_{2n+1} converge dans T_1 vers une fonction u' en utilisant la majoration géométrique de $u' = u_1 + (u_3-u_1) + (u_5-u_3)+\dots$; les fonctions u' dans T_1 et u'' dans T_2 sont harmoniques, coïncident dans T^* et prennent sur L_0 et L_1 les valeurs prescrites, cqfd [Schwarz 1890 139].

Schwarz annonce ensuite que ce procédé peut être adapté pour obtenir l'existence de fonctions vérifiant des conditions relatives aux contours et aux discontinuités, et il remplace donc avantageusement le « principe de Dirichlet » de l'exposé riemannien. On le voit par exemple l'article *Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ sous conditions données relatives aux contours et discontinuités [op. cit.].

2. C. Neumann.

Dans la préface de la première édition de son cours sur la théorie riemannienne des intégrales abéliennes, Neumann annonçait qu'il ne reprendrait pas le procédé de démonstration de Riemann, et qu'il avait commencé à explorer d'autres directions ; il publie à partir de 1870 des travaux très proches de ceux de Schwarz, qu'il intègre à la seconde édition de son cours sur Riemann. Son choix didactique est, dans la seconde édition, de commencer par exposer la théorie à la Riemann en utilisant des théorèmes d'existence ([Neumann 1884 232]) qui seront démontrés plus loin. Les « démonstrations d'existence » (le terme est absent de la première édition) sont regroupées dans les trois derniers chapitres, d'un style mathématique en effet assez différent de celui du reste de l'ouvrage. Le texte de 1884 présente ainsi un caractère composite : ses quinze premiers chapitres reprennent l'exposé de 1865, en le complétant certes par l'usage de théorèmes d'existence admis, en le simplifiant aussi sur plusieurs points en particulier par un recours à des procédés moins calculatoires, mais sans en modifier fondamentalement l'esprit ; les trois derniers chapitres proposent un bilan des vingt années de recherches sur les théorèmes d'existence pour les fonctions harmoniques.

Le chapitre 16 est consacré aux théorèmes généraux sur les fonctions harmoniques. La notion même de fonction harmonique y est introduite pour la première fois ; nous signalions plus haut qu'elle ne jouait aucun rôle dans l'exposé général sur les fonctions d'une variable

complexe. Les liens direct et réciproque entre fonction harmonique et fonction d'une variable complexe sont rapidement traités, tous les outils mis en place pour traiter du lien entre multiple connexité du domaine et multivocité de la partie imaginaire de la fonction complexe de partie réelle une fonction harmonique donnée ayant été mis en place bien plus tôt dans l'ouvrage. L'essentiel du chapitre est consacré à la question du maximum pris par une fonction harmonique dans un domaine donné, cette étude permettant ensuite d'établir des résultats d'unicité et des majorations indispensables dans les problèmes de convergences de séries de fonctions. La simple formulation du problème de maximum amène Neumann à expliciter un point de vocabulaire intéressant :

Soit $U = U(x,y)$ une fonction univoque et continue *sur* un morceau quelconque S d'une sphère de Riemann, harmonique *à l'intérieur* de S . Nous nous posons comme problème l'étude plus précise de la fonction U , en particulier la détermination plus précise du point où elle prend la plus *grande* valeur sur S .

Remarque.- Ici et dans la suite nous distinguons entre *sur* [*auf*] et *à l'intérieur* [*innerhalb*]. Par points *sur* S nous entendons tout les points de la surface S , *y compris* ses points au bord [*Randpunkte*] ; par points *se trouvant à l'intérieur* de S , en revanche, tous les points de la surface S , *à l'exclusion* de ses points au bord. Nous utiliserons les mots *sur* et *à l'intérieur* de manière analogue lorsque nous indiquerons n'importe laquelle des propriétés d'une fonction étendue sur S .

Nous utiliserons parfois, pour insister, « *dans l'étendue de S* » [*in Erstreckung von S*] ou « *dans toute l'étendue de S* » [*in ganzer Erstreckung von S*] au lieu de « *sur S* ». [Neumann 1884 393]³²

Cette distinction vient raffiner l'arsenal des modes de référence au lieu déjà systématiquement présents dans la première partie ou dans la première édition. Ceux-ci étaient essentiellement de trois types : soit une précision dimensionnelle (travail sur une surface ou le long de son bord) ; soit renvoi à un type de lieu, domaine d'un point, surface limitée par des courbes, tout le plan, toute la sphère usuelle, toute une sphère de Riemann – ce caractère *total* de l'extension était marqué par des termes tels *ganz* ou *allenthalben* ; soit, enfin, aller-retour

³² « Die Function $U=U(x,y)$ sei auf irgend einem Theil S einer Riemann'schen Kugelfläche eindeutig und stetig, und innerhalb S harmonisch. Wir stellen uns die Aufgabe, diese Function U näher zu untersuchen, und namentlich den Punkt näher zu bestimmen, in welchem sie auf S den grössten Werth hat. Bemerkung.- Wir unterscheiden hier und im Folgenden zwischen auf und innerhalb. Unter den auf S gelegenen Punkten verstehen wir nämlich alle Punkte der Fläche S , inclusive ihrer Randpunkte, unter den innerhalb S befindlichen Punkten hingegen alle Punkte der Fläche S , exclusive ihrer Randpunkte. Und in analoger Weise benutzen wir die Worte auf und innerhalb auch bei Angabe irgend welcher Eigenschaften einer auf S ausgebreiteten Function. Uebrigens werden wir statt « auf S » zuweilen auch mit schärferer Accentuirung sagen : « in Erstreckung von S » oder « in ganzer Erstreckung von S » . »

entre état originel et état naturel d'un domaine borné. Ce système déjà riche, dans un ouvrage soucieux de clarté et de rigueur pédagogique se traduisant par une recherche des hypothèses implicites, ne recouvrait pas, semble-t-il, la distinction entre *auf* et *innerhalb*. Le contexte dans lequel cette distinction est introduite (après 383 pages !) est celui de la formulation classique du problème de Dirichlet : continuité sur le domaine borné, harmonicité à l'intérieur de ce domaine. Il est vrai que l'indistinction, dans la première partie, entre continuité et holomorphie n'invitait pas à de telles d'explicitations. La distinction entre *sur* et *à l'intérieur* joue un rôle important dans le chapitre 17, consacré à la résolution du problème de Dirichlet – que Neumann nomme *problème fondamental* (*Fundamentalaufgabe* [Neumann 1884 396]) – pour le disque, par une méthode qu'il baptise méthode de la moyenne arithmétique (*Methode des arithmetischen Mittels* [Neumann 1884 411]). Soit $d\sigma$ l'élément de cercle, ν la normale entrante en un point de ce cercle, E la distance entre un point donné x et l'élément $d\sigma$, Σ la fonction continue donnée sur le cercle ; la fonction de x définie par l'intégrale curviligne

$$W_x = \int \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\log \frac{1}{E} \right) \Sigma d\sigma$$

est une fonction univoque, continue et harmonique *à l'intérieur* du disque, mais non *sur* le disque. Après avoir identifié la source de cette discontinuité, à savoir que l'angle solide sous lequel est vu le cercle est de 2π depuis un point intérieur mais seulement de π depuis un point du cercle, Neumann montre que la fonction valant W_x à l'intérieur du cercle et $W_x + \pi\Sigma$ sur le cercle répond au problème fondamental [Neumann 1884 409]. Cette méthode arithmétique avait été présentée en 1870, en particulier dans les *Mathematische Annalen* [Neumann 1870], puis exposée dans le livre *Logarithmische und Newton'sche Potential* [Neumann 1877]. Elle s'étend bien sûr du cercle à toute surface plane convexe, dans laquelle l'angle solide jouit des mêmes propriétés. Neumann clot le chapitre 17 en montrant sa validité, non plus pour les disques plans, mais pour toute *calotte normale* d'une sphère de Riemann, qu'elle soit centrée sur un point ordinaire ou sur un point de ramification. La fonction résolvant le problème fondamental sur un domaine σ , pour une donnée continue Σ au bord de σ , est une fonction fondamentale, notée $U^{\sigma, \Sigma}$.

L'objectif de l'ultime chapitre de l'ouvrage est d'étendre ce théorème d'existence des disques aux surfaces de Riemann par des méthodes que Neumann présente dès la préface de la deuxième édition comme des *méthodes combinatoires* [Neumann 1884 vi], l'une disjonctive (*disjunctive Methode*), l'autre adjonctive (*adjunctive Methode* [Neumann 1884 vii]). Le

chapitre s'ouvre toutefois sur un théorème de convergence de séries de fonctions harmoniques, utilisant les mêmes ressorts que les théorèmes équivalents de Schwarz, à savoir majoration uniforme de chacun des termes utilisant le principe du maximum et majoration de la somme par la somme des termes d'une progression géométrique. Neumann redémontre au passage la continuité de la limite uniforme, utilisant d'ailleurs comme concept de continuité ce que nous nommerions l'uniforme continuité ; en un sens, le point de vue n'est pas ponctuel : la fonction est moins continue en chaque point que continue directement *dans* le domaine. L'aspect local est toutefois présent dans le cas de l'harmonicité, Neumann allant jusqu'à préciser :

La fonction V est donc harmonique dans le domaine de chaque point c à l'intérieur de S . En d'autres termes : *elle est harmonique partout à l'intérieur de S* . [Neumann 1884 435]³³

Le contexte de cette explicitation est la nécessité de passer de l'état originel à l'état naturel pour travailler sur l'harmonicité. Neumann présente ensuite la première de ces méthodes combinatoires, la méthode disjonctive :

Lorsque qu'on retire [*herausnehmen*] un morceau circulaire où que ce soit à l'intérieur d'une surface donnée, on forme une *nouvelle* surface dont le nombre de courbes de bord est de 1 supérieur à celui de la surface d'origine. Je vais montrer que dans de nombreux cas (qui restent à indiquer plus précisément), le problème fondamental (20) p.396 peut être résolu pour cette *nouvelle* surface, pour peu qu'on dispose d'une méthode pour le résoudre pour la surface *d'origine*. [Neumann 1884 436]³⁴

La méthode de Neumann rappelle le procédé alternant de Schwarz, en ramenant l'étude à deux domaines : S_α la surface d'origine, limitée par les courbes $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ (collectivement désignées par α), et le disque S_β limité par la courbe β ; enfin la surface $S_{\alpha\beta}$, limitée à la fois par les α et par β . Puisque le problème fondamental est supposé résoluble sur S_α et S_β , on part de $\varphi = U^{\alpha, \Sigma}$ puis on cherche à compenser alternativement sur le bord de S_α et de S_β en introduisant $\varphi' = U^{\beta, \varphi}$, $\varphi'' = U^{\alpha, \varphi'}$, $\varphi''' = U^{\beta, \varphi''}$... Neumann établit que la fonction $\chi = (\varphi - \varphi') + (\varphi' - \varphi'') + \dots$ est univoque et continue sur $S_{\alpha\beta}$, harmonique à l'intérieur de $S_{\alpha\beta}$, valant 0 sur β et $\Sigma - a$ sur α , où a est une constante. Il fournit ensuite un moyen d'annuler a , puis, en

³³ « Die Function V ist also harmonisch im Bereich eines jedweden innerhalb S gelegene Punktes c . Mit andern Worten : Sie ist innerhalb S überall harmonisch. »

³⁴ « Wird irgendwo aus dem Innern einer gegebenen Fläche ein kreisförmiges Stück herausgenommen, so entsteht eine neue Fläche, deren Randcurvenanzahl um 1 grösser ist, als die der ursprünglichen Fläche. Ich werde nun zeigen, dass man in vielen (noch näher anzugebenden) Fällen die Fundamentalaufgabe (20.) pg.396

échangeant les rôles de α et β , obtient deux fonctions ψ et ψ' telles que $\psi + \psi'$ réponde au problème fondamental pour $S_{\alpha\beta}$. On peut maintenant combiner cette méthode disjonctive au théorème d'existence pour les disques, ou plus généralement les calottes normales, pour affirmer que le problème fondamental est résoluble, par exemple, pour toute partie de la sphère à un feuillet limité par un nombre quelconque de cercles, ainsi que pour une zone délimitée par deux cercles concentriques (*Normalzone*).

On passe ensuite au *procédé adjonctif* ou *méthode combinatoire* (cette dernière appellation semble être réservée au procédé adjonctif au chapitre 18, alors qu'elle recouvrait les procédés adjonctif et disjonctif dans la préface) :

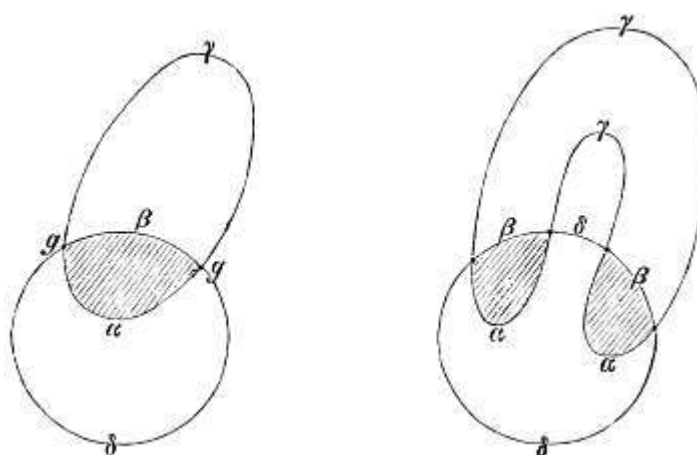
On peut poser [*legen*] deux surfaces données A et B l'une au-dessus de l'autre de sorte qu'il se présente un recouvrement partiel [*theilweise Deckung*]. On peut alors laisser fusionner [*verschmelzen*] les morceaux de surface se recouvrant pour transformer [*verwandeln*] ces deux surfaces en *une seule*. Cette dernière surface peut être appelée la surface *combinée* à partir de A et B [*die aus A und B combinirte Fläche*], et désignée par (A,B). Je vais montrer dans ce qui suit, que dans de nombreux cas (qui restent à indiquer plus précisément) le problème fondamental (20.) p.396 est toujours résoluble pour la surface combinée (A,B), pour peu qu'on dispose d'une méthode quelconque pour le résoudre pour les surface isolées A et B. [Neumann 1884 446]³⁵

La simple formulation choisie par Neumann appelle plusieurs remarques. Premièrement, dire qu'on se donne deux surfaces ne semble pas suffire à déterminer qu'elles se recouvrent partiellement ou non, puisqu'on peut, bien qu'elles soient données, les poser l'une sur l'autre. Pour employer un langage plus ancien, il semble que les surfaces ne soient pas au départ données de position. On remarque ensuite que, comme chez Schwarz, le passage à la réunion ensembliste résulte d'un mouvement volontaire de la pensée, exprimé ici métaphoriquement par la fusion ; le choix de ce terme, là où Schwarz parlait en termes de multiplicité, et l'emploi d'un symbole non connoté algébriquement, là où Neumann utilisait +, renvoie à un contexte moins numérique dans lequel on retrouve les déformations continues de surface, en particulier des surfaces de ramification s'appuyant sur un fil de caoutchouc. Ces deux

für diese neue Fläche zu lösen vermag, falls man nur im Besitz irgend einer Methode ist zur Lösung derselben für die ursprüngliche Fläche. »

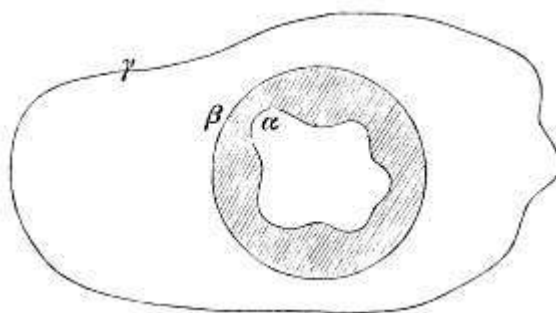
³⁵ « Man kann zwei gegebene Flächen A und B so aufeinander legen, dass theilweise Deckung stattfindet. Man kann sodann die sich deckenden Flächentheile mit einander verschmelzen lassen, und hierdurch jene Fläche A und B in eine einzige Fläche verwandeln. Diese letzere Fläche mag die aus A und B combinirte Fläche genannt, und mit (A,B) bezeichnet werden. Ich werde nun im Folgenden zeigen, dass in vielen (noch näher anzugebenden)

premières remarques sont solidaires : si les surfaces ne sont pas données de position, elles n'ont pas naturellement d'intersection ensembliste et la formation de leur réunion enveloppe nécessairement un choix. Notons enfin le terme de *verwandeln* : il servait dans la première partie de l'ouvrage à désigner, par exemple la transformation d'une surface quelconque en surface simplement connexe au moyen de coupure, et s'opposait à la transformation continue (*stetige Umformung*). Neumann fait ensuite remarquer qu'il se présente deux cas de figures qu'il importe de distinguer. Ainsi, deux disques peuvent se couper de telle sorte que leurs frontières se coupent eux aussi, leur intersection – ou pour éviter ce terme anachronique, le domaine de recouvrement (*Deckungsgebiet*) – formant un *secteur* (*Abschnitt*) ou *segment* (*Segment*) de l'un et de l'autre [Neumann 1884 446]. Mais deux calottes sphériques d'une même sphère peuvent aussi se recouvrir partiellement sans que leurs frontières ne se coupent, par exemple en prenant sur une sphère usuelle un peu plus que l'hémisphère nord et un peu plus que l'hémisphère sud. Le domaine de recouvrement a alors la forme d'une *ceinture* (*Gürtel*) ou *zone* (*Zone*), et le domaine combiné (A,B) n'est autre que la sphère toute entière. Ces exemples conduisent aux notions générales de fusions selon des secteurs (*abschnittförmige Verschmelzung*) et de fusion selon une ceinture (*gürtelförmige Verschmelzung*) [Neumann 1884 447]. Le paragraphe 4 est consacré aux cas à secteurs, dans le cas simple où, sur une sphère simple, l'un des secteurs, A, est une calotte et l'autre, B, un domaine limité par une courbe simple. Ces hypothèses simplificatrices recouvrent encore une certaine variété de cas, comme Neumann souhaite le faire sentir en proposant les figures [Neumann 1884 447] :



Fällen die Fundamentalaufgabe (20.) pg.396 für die combinirte Fläche (A,B) stets lösbar ist, falls man nur in Besitz irgend welcher Methode ist zur Lösung derselbe für die einzelnen Flächen A und B. »

Le cas où les courbes seraient tangentes en l'un des points d'intersection est exclu. Le procédé est ensuite mise en route en se donnant une fonction Σ au bord de A qui prolonge par continuité la donnée sur la partie δ , idem sur le bord de B, et en utilisant les hypothèses sur A et B. On procède ensuite au jeu de compensation usuel et la convergence des séries ainsi construites est établie. On obtient une fonction Φ sur A et une fonction ψ sur B, dont il est établi qu'elles sont identiques sur le domaine de recouvrement, noté $S_{\alpha\beta}$. Pour le cas de fusion en ceinture, Neumann part aussi du cas le plus simple, représenté par la figure [Neumann 1884 452] :



Il fait ensuite remarquer que le raisonnement détaillé dans le paragraphe précédent s'applique encore, moyennant une petite modification relative aux constantes de majoration. Il signale ensuite que ce raisonnement ne s'applique que si A, la surface à l'extérieur sur la figure, possède deux courbes de bord, mais qu'il est en défaut si elle n'en possède pas, comme dans le cas de la fusion de deux hémisphères étendus. Dans le cas non couvert par la démonstration, la surface (A,B) est toutefois *fermée (geschlossene)* – c'est-à-dire sans bord – et l'on sait qu'il y existe des fonctions harmoniques, les constantes, qui sont d'ailleurs les seules (démontré au chapitre 16). En combinant tous les résultats d'existence, on voit que le problème fondamental est résoluble pour toute partie d'une sphère de Riemann extérieure à un disque, puis, plus généralement, pour toute partie d'une surface de Riemann bordée par un nombre quelconque de cercles (§6).

Les trois derniers paragraphes utilisent ces théorèmes d'existence relatifs aux fonctions harmoniques sur des parties strictes d'une sphère de Riemann (sauf à considérer les constantes) pour établir les théorèmes utilisés par Riemann et relatifs aux fonctions complexes présentant des « discontinuités » données, à savoir des paires de points singuliers logarithmiques, et des discontinuités (périodes) purement imaginaires le long des coupures canoniques a_k, b_k où la partie réelle est de plus donnée. Le passage, par intégration curviligne de la différentielle conjuguée d'une fonction harmonique U à une fonction complexe dont elle

est la valeur réelle est classique : on le trouvait chez Riemann, ainsi que dans le chapitre 8 de ces Leçons de Neumann. Regardons plutôt comment Neumann dépasse un travail d'abord restreint à une calotte normale et utilise des théorèmes qui ne sont non triviaux que sur les surfaces avec bord pour obtenir des théorèmes non triviaux sur les surfaces sans bord que sont les sphères de Riemann. Par des méthodes d'analyse semblables à celles utilisées jusque là dans le chapitre, il établit d'abord :

Proposition : Soit une calotte normale quelconque A délimitée sur une sphère de Riemann R . Soit de plus $f^*(z)$ une fonction monogène donnée uniquement sur A , univoque et continue sauf en des points de discontinuité quelconques à l'intérieur de A . Désignons enfin par F^* la partie réelle de f^* :

$$F^* = \operatorname{Re} f^*(z)$$

On est alors toujours capable de construire une fonction réelle $\Omega = \Omega(x,y)$ qui soit univoque, continue et harmonique sur R sauf en les points de discontinuité de la fonction F^* , telles que de plus la différence $\Omega - F^*$ possède dans A ces trois propriétés.

[Neumann 1884 461]³⁶

Il était précisé un peu plus haut que le lieu de discontinuité, qui doit pour l'instant être assez petit pour tenir dans une calotte normale, peut être une ligne aussi petite qu'on veut, ce qui inclut le cas d'un point isolé (*beliebig kurz, also, z.B. auch ein Punkt* [Neumann 1884 465]). Est ensuite établi le théorème équivalent pour les singularités logarithmiques, sous la condition que les deux points c_1 et c_2 et une ligne l les reliant soient intérieurs à une calotte normale. On se soustrait ensuite à cette condition en découpant la ligne quelconque l reliant deux points quelconques en un nombre (implicitement fini) de lignes vérifiant les hypothèses précédentes puis en additionnant [Neumann 1884 470]. Si l'on choisit une courbe fermée s parmi les $2p$ coupures canoniques a_k, b_k , et sur s deux points distincts c_1 et c_2 , on peut par le même procédé de découpage puis addition, obtenir une fonction univoque et continue sur R privé des coupures, présentant le long des coupures autres que s des discontinuités constantes et imaginaires pures, présentant le long d'une des deux parties de s reliant c_1 à c_2 une discontinuité constante de partie réelle 1, le long de l'autre partie une discontinuité constante imaginaire pure, et deux singularités logarithmiques de résidus $+1$ et -1 en c_1 et c_2 . En

³⁶ «Satz.- Auf einer Riemann'schen Kugelfläche R sei irgend eine Normalcalotte A abgegrenzt. Ferner repräsentire $f^*(z)$ einer nur auf A gegebene Function, die innerhalb A irgend welche Unstetigkeitsstellen besitzt, hiervon abgesehen aber auf A eindeutig und stetig ist. Endlich sei der reelle Theil von $f^*(z)$ mit F^* bezeichnet : $F^* = \operatorname{Re} f^*(z)$. Alsdann wird man stets eine reelle Function $\Omega = \Omega(x,y)$ zu construiren im Stande sein, von solcher Beschaffenheit, dass Ω , abgesehen von jenen Unstetigkeitsstellen der Function F^* , auf R eindeutig, stetig und harmonisch ist, ferner von solcher Beschaffenheit, dass die genannten drei Eigenschaften innerhalb A der Differenz $\Omega - F^*$ anhaften. »

utilisant le même raisonnement le long de l'une s des coupures canoniques on obtient une fonction univoque et continue sur \mathbb{R} privé des coupures canoniques, de discontinuité constante de partie réelle 1 sur s et imaginaire pure sur les autres coupures. On obtient ainsi la liste des cas élémentaires permettant de retrouver par superposition (*Superposition* [Neumann 1884 470]) les théorèmes de Riemann. Neumann termine en signalant que ces théorèmes, sous la forme donnée par Riemann, sont aussi des théorèmes d'unicité (« *Den gennanten Existenztheoreme stehen gewisse Unitätstheoreme zur Seite* » [Neumann 1884 471]) : pour sa part, il a déjà établi l'unicité au chapitre 10.

III. Felix Klein.

La lecture de Riemann que Klein (1849-1925) propose dans ses cours de 1880/81, publiée en 1882 sous le titre *Sur la théorie riemannienne des fonctions algébriques et de leurs intégrales*³⁷, joue un rôle historique bien différent de celle de Neumann. Alors que cette dernière devient une présentation standard, reprise dans d'autres traités, Klein abandonne lui-même cette perspective en 1882, en recentrant son travail sur les fonctions automorphes [Klein 1883]. Ce cours de 80/81 n'est toutefois pas oublié, et Weyl s'y réfère explicitement. Nous voulons ici en présenter les grandes lignes en le comparant avec Neumann et Weyl. Nous finirons en élargissant l'étude à quelques autres textes de Klein jouant un rôle dans l'explicitation du local ou l'émergence des questions globales, de l'orientabilité au *Raumproblem*. Nous conservons certains aspects pour d'autres chapitres, par exemple la démonstration par « méthode de continuité » chez Klein et Poincaré.

1. Le cadre : transfert local, légalité du lieu, surface idéale.

On trouve dans la première des trois parties, celle des *considérations introductives*, plusieurs discussions qui marquent l'originalité de Klein et explicitent des aspects qui seront repris par Weyl. En un sens, Klein suit la même progression que Neumann : il passe des fonctions dans le plan (sans d'ailleurs préciser s'il parle de fonctions définies dans une partie du plan ou dans tout le plan) aux fonctions sur la sphère, puis il passe aux surfaces. Le point de départ est toutefois un peu différent. Klein commence par donner une interprétation physique des fonctions considérées : si $u+iv = f(x+iy)$ (implicitement : analytique, non nécessairement univoque), alors $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ peut-être vu comme le potentiel de vitesse d'un fluide circulant entre deux membranes infiniment proches (ou d'un courant électrique), l'annulation du laplacien garantissant que le courant est stationnaire ; les courbes de niveau de u sont les équipotentielles et les courbes de niveau de v , perpendiculaires aux premières, sont les lignes de courant. Les points d'annulation de df/dz sont vus comme des points de croisement (*Kreuzungspunkte*) où se rencontrent plusieurs lignes de courant. Pour achever de caractériser les fonctions qui font l'objet de l'étude, Klein stipule qu'il se limite aux fonctions dont les

³⁷ *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* [Klein 1882].

points infinis (*unendlichkeitspunkte*) sont du type $A \log(z-z_0) + \frac{A_1}{z-z_0} \dots$. Le premier

objectif sera de montrer que cette classe de fonction coïncide avec celle des fonctions algébriques et de leurs intégrales : on est ici chez Riemann. Après cette mise en place dans le plan, Klein reprend de Beltrami la notion de fonction potentielle sur une surface munie d'une métrique riemannienne ; si au lieu de travailler dans le plan de la variable $x+iy$ on travaille sur une surface avec des coordonnées curvilignes p, q et une métrique donnée par $ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2$, alors les fonctions potentielles u sont caractérisées par l'équation

$$\frac{\frac{F \frac{\partial u}{\partial q} - G \frac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}}}{\partial p} + \frac{\frac{F \frac{\partial u}{\partial p} - G \frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}}}{\partial q} = 0. \quad [\text{Klein 1882 18}]$$

L'homogénéité de cette équation en E, F, G montre que la notion de fonction potentielle ne dépend que de la structure conforme de la surface de Riemann (ici au sens métrique de ce terme). C'est sur cette équation caractéristique faisant le lien avec la notion de géométrie riemannienne (et conforme) intrinsèque que s'appuie Klein pour formuler la question du passage à une surface autre que celle du plan ou de la sphère. C'est un retour sur le passage à la sphère qui ouvre le paragraphe 6 :

Les différentes fonctions du lieu [*Functionen des Orts*] que nous étudions sur la sphère sont en même temps des fonctions de l'*argument* $x+iy$. Quelle est l'origine de ce lien ? Remarquons avant toute chose que $x+iy$ est-elle même une fonction complexe du lieu sur notre sphère ; x et y satisfont en effet à l'équation différentielle de ces dernières (§1)³⁸, lorsqu'on les introduit à la place de u et v . Tant que l'on opère dans le plan, on pourrait penser que cette fonction possède sur les autres un avantage essentiel ; après le passage [*Uebergang*] à la sphère, il n'y a plus de raison de croire cela. En fait, cette remarque à propos de notre question se généralise immédiatement. Si u_1+iv_1 et $u+iv$ sont deux fonctions de $x+iy$, alors u_1+iv_1 est aussi fonction de $u+iv$. Nous avons donc pour le plan et la sphère la proposition générale : *deux fonctions complexes du lieu, au sens usuel de cette expression en théorie des fonctions, sont chacune fonction de l'autre.* [Klein 1882 2]³⁹

³⁸ Les équations de Cauchy-Riemann.

³⁹ „Die verschiedenen Functionen des Ortes, welche wir auf der Kugelfläche studiren, sind zugleich Functionen des Argumentes $x+iy$. Woher dieser Zusammenhang ? Man wolle vor allen Dingen bemerken, dass $x+iy$ selbst eine complexe Function des Ortes auf unserer Kugel ist; genügen doch x und y , für u und v eingesetzt, den früher (§1) für letztere aufgestellten Differentialgleichung. So lange man in der Ebene operirt, könnte man denken, dass diese Function vor den übrigen etwas Wesentliches voraus habe; nach dem Uebergange zur Kugel ist hierzu

Klein reprend ici le balancement riemannien entre fonction du lieu (i.e. d'un point sur une figure) et fonction de l'argument $x+iy$ (plus généralement : de grandeurs numériques) et ne s'intéresse qu'aux substitutions formelles dans des équations aux dérivées partielles. Il s'agit d'expliquer que, puisque les notions définies relèvent de la structure conforme, des coordonnées curvilignes sont aussi acceptables que les coordonnées rectilignes x et y . Ce travail formel n'invite ni aux hypothèses restrictives (par exemple sur la non annulation des dérivées) ni à l'association de domaines aux fonctions considérées. L'objectif de Klein est de passer de la sphère aux autres surfaces :

J'affirme que cette même caractéristique [la « proposition générale »] convient à toute surface, par où l'on affirme implicitement qu'on peut transférer [Übertragen] de manière conforme un morceau d'une surface quelconque sur le plan ou la sphère.

La preuve prend immédiatement forme si l'on introduit comme coordonnées curvilignes sur la surface les composantes x, y d'une quelconque fonction complexe du lieu $x+iy$ existant sur la surface [Klein 1882 21]⁴⁰

Le transfert conforme depuis le plan s'exprime par les conditions $E = G$ et $F = 0$, auquel cas la « proposition fondamentale » se généralise : les équations données pour tout ds^2 au paragraphe précédent deviennent les équations de Cauchy-Riemann. Dans ses explications, Klein est toutefois un peu flou en s'appuyant sur la notion de « fonction complexe du lieu » : il est plus en train d'explicitier ce qu'est la structure conforme du plan que d'installer une structure sur un ensemble *a priori* nu. Cette perspective est confirmée par le choix de la proposition générale qui clôt cette discussion :

Lorsque l'on connaît, sur deux surfaces, deux fonctions complexes du lieu, et qu'on rapporte les surfaces l'une à l'autre de sorte que des points correspondants présentent des valeurs fonctionnelles égales, alors les surfaces sont rapportées conformément l'une à l'autre. [Klein 1882 22]⁴¹

keine Veranlassung mehr. Und in der That verallgemeinert sich die Bemerkung, auf die sich unsere Frage bezieht, sofort. Wenn u_1+iv_1 und $u+iv$ Functionen von $x+iy$ sind, so ist auch u_1+iv_1 eine Function von $u+iv$. Wir haben für Ebene und Kugelfläche den allgemeinen Satz : dass von zwei complexen Functionen des Ortes im Sinne der gewöhnlichen functionentheoretischen Ausdrucksweise jede eine Functionen der anderen ist.“

⁴⁰ *„Ich sage aber, dass dieselbe Eigenthümlichkeit überhaupt allen Flächen zukommt, womit implicite behauptet wird, dass man einen Theil einer beliebigen Fläche auf die Ebene oder die Kugelfläche conform übertragen kann. Der Beweis gestaltet sich unmittelbar, wenn man die Bestandtheile x, y irgend einer auf einer Fläche selbst existirenden complexen Function des Ortes $x+iy$, auf der Fläche selbst als krummlinige Coordinaten einführt.“*

⁴¹ *„Wenn man auf zwei Flächen zwei complexe Functionen des Ortes kennt, und man bezieht die Flächen so aufeinander, dass entsprechenden Punkte respective gleiche Functionswerthe aufweisen, so sind die Flächen conform aufeinander bezogen.“*

Le transfert de structure vers un *ensemble* nu est, en un sens, une complète trivialité : il ne prend de dimension problématique que lorsque la discussion est structurée par un axe local/global. On peut bien sûr lire Klein en termes anachroniques : si on déclare qu'*une* fonction donnée quelconque est une fonction analytique sur une surface, on munit la surface d'une structure conforme permettant de caractériser *les* fonctions analytiques ; mais on voit qu'une telle formulation ne prend tout son sens que dans un cadre axiomatique (le terme « analytique » étant, dans la première partie de la phrase, non défini), et demeure ambiguë tant qu'elle n'est pas accompagnée d'un travail sur la notion de voisinage. Faute de pouvoir parler d'un transfert de structure d'un ensemble structuré (le plan) vers un ensemble nu, faute de pouvoir déclarer une fonction arbitraire (qui soit tout de même un homéomorphisme local !) comme uniformisante locale, l'énoncé final de Klein ne peut prendre que la forme un peu faible d'un résultat de stabilité de la notion de transformation conforme par composition. La situation décrite ici par Klein s'appuyait sur des considérations formelles, en termes d'équation caractéristique, sans souci d'explicitier le caractère générique des hypothèses (non annulations etc.) ni les domaines de validité. Les deux sont pourtant fondamentaux pour Klein, et si le mode d'écriture permettait d'avancer en les laissant dans l'ombre, leur explicitation tardive est l'occasion d'annoncer l'objectif du travail ; le paragraphe 6 se termine ainsi sur :

Dans la mesure où ils ont trait à une surface quelconque, tous ces théorèmes n'ont tout d'abord de sens clair que lorsqu'on limite son attention à de petits morceaux [*auf kleine Stücke*] de la surface, morceaux dans lesquels la fonction complexe ne présente ni point d'infinité ni point de croisement. C'est pourquoi je n'ai parfois parlé que de *partie* de surface [*Flächentheile*]. Mais se pose alors la question de savoir quelle forme prennent ces relations lorsqu'on utilise des surfaces fermées *dans toute leur extension* [*in ihrer ganzen Ausdehnung*]. [Klein 1882 22] ⁴²

On voit que l'évocation du local est immédiatement rapportée à la nécessité d'éviter les singularités de différents types ; il faut dire que, les fonctions multivoques n'étant pas exclues, des discussions plus fines en termes de domaine ne s'imposent pas d'emblée. Le nécessaire dépassement de l'étude locale vers une étude globale est aussi, et indiscernablement, la nécessaire réintégration des points singuliers.

⁴² „Alle diese Theoreme haben, soweit sie sich auf beliebige Flächen beziehen, für's Erste nur dann einen klaren Sinn, wenn man seine Aufmerksamkeit auf kleine Stücke der Fläche beschränkt, innerhalb deren die complexen Functionen des Ortes weder Unendlichkeitspuncten noch Kreuzungspuncte aufweisen. Ich habe desshalb gelegentlich auch nur von einem Flächentheile gesprochen. Aber es liegt nahe zu fragen, wie sich die Verhältnisse gestalten, wenn man geschlossene Flächen in ihrer ganzen Ausdehnung benutzt.“

Les deux grandes spécificités de ce travail de Klein sont le recours aux raisonnements physico-géométriques – Klein oppose dans un passage l'étude qualitative à l'étude quantitative [Klein 1882 35] – et le travail sur une surface donnée indépendamment de ce que nous nommons (anachroniquement) une carte globale. Gardons les techniques de preuve pour le paragraphe suivant et examinons pour l'instant une conséquence fondamentale de la deuxième spécificité⁴³. Nous avons vu Neumann fidèle à Riemann en présentant la notion de surface *au-dessus* du plan *associée* à une fonction algébrique d'une variable complexe. Klein, en revanche, utilise une autre partie de l'héritage riemannien : il reprend, *via* le travail de Beltrami, le travail de 1854 sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie. La donnée d'un espace par des coordonnées curvilignes, la notion de structure conforme (déduite, techniquement, d'une structure métrique), lui permettent de parler de surface analytique de manière intrinsèque ; le plan fournit le modèle *local* (c'est-à-dire aussi, non singulier) et non la référence primitive et globale. C'est seulement après avoir établi les résultats relatifs aux fonctions sur les surfaces analytiques que Klein (§14) explique comment une telle fonction – nous dirons « méromorphe » plutôt que, comme le fait Klein, univoque et n'ayant que des pôles comme points singuliers – peut être vue comme réalisant la surface *au-dessus* du plan complexe. Les discussions plus ou moins heureuses de Neumann sur l'allure de la surface au-dessus d'un point de ramification sont ici rejetées en fin d'exposé, et rapportées à la notion bien simple de point de croisement d'une fonction sur la surface : de même que la surface est première par rapport au plan, le point de croisement est premier par rapport à la *valeur* de ramification. Cette primitivité de la surface sur la « surface au-dessus » exprime pour Klein le point de vue fondamental de Riemann, qui consiste en l'obtention des résultats analytiques non par la manipulation calculatoire de symboles mais par l'étude (que nous dirions, depuis Poincaré, qualitative) des différents potentiels sur une surface (§7). Klein s'en explique dans les §16 et 18, dans lesquels il développe sans ambiguïté le thème de la *légalité primitive* du lieu qu'on retrouvera chez Weyl. C'est au §16 la comparaison entre surface et « surface au-dessus » qui ouvre la discussion. Déclarant qu'il faut regarder comme *équivalentes* (*gleichbedeutend*) deux surfaces pouvant être conformément transformées l'une en l'autre, il fait remarquer qu'on peut aussi bien édifier la théorie en partant de la « surface au-dessus » que d'un modèle spatial de la surface donné par une « sphère à p anses » (il parle alors de la surface normale à p anse, et distingue l'équivalence topologique de l'équivalence conforme [Klein 1882 26]). Dans la classe des surfaces conformément équivalentes, les

⁴³ Dans l'introduction, Klein dit avoir découvert cette manière de voir les surfaces de Riemann dans les travaux de Prym. Prym dira plus tard ne pas se souvenir d'avoir eu une telle idée !

« surfaces au-dessus » possèdent chacune des systèmes de points de ramification, mais, nous dit Klein, la valeur des points de ramification n'est qu'une propriété *inessentielle* ; chaque « surface au-dessus » possède les siennes. Cet exemple permet à Klein d'introduire la notion de « surface idéale » :

Parmi la pluralité illimitée des surfaces équivalentes, laquelle voulons-nous choisir comme fondamentale [*zu Grunde legen*] : nous devons distinguer entre les propriétés *essentielles* – communes à toutes les surfaces équivalentes – et les propriétés *inessentielles* – inhérentes à chaque surface particulière. Relèvent des premières le nombre p , ou encore les « modules » dont il sera question en détail au §18 ; relèvent des secondes, pour les surfaces à plusieurs feuillets, la nature et la position des points de ramification. Si nous imaginons une surface *idéale*, ne possédant que ces propriétés essentielles, alors ce sont des points ordinaires qui y correspondent aux points de ramification de la surface à plusieurs feuillets ; un point qui, pour parler généralement, ne se distingue nullement des autres, et qui ne mérite attention que dans la mesure où, dans l'application conforme de la surface idéale sur la surface particulière, il s'y forme un point de croisement. [Klein 1882 49]⁴⁴

On voit que le vocabulaire de Klein ne dispose que des termes « surface » et « surface à plusieurs feuillets », ce qui ne rend pas compte de la conception bien claire qu'il se fait des secondes comme étant formées d'un *couple* (M, f) , où M est une surface et f une fonction méromorphe sur M . On voit aussi que Klein est parfaitement clair dans cette citation sur le fait que le point de ramification (sur la surface) n'est pas un point singulier *de la surface* mais *de la fonction*. Le lexique de Klein est ici en deçà de sa théorie, et semble faire des surfaces et des « surfaces à plusieurs feuillets » des objets de même nature. La distinction entre propriétés essentielles et inessentielles, puis la notion de surface *idéale* fondée sur cette distinction, permettent de relire le projet riemannien :

Dans le raisonnement de Riemann, tel que j'ai cherché à le décrire dans ce qui précède, la surface de Riemann n'illustre [*veranschaulicht*] pas seulement les fonctions considérées ; bien plutôt, elle les *définit*. Il semble possible de distinguer ces

⁴⁴ „Aber welche unter den unbegrenzt vielen, sonach gleichberechtigten Flächen wir auch der Betrachtung zu Grunde legen wollen : wir müssen zwischen wesentlichen Eigenschaften unterscheiden, welche allen gleichberechtigten Flächen gemeinsam sind, und unwesentlichen Eigenschaften, die der particulären Fläche anhaften. Zu ersteren gehört die Zahl p , es gehören dahin die „Moduln“, von denen in §18 ausführlicher die Rede sein soll; zu letzteren bei mehrblättrigen Flächen die Art und Lage der Verzweigungspuncte. Wenn wir uns eine ideale Fläche denken, die nur jene wesentlichen Eigenschaften besitzen soll, so entsprechen auf ihr den Verzweigungspuncten der mehrblättrigen Fläche gewöhnliche Punkte, die, allgemein zu reden, von den übrigen Nichts voraus haben, und die erst dadurch beachtenswerth werden, dass bei der conformen Abbildung, die von der idealen Fläche zur particulären hinüberführt, in ihnen Kreuzungspuncte entstehen.“

deux choses : prendre d'un côté les définitions des fonctions et continuer à ne voir dans la surface qu'un moyen d'illustration. C'est en effet ce qu'ont préféré la plupart des mathématiciens, la définition des fonctions donnée par Riemann comportant des difficultés considérables lorsqu'on l'étudie plus en détail. On part en gros de l'équation algébrique et de la notion d'intégrale, et l'on construit ensuite la surface de Riemann associée. [Klein 1882 61]⁴⁵

Se donner un domaine, définir la notion de fonction sur ce domaine et étudier le système de ces fonctions, voilà le cheminement « riemannien » que Klein défend et renouvelle, en s'appuyant sur le Riemann de 1854 autant que sur celui de 1851 et 1857. Après les surfaces normales représentées comme sphères à p anses dans l'espace usuel et les surfaces à plusieurs feuillets au-dessus du plan, Klein clôt le §18 en signalant qu'il a commencé à utiliser – dans d'autres travaux – une troisième voie. Elle appartient – comme la surface représentée dans l'espace ordinaire – à la famille des « auxiliaires graphiques » (*graphische Hilfsmittel*) :

En font aussi partie les *réseaux de polygones*, que j'ai utilisés de manière répétée en imaginant la surface de Riemann découpée de manière adéquate et étendue dans le plan. Je n'ai alors pas abordé la question de savoir si la figure ainsi formée, qui peut dans un premier temps être modifiée continûment de manière arbitraire, peut, dans l'intérêt de recherches ultérieures en théorie des fonctions, se voir conférer une forme réglée [*Gesetzmässige Gestalt*] par laquelle on atteindrait une *définition* des fonctions illustrées par la figure. [Klein 1882 62]⁴⁶

Déjà présent chez Riemann, cet auxiliaire qu'est la « surface dépliée » était, alors déjà, bien plus qu'un auxiliaire graphique. Si dans ce passage Klein ne dépasse guère le stade de l'allusion, il avait pris soin de présenter quelques pages plus tôt (§15) l'équivalence entre le travail sur un tore de l'espace ordinaire et sur le plan muni d'un réseau de parallélogrammes. C'est dans cette direction qu'il réoriente ses recherches à partir de 1882 – nous en verrons

⁴⁵ „In Riemann's eigenem Gedankengange, wie ich ihn vorstehend zu schildern versuchte, veranschaulicht die Riemann'sche Fläche nicht nur die in Betracht kommenden Functionen, sondern sie definiert dieselben. Es scheint möglich, diese beiden Dinge zu trennen : die Definition der Functionen von anderer Seite zu nehmen und die Fläche nur als Mittel der Veranschaulichung beizubehalten. Das ist in der That, was von der Mehrzahl der Mathematiker um so lieber geschehen ist, als Riemann's Definition der Function bei genauerer Untersuchung beträchtliche Schwierigkeiten mit sich bringt. Man beginnt also etwa mit der algebraischen Gleichung und der Begriffsbestimmung des Integrals, und construirt erst hinterher eine zugehörige Riemann'sche Fläche.“

⁴⁶ „Hierher gehören auch die Polygonnetze, deren ich mich wiederholt bediente, indem ich mir die Riemann'sche Fläche in geeigneter Weise zerschnitt und dann in die Ebene ausgebreitet dachte. Es bleibe dabei an dieser Stelle unerörtert, ob nicht den so entstehenden Figuren, die zunächst beliebig stetig verändert werden dürfen, im Interesse weitergehender Functionentheoretischer Untersuchungen hinterher doch eine gesetzmässige Gestalt ertheilt werden soll, vermöge deren sich eine Definition der durch die Figur zu veranschaulichenden Functionen ermöglicht.“

quelques aspects dans un autre chapitre. Le thème de la légalité du lieu, si clairement exprimé dans les lignes que nous citons plus haut, sera remplacé par celui de la légalité du groupe.

2. Les outils : le qualitatif *contre* l'ensembliste.

Nous ne souhaitons pas présenter ici le panorama des résultats établis par Klein : ce sont pour l'essentiel ceux de Riemann, que nous avons déjà revus chez Neumann. En revanche, la manière originale qu'à Klein de poser le problème – en termes de surface idéale, primitive et définissant les fonctions – s'accompagne d'un choix de techniques de preuve qui le distingue de Riemann et Neumann. Encore le mot « preuve » est-il mal adapté à ce que fait Klein ; il déplore lui-même – en renvoyant aux théorèmes d'existence de fonctions harmoniques tels que Neumann et Schwarz les démontrent – la grande difficulté des raisonnements qu'on a substitués au « principe de Dirichlet » [Klein 1882 v]. Il se fixe comme objectif, non pas d'asseoir la théorie sur un fondement plus sûr, ni de l'exposer dans tous ses détails, mais d'en embrasser toute l'étendue de manière directe et intuitive. Les outils seront tirés de l'intuition géométrique et physique, en particulier pour ce qui est de l'existence des différents potentiels élémentaires – nous parlerons d'outil « qualitatif », quoique le terme ne se présente que ponctuellement sous la plume de Klein.

Cette démarche le conduit systématiquement à esquiver les raisonnements dans lesquels nous voyions, chez Neumann en particulier, des éléments d'explicitation proto-ensemblistes associés au couple local/global : recherche d'une expression précise du local grâce à la notion de « domaine d'un point », utilisation de découpages et d'allers-retours entre état original et état naturel d'une pièce simplement connexe etc. Non seulement Klein ne reprend pas ces éléments, mais il dédaigne aussi les raisonnements de topologie ensembliste qu'on peut, en 1882, lire dans quelques publications de Weierstrass ou de ses élèves. Par exemple, il rappelle la nullité de la somme des résidus d'une fonction méromorphe – il n'y a bien entendu pas de distinction entre fonction et différentielle chez Klein – sans chercher à l'établir : il signale que le résultat est bien connu [Klein 1882 10]. De même, il se contente d'affirmer que d'après ses prémisses, le nombre des pôles et des points de croisement d'une fonction méromorphe ne peut être que fini [Klein 1882 28].

Dans certains cas, il donne la référence précise d'un texte où l'on peut trouver une démonstration, et il préfère exposer des arguments plus intuitifs. C'est le cas pour la proposition qui permet d'établir l'unicité de la représentation par potentiels élémentaires : une fonction uniforme sans point d'infinité est constante. Klein commence par le cas de la sphère

(auquel nous nous limiterons) et fait le raisonnement suivant : imaginons le système des courbes de courant et supposons dans un premier temps qu'il n'existe pas de point de croisement ; le système des courbes étant sans intersection, soit il existe une courbe qui s'enroule autour d'un point (mais le point est alors un pôle de type *tourbillon*, d'où contradiction), soit il existe une courbe fermée, mais il existe alors des courbes fermées aussi petites que l'on veut, et elles doivent entourer un pôle de type *source* (contradiction). S'il existe des points de croisement, ils sont en nombre fini et seul un nombre fini de courbes s'y rencontre : on peut alors refaire le raisonnement précédent dans les zones simples délimitées par ces quelques courbes [Klein 1882 33]. Il serait intéressant, mais ce n'est pas notre propos, de comparer systématiquement ce travail de Klein avec celui, qualitatif *et* probant, que mène Poincaré au même moment en sur les courbes définies par une équation différentielle.

Prenons un deuxième exemple de résultat global : toute valeur (finie ou non) u_0+iv_0 est prise le même nombre de fois (avec multiplicité) par toute fonction méromorphe $u+iv$. Klein part du théorème de décomposition en somme de fonctions élémentaires (établi au §12) et de l'étude locale des pôles (§2, cette étude qualitative locale revenant implicitement à l'étude graphique du terme dominant) ; de la validité locale de cette étude Klein déduit l'allure des systèmes de lignes de niveaux $u = u_0$ et $v = v_0$ pour des valeurs de u_0 et v_0 suffisamment grandes (au voisinage d'un point d'infinité, donc) :

Pour de très grandes valeurs u_0 et v_0 , la justesse de notre affirmation est immédiatement claire. En effet d'après le §2, les courbes $u = u_0$ et $v = v_0$ forment, à proximité [*in der Nähe*] du point d'infinité isolé, de petits cercles sécants qui possèdent nécessairement, outre le point de d'infinité (qui n'entre plus en jeu), *un* autre point d'intersection :

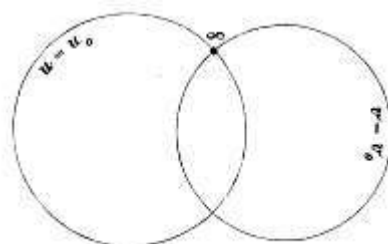


Fig. 33.

La chose s'en déduit en toute généralité. En effet, les courbes $u = u_0$ et $v = v_0$ ne peuvent perdre de point d'intersection par déformation continue. [Klein 1882 45]⁴⁷

⁴⁷ „ Hiernach ist für sehr grosse u_0, v_0 die Richtigkeit unserer Behauptung unmittelbar klar. Denn die betreffenden Curven $u=u_0, v=v_0$ gehen dann in der Nähe des einzelnen Unendlichkeitspunctes nach §2 in kleine durch den Unendlichkeitspunct hindurchlaufende Kreise über, welche nothwendig neben dem (hier nicht weiter

Le passage du résultat établi localement au résultat « général » suppose encore qu'on établisse que des points de croisement ne peuvent se superposer ; Klein explique qu'une telle superposition se produit effectivement en un point de croisement, mais que ces points étant en nombre fini ils ne partagent pas la surface en régions, c.q.f.d. On voit que l'argument de stabilité par continuité utilise la connexité du complémentaire des points qui mettent l'argument en défaut. Le résultat « général » ainsi obtenu n'est pas un résultat universel mais plutôt un résultat générique : on partait d'une situation dans laquelle tous les pôles étaient supposés simples, on établit le résultat en expliquant pourquoi on peut négliger les points de croisements ; on n'obtient donc qu'un résultat faisant abstraction des problèmes de multiplicité. Soulignons toutefois un type de raisonnement par passage du local au global que nous n'avions pas rencontré jusqu'ici. Nous évoquerons dans un prochain chapitre (chapitre 4) la « méthode de continuité » utilisée par Klein et Poincaré en théorie de l'uniformisation des fonctions algébriques par les fonctions « fuchsienes » ; si un lecteur du 20^e siècle peut voir dans les schémas de preuve bâtis alors par ces deux auteurs l'étude de la surjectivité d'une application continue au moyen d'arguments de topologie ensembliste (du type : image fermée et ouverte dans un ensemble connexe), on peut voir dans le petit raisonnement de Klein que nous donnons ici, d'autres éléments de compréhension : prolongement par continuité d'une situation connue localement, question des frontières interdisant ce prolongement. On verra aussi qu'en un sens, la « preuve de continuité » que donne Klein en théorie de l'uniformisation est plus générique que globale, contrairement à celle de Poincaré. Terminons sur un troisième exemple de la manière de raisonner de Klein. Pour rendre intuitif le lien entre genre, nombre de points de croisement et nombre de points d'infinité (algébriques simples), Klein présente au §11 la série suivante, dans laquelle on ne travaille qu'avec des courants symétriques (de sorte que la représentation plane suffit) ; on part de deux tores, chacun muni d'un système de lignes de courant sans infinité ni croisement [Klein 1882 35 et suiv.] :

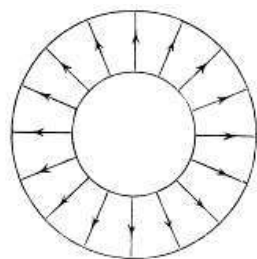


Fig. 21.

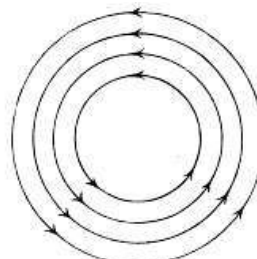


Fig. 22.

in Betracht kommenden) Unstetigkeitspunkte noch je einen Schnittpunkt gemein haben : (...) Hieraus aber folgt die Sache allgemein. Denn die Curven $u=u_0$, $v=v_0$ können bei kontinuierlicher Aenderung von u_0 , v_0 niemals einen Schnittpunkt verlieren.“

La « fusion » (*Verschmelzung*) des deux tores donne :

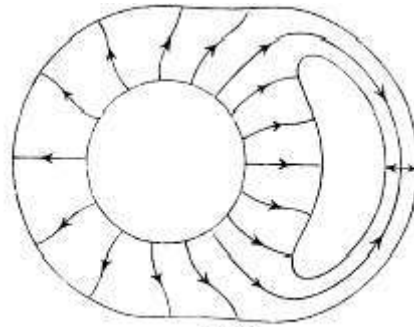


Fig. 23.

donc une surface de genre $p = 2$, sur laquelle sont apparus deux (un sur la figure) points de croisement. On peut ensuite imaginer qu'on déforme continûment (nous dit Klein) cette surface à deux anses en rétrécissant l'anse de gauche jusqu'à en faire une simple courbe, puis la faire disparaître. On revient à un tore :

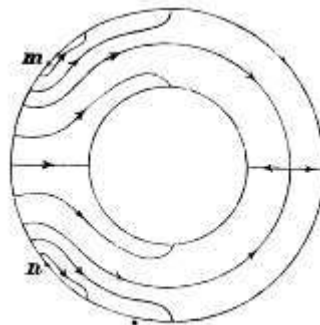


Fig. 29.

Un tore sur lequel la disparition de l'anse de gauche a fait naître deux points d'infinité logarithmiques, m et n . On peut enfin amener m et n à se superposer pour former un unique point d'infinité, algébrique cette fois :

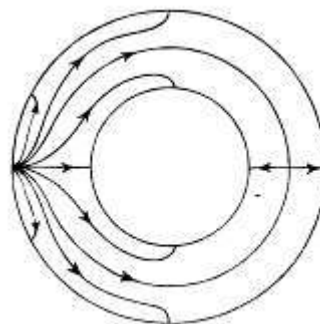


Fig. 31.

Klein explique ensuite que ces raisonnements peuvent se poursuivre indéfiniment, par une sorte de récurrence à partir de la sphère ; ils permettent de comprendre, par exemple, que sur une surface de genre p , le nombre de points de croisements (simples) est $2m+2p-2$, où m est le

nombre de points d'infinité algébriques (simples) [Klein 1882 40]. Il renvoie à d'autres ouvrages – on peut imaginer celui de Neumann – pour une démonstration plus rigoureuse. Pour ce qui est de l'histoire du couple local/global, la spécificité du projet de Klein lui confère un rôle de premier plan au niveau thématique et un rôle marginal quant aux pratiques du lieu. Le même objectif, celui de donner une vue d'ensemble de la démarche qualitative de Riemann, l'amène d'une part à formuler l'idée de surface idéale et le thème de la légalité du lieu et à esquisser d'autre part les difficultés d'une formulation plus précise des concepts. Il ne participe pas au travail de Neumann ou de Weierstrass (dans des styles bien différents !) pour mettre en place une nouvelle écriture des mathématiques permettant de parler avec précision de situations « qualitatives » et de bâtir des preuves par un *aller-retour réglé* entre formules et domaines de référence. Lorsqu'il préfère des raisonnements qualitatifs, on pourrait penser que Klein ne contribue certes pas à l'émergence des raisonnements ensemblistes mais qu'il contribue en revanche à l'*Analysis situs*. Mais ici encore, le même rejet du travail *par les formules* conduit aussi à esquisser le travail de topologie combinatoire et s'enferme dans un aller-retour entre figure et description littérale narrative. Les limites de cette démarche sont bien illustrées par un problème qu'il rencontre au §9. Après avoir rappelé les travaux de Jordan sur la classification (à homotopie près) des chemins sur une surface de genre p , il considère la figure [Klein 1882 31] :

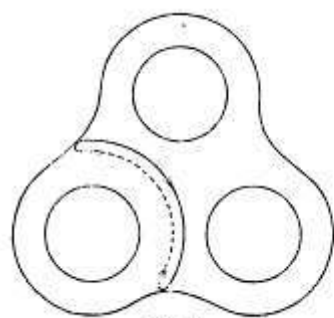


Fig. 19.



Fig. 20.

Il explique que dans ce cas, puisqu'on a un méridien parcouru dans les deux sens et un parallèle parcouru dans les deux sens, la contribution du chemin est nulle en termes de courant induit ; on est toujours dans le cadre où les coupures de Riemann et les « discontinuités » des intégrales le long de ces coupures sont vues comme des sources de courant surfacique. Klein fait toutefois remarquer que cette courbe ne peut pas être contractée en un point. Il est ici aussi à la fois suggestif et en deçà d'une distinction entre homotopie et

homologie, entre groupe d'homotopie et groupe commutatif associé. Disons à sa décharge qu'il n'est, ici, pas moins précis que ses contemporains⁴⁸.

3. Les « multiplicités » : au delà de la dimension.

La fin du cours de Klein nous permet d'aborder un autre aspect de l'émergence du couple local/global. La surface idéale n'est pas la seule « multiplicité » considérée par Klein ; si les raisonnements dimensionnels demeurent fondamentaux, d'autres aspects, non-locaux, sont eux aussi pris en compte. Ce thème nous permet d'évoquer d'autres textes où Klein contribue aussi à faire émerger une perspective plus globale sur les multiplicités.

i. Au delà de la dimension.

On peut commencer par un cas où la dimension est la seule caractéristique prise en compte. Après avoir établi la décomposition générale d'une fonction méromorphe (n'ayant que des pôles simples) sur une surface de genre p en somme de fonctions élémentaires, Klein reprend de Riemann le raisonnement bien élémentaire et parfaitement linéaire de dénombrement aboutissant à :

Sous cette hypothèse et pour m points de discontinuité algébriques simples arbitrairement donnés, il n'existe de fonction univoque du lieu que si $m \geq p+1$, et ces fonctions contiennent $(m-p+1)$ constantes arbitraires apparaissant linéairement. [Klein 1882 45]⁴⁹

En laissant la position des m points varier continûment sur la surface on gagne m degrés de libertés (complexes) :

La totalité [*die Gesamtheit*] des fonctions univoques à m points de discontinuité algébriques simples existant sur une surface donnée forme un continuum [*Continuum*] à $(2m-p+1)$ dimensions [*Abmessungen*]. [Klein 1882 45]⁵⁰

⁴⁸ cf. [Vanden Eynden 1999]. Précisons aussi que Klein est toujours parfaitement clair sur le caractère essentiellement *heuristique* de ces raisonnements, ainsi que sur leur caractère *générique*. Sur ce dernier point, on peut lire ses remarques sur la portée des arguments de dénombrement dans les énoncés du type « Riemann-Roch » [Klein 1882 44].

⁴⁹ „ Unter der genannten Voraussetzung giebt es bei m beliebig vorgeschriebenen einfachen algebraischen Unstetigkeitspuncten nur dann eindeutige Functionen des Ortes, wenn $m \geq p+1$ ist, und zwar enthalten diese Functionen $(m-p+1)$ linear vorkommende willkürliche Constante.“

⁵⁰ „ Die Gesamtheit der eindeutigen Functionen mit m einfachen algebraischen Unstetigkeitspuncten, die auf gegebener Fläche existieren, bildet ein Continuum von $(2m-p+1)$ Abmessungen.“

On n'en saura pas plus sur ce *Continuum* (Klein parle quelques lignes plus loin de la « *Mannigfaltigkeit der eindeutigen Functionen* »). Cette dimension n'est d'ailleurs déterminée que de manière générique, comme Klein le fait remarquer en renvoyant aux travaux de Roch. Notons toutefois que Klein explicite la nature *linéaire* de la première dépendance : lorsque les pôles sont données, la variété des fonctions univoque est un espace « linéaire », que sa dimension suffit à caractériser ; la non linéarité de la dépendance envers les m dernières constantes apparaît en creux mais nettement, sans que Klein cherche à aller plus loin dans l'étude des caractéristiques de cette multiplicité.

Ce premier dénombrement joue un rôle fondamental dans le §19, où Klein aborde la question des transformations birationnelles et des modules de classes de courbes algébriques considérées à transformations birationnelles près. Klein note provisoirement ρ le nombre tel que la surface (idéale) peut se transformer en elle-même de ∞^ρ manières : ici encore c'est la dimension d'une multiplicité fonctionnelle qui est considérée (la multiplicité des automorphismes, dirions-nous, de la surface). Il y a par ailleurs ∞^{2m-p+1} fonctions méromorphes sur cette surface ayant m points d'infinité, chacune faisant de la surface idéale une surface à m feuillets au-dessus du plan complexe :

La totalité des surfaces à m feuillets à laquelle une surface donnée peut être rapportée conformément et uniformément, et donc aussi des surfaces à m feuillets qu'on peut associer par une transformation univoque à une équation $f(w,z) = 0$, est $\infty^{2m-p+1-\rho}$ -uple.
[Klein 1882 65] ⁵¹

« Compter » les surfaces idéales réellement distinctes (i.e. de même structure conforme) associées aux surfaces à m feuillets de genre donné passe donc pour l'instant par un classique dénombrement de paramètres. Les modules sont définis comme les « invariants » des transformations rationnelles des équations $f(w,z)$ – à points de ramifications donnés – c'est donc le « nombre » des modules qu'on va compter : après avoir rappelé que les surfaces à m feuillets de genre p présentent une infinité ω -uple (où $\omega = 2m+2p+2$) de points de ramification, Klein peut écrire

Le nombre [*Anzahl*] des modules est donc $\omega - (2m+1-p-\rho) = 3p-3+\rho$. [Klein 1882 65] ⁵²

La démarche est ici parfaitement classique et Klein illustre ici essentiellement la clarification qu'apporte à l'exposé de la théorie sa distinction entre surface idéale et surface à plusieurs

⁵¹ „Daher ist die Gesamtheit der m -blättrigen Flächen, auf welche man eine gegebene Fläche conform eindeutig beziehen kann, und also auch der m -blättrigen Flächen, die man einer Gleichung $f(w,z)$ durch eindeutige Transformation zuordnen kann, $\infty^{2m-p+1-\rho}$ fach.“

⁵² „Die Anzahl der Moduln ist daher $\omega - (2m+1-p-\rho) = 3p-3+\rho$.“

feuillet au-dessus de plan. Il dépasse toutefois le pur dénombrement dans le paragraphe qui vient ensuite :

Remarquons à ce propos que la totalité des surfaces à m feuillet et à ω points de ramification forme un *continuum** [note infrapaginale de Klein renvoyant aux articles de Lüroth et Clebsch dans les volumes 4 et 6 des *Mathematische Annalen*], tout comme l'objet correspondant déjà mis en évidence au §13 à propos des fonctions univoques à m points d'infinité sur une surface donnée. Nous concluons donc, *que les équations algébriques de p donné constituent également une unique multiplicité connexe* [*eine einzige zusammenhängende Mannigfaltigkeit*] (dans laquelle toutes les équations obtenues par transformation les unes à partir des autres sont vues comme un unique individu [*Individuum*]). On obtient ainsi pour la première fois la signification précise du nombre des modules (donné plus haut) : *c'est le nombre des dimensions* [*dimensionen*] de cette multiplicité connexe. [Klein 1882 67]⁵³

Ce n'est pas dans l'étude des propriétés globales de cette multiplicité que Klein va se lancer ; il est toutefois déjà fondamental que les raisonnements classiques en termes de dénombrements soit relus comme des détermination de dimension de variétés. Cela ne contribue pas à clarifier tous les aspects – par exemple la nature linéaire des raisonnements en termes de degrés de liberté n'invite pas à distinguer le local de l'infinitésimal – mais indique du moins que d'autres aspects sont à considérer, au delà de ce nombre de dimensions. Pour ce qui est de la variété de modules, le travail de Klein ne porte ici *en fait* que sur la dimension : il va rappeler les résultats relatifs au nombre ρ – dimension de la variété des automorphismes d'une surface idéale – dans les trois cas $p = 0$, $p = 1$ et $p > 1$. Il revient toutefois en fin de paragraphe sur cette question des variétés :

Il sera bon d'ajouter encore les remarques suivantes. Pour déterminer un point d'un espace [*eines Raumes*] à $(3p-3)$ dimensions, $(3p-3)$ grandeurs [*Grössen*] ne suffisent en général pas : il faudra plus de grandeurs, entre lesquelles existent des relations algébriques (ou même transcendentes). Il peut aussi arriver que l'on introduise par

⁵³ „Bemerken wir hierzu, dass die Gesamtheit der m -blättrigen Flächen mit ω Verzweigungspunkten ein Continuum bildet *, wie das Entsprechende betreffs der auf gegebener Fläche existierenden eindeutigen Functionen mit m Unendlichkeitspunkten bereits in §13 hervorgehoben wurde. Wir schliessen dann, dass die algebraischen Gleichungen eines gegebenen p ebenfalls eine einzige zusammenhängende Mannigfaltigkeit constituieren (wobei wir alle Gleichungen, die aus einander durch eindeutige Transformationen hervorgehen, als ein Individuum erachten). Hierdurch erst gewinnt die angegebene Zahl der Moduln ihre präzise Bedeutung : sie ist die Zahl der Dimensionen dieser zusammenhängenden Mannigfaltigkeit.“

commodité des déterminations [*Bestimmungsstücke*] dont, à chaque fois, différentes séries déterminent le même point de la multiplicité. [Klein 1882 68]⁵⁴

C'est ici encore à la fois parfaitement clair et parfaitement allusif. Le deuxième cas est, en un sens, le plus délicat, puisqu'en termes de dénombrement de dimensions il n'apparaît pas de différence entre la variété des individus étudiés et celle des déterminations utilisées pour les repérer. Klein l'illustre en revenant sur les automorphismes de la surface idéale lorsque le genre est strictement supérieur à 1. Le fait que dans ce cas $\rho = 0$ avait été établi dans différents travaux de Schwarz (inspiré par Weierstrass) ou Hettner ; Klein donnait, lui, un argument heuristique, en exhibant une contradiction dans ce que devrait être l'allure du système de courbes continues obtenues sur la surface en considérant une éventuelle famille à 1 paramètre de telles transformations [Klein 1882 68]. Il signale toutefois en note qu'il est conscient qu'un tel raisonnement ne prouve pas qu'il n'existe pas une infinité de telles transformations, mais seulement que ces transformations ne forment pas des familles continues : une infinité discrète demeure possible [Klein 1882 67].

ii. Orientatibilité et revêtement.

Ce cas des familles discrètes de transformations nous amène à dépasser le cadre du cours de 1880/81 pour rappeler combien des notions globales comme celle de revêtement – par exemple d'orientation – parcourent l'œuvre de Klein ; le cheminement est toutefois assez circuitieux. Klein avait d'abord été conduit à y réfléchir dans le cadre de la géométrie projective. Les différentes méthodes de Riemann et Neumann de détermination de l'ordre de connexion d'une surface, bien qu'équivalentes en apparence, semblaient conduire à des résultats différents dans le cas des surfaces projectives. Un débat entre Klein et Schläfli avait d'abord porté sur la nature des points à l'infini et la manière de les ramener dans le fini ; en restant dans le plan, on utilise en théorie riemannienne un unique point à l'infini, alors que le plan projectif possède une droite à l'infini : comment comprendre cette différence ? Les points de vue sont-ils incompatibles ? Il est inutile de souligner que l'habitude, chez Klein, de

⁵⁴ „ Es wird gut sein, noch folgende Bemerkungen hinzufügen. Um den Punct eines Raumes von $(3p-3)$ Dimensionen zu bestimmen, wird man im Allgemeinen mit $(3p-3)$ Grössen nicht ausreichen : man wird mehr Grössen benöthigen, zwischen denen dann algebraische (oder auch transcendente) Relationen bestehen. Ausserdem mag es aber auch sein, dass man zweckmässigerweise Bestimmungsstücke einführt, von denen jedesmal verschiedene Serien denselben Punct der Mannigfaltigkeit bezeichnen.“

travailler systématiquement en coordonnées homogènes *complexes* ne contribuait pas à clarifier la situation. L'état initial de la réflexion de Klein montre aussi l'absence de considérations topologiques globales dans ses premiers travaux, jusqu'au Programme d'Erlangen inclus [Klein 1872] : on y travaille dans l'espace projectif, les « groupes » de transformations peuvent agir sur tout l'espace ou seulement sur une partie sans que cela soit mentionné ; l'emploi du terme « multiplicité » vient marquer qu'on ne travaille pas dans l'« espace » (dont les points sont repérés par quatre coordonnées homogènes complexes) mais sur des ensembles associés à l'espace lorsqu'on « change d'élément générateur », en considérant par exemple des multiplicités de droites ou de sphères orientées, ou encore d'éléments de contact : il y a *un* espace dont des aspects sont mis au jour par la théorie analytique des invariants de « groupes » agissant dans *des* multiplicités. En 1874, Klein reprend l'idée de Schläfli et montre comment faire que s'accordent le point de vue « riemannien » et le point de vue « projectif » en théorie des surfaces [Klein 1874]. Le cas le plus simple est celui du plan, que Klein propose de regarder comme une surface double (*Doppelfläche*), paraphrasons-le : considérez deux feuillets plans, coupez selon une droite infinie, recollez la lèvre inférieure d'un côté à la lèvre supérieure de l'autre et inversement ; la surface est le plan de la géométrie projective et non le plan au sens de Riemann (i.e. la sphère), on le voit en remarquant que la droite initiale ne le déconnecte pas ; il faut parcourir deux fois cette droite pour déconnecter le plan projectif ainsi construit. L'article *Remarques sur la connexion des surfaces*⁵⁵ cherche à généraliser ce procédé, en remplaçant la discussion sur la nature des points à l'infini par une distinction entre surfaces « simples » et surfaces « doubles » (qui seront bientôt décrites comme orientables et non orientables, respectivement) ; dans cette citation, la théorie « couramment présentée » est celle de Neumann :

J'ai trouvé comment l'on peut en fait transférer [*übertragen*] dans les conceptions projectives la théorie de la connexion des surfaces telle qu'elle est couramment présentée ; il faut seulement décider de considérer les surfaces impaires de la géométrie projective comme des surfaces doubles, et l'on ne doit alors regarder une courbe impaire comme fermée que si on la parcourt deux fois. [Klein 1874 551].⁵⁶

⁵⁵ *Bemerkungen über die Zusammenhang der Flächen* [Klein 1874].

⁵⁶ „Ich habe nun gefunden, dass man die Theorie des Flächenzusammenhangs, wie sie gewöhnlich entwickelt wird, in der That auf die projectivischen Vorstellungen unverändert übertragen kann, wenn man sich überhaupt entschliesst, die unpaaren Flächen der projectivischen Geometrie als Doppelflächen zu betrachten, und eine paare Curve erst dann als geschlossen anzusehen, wenn man sie zweimal durchlaufen hat.“

Cette phase initiale de l'article, tirant un principe d'étude général à partir du cas du plan, est rédigé dans un style encore assez vague ; on ne travaille pas encore dans différents espaces, mais dans un espace dans lequel on fait jouer plusieurs points de vue formulés en termes de multiplicité. Klein va toutefois plus loin et reformule au moyen de *deux espaces tridimensionnels* : celui muni d'un point à l'infini (et généralisant la sphère de Riemann) et celui muni d'un plan à l'infini (l'espace projectif). Ces deux espaces sont naturellement liés par une correspondance 1-2 (*einzweideutig*). Avant de la décrire analytiquement, Klein donne de cette corrélation une image intuitive en se ramenant au cas bidimensionnel : une projection stéréographique corrèle le plan à une sphère – de manière 1-1 nous dit Klein –, puis une projection centrale corrèle la sphère au plan de sorte que ce dernier est recouvert deux fois, un grand cercle sur la sphère donnant la droite à l'infini [Klein 1874 553] ; à une courbe impaire du premier plan, vue comme une courbe double, correspond une courbe simple dans le second plan. Après avoir donné l'expression analytique de cette correspondance dans le cas tridimensionnel, Klein énonce son principe général : pour calculer l'ordre de connexion d'une surface projective, il faut (lorsqu'elle est impaire) appliquer les méthodes usuelles non pas à la surface elle-même mais à celle obtenue par le procédé précédent dans l'espace ayant un unique point à l'infini. On voit qu'en dépit de la conception claire d'un lien entre deux espaces, les formulations de Klein restent assez vagues, mêlant une topologie rhétorique qui utilise de manière ambiguë des termes issus d'une géométrie implicitement projective, et des calculs utilisant parfois des coordonnées locales [Klein 1874 553], toujours des coordonnées complexes. Si Klein revient l'année d'après sur les mêmes questions, dans *Sur la connexion des surfaces*⁵⁷, c'est non seulement pour clarifier les notions mais aussi pour corriger des erreurs et contradictions, par exemple dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe. La clarification porte essentiellement sur les notions de courbes et surfaces impaires. Klein note maintenant R_1 l'espace projectif (décrit comme l'espace ayant un plan à l'infini) et R_2 l'espace n'ayant qu'un point à l'infini – on voit qu'il ne parle pas encore, en 1875, de lien entre l'analogue tridimensionnel de la sphère ($R_2 = S^3$) et l'espace projectif ($R_1 = P^3$), ni de symétrie antipodique. Lorsqu'un point p_1 parcourt une courbe sur R_1 , le point correspondant p_2 parcourt une courbe sur R_2 ; une courbe *fermée* de R_1 est dite paire ou impaire selon que la courbe correspondante sur R_2 est fermée ou ouverte. Si la surface initiale contient une courbe impaire, alors il lui correspond dans R_2 une unique surface à laquelle elle est corrélée 1-2 ; dans le cas contraire, elle est corrélée 1-1 à *deux* surfaces de R_2 . C'est en ce sens – nous dit Klein – qu'il faut entendre les notions de parité et d'imparité, de courbe et

⁵⁷ *Über den Zusammenhang von Flächen* [Klein 1875].

surface simple ou double employées dans l'article précédent. La fin de l'article est consacrée à l'orientation : Klein fait remarquer que la notion de surface double est usuellement définie en considérant les normales sortantes. Cette notion semble donc dépendre de l'espace ambiant, contrairement aux autres notions utilisées en *Analysis situs* : bord, courbe fermée, coupure, déconnexion, nombre de morceaux etc. Après avoir introduit la distinction entre propriétés *absolues* (qu'une multiplicité possède indépendamment de l'espace ambiant (*unabhängig von dem umfassenden Raum*) [Klein 1875 478]) et propriétés *relatives* (dépendant de l'espace ambiant), il explique que le caractère simple ou double est absolu, quoi que puisse donner à croire la définition initiale par les normales sortantes ; il utilise alors la notion de transport d'une *indicatrice* (petite courbe fermée orientée dans un élément de surface) le long d'une courbe fermée. Cet aspect était, en un sens, déjà présent dans le texte de Möbius, la pathologie de la bande de Möbius étant alors présentée non seulement en termes de plongement avec auto-intersection de la surface fermée associée, mais aussi en termes de coloriage⁵⁸ [Möbius 1865 485] ; la distinction entre propriété absolue et relative n'était toutefois pas explicitée.

On voit que ces éléments permettent de faire évoluer le point de vue sur la géométrie : après une phase initiale dans laquelle l'attention porte exclusivement sur le groupe agissant sur des systèmes de coordonnées « repérant » des êtres géométriques de l'espace projectif, l'espace lui-même entre en jeu ; d'abord par la nature de ses points à l'infini, puis par son orientabilité. La notion de partie comptée avec multiplicité et la perception extrinsèque de l'orientabilité sont remplacées par des notions plus ensemblistes et intrinsèques, reposant sur une corrélation 1-2 entre espace projectif et sphère S^3 . Toutefois, si la nature intrinsèque des notions est explicitée c'est parce que le cadre est extrinsèque : l'espace projectif et la sphère tridimensionnelle sont premiers et ambiants. Si la notion intrinsèque d'orientation peut être adaptée aux variétés de toutes dimensions, il n'y a pas d'idée de construction d'une multiplicité à deux feuillets naturellement associée à toute variété. Si le terme de surface unilatère n'est pas utilisé – intrinséquerité oblige –, Klein restera fidèle à celui de surface double. Les éléments mis en place en 1875 sont ceux que l'on retrouve en 1882, à ceci près que – le cadre étant celui des surfaces de Riemann – il n'y a plus d'espace ambiant. Rappelons que Klein commençait la troisième partie de l'exposé en indiquant comment la dimension ρ de la « multiplicité » des transformations de la surface dans elle-même (i.e. des automorphismes pour la structure conforme) intervenait dans la détermination de la dimension

⁵⁸ A.F. Möbius *Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders*, Königl. Sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften, 1865, Bd. 17, p.31-68 = GA 2 1885-1887p.473-512

de la variété des modules. Dans le cas où $\rho = 0$, pour les genres $p > 1$ donc, Klein innove en introduisant, à côté des transformations conformes, les transformations renversant les angles (*mit Umlegung der Winkel* [Klein 1882 70]). Il se limite au cas des *symétries*, où une telle transformation répétée deux fois donne l'identité. L'étude qualitative des surfaces admettant des symétries fait alors apparaître deux notions : celle de courbe de transition (*Überganscurve*), généralisant les axes de symétries usuels, et la distinction entre surfaces symétriques de première espèce (déconnectées par découpage selon la totalité des courbes de transition) et de seconde espèce [Klein 1882 74]. Klein introduit ensuite des surfaces qui n'étaient pas jusque là apparues dans son cours sur la théorie de Riemann, les surfaces à bord et les surfaces doubles. Ne disposant plus du lien entre des espaces ambiants tels P^3 et S^3 , il explique en quelques mots comment associer à toute surface (à bord) une autre recouvrant deux fois la première. Il esquive le passage par le local en choisissant un changement de mode de représentation des surfaces : jusqu'ici – nous dit Klein – nous ne travaillions qu'avec des surfaces continûment courbées, mais la théorie des courants électriques sur une surface a tout autant de sens sur une surface formée de morceaux continûment courbés et se raccordant selon différents angles le long d'arêtes ; c'est sur cette notion de polyèdre curviligne que Klein fonde sa description de la notion de surface double :

Qu'on interprète en effet les deux côtés de la surface à bord comme des surfaces polyédriques assemblées [*zusammenstossen*] le long du bord (donc, tout du long, selon un angle de 360°) et considérons maintenant, au lieu de la surface à bord de départ, la surface totale (*Gesamtfläche*) formée à partir des deux côtés. Cette surface totale est alors en fait une surface fermée. Elle est de plus *symétrique*. [Klein 1882 79]⁵⁹

Le bord de la surface primitive devient courbe de transition pour la nouvelle surface symétrique. On obtient ainsi la véritable compréhension – nous dit Klein – de la distinction entre surfaces symétriques de première et de seconde espèce : les surfaces à bord ordinaires – au sens où les deux côtés sont distinguables – donnent des surfaces totales symétriques de première espèce, les surfaces doubles (*Doppelflächen*) donnent des surfaces totales symétriques de seconde espèce. On voit que la description de Klein esquive tout passage du local au global dans sa construction en s'appuyant de manière essentielle sur la notion de bord. Il ajoute toutefois en fin de paragraphe qu'il n'exclut pas le cas d'une surface double sans bord, dont la surface totale serait symétrique mais sans courbe de transition : il ne

⁵⁹ „Man fasse nämlich die beiden Seiten der berandeten Fläche als Polyederflächen auf, welche längs der Randcurve (also durchweg unter einem Winkel von 360 Grad) zusammenstossen und behandle nunmehr statt

l'exclut pas, mais ne se donne pas pour l'instant les moyens de la décrire. La notion de symétrie lui sert essentiellement comme un nouvel élément dans la classification des surfaces (§22), et lui permet de montrer que la démarche « riemannienne » – qualitative, reposant sur la surface idéale – permet aussi d'éclairer la théorie des courbes algébriques dans le domaine *réel* (§21).

iii. Le *Raumproblem*.

Après la question des surfaces en géométrie projective et l'extension de la théorie riemannienne des fonctions algébriques par l'introduction des surfaces « symétriques », on retrouve la même famille d'éléments globaux dans l'article de 1890 *Sur la géométrie non-euclidienne*⁶⁰ ; nous évoquons aussi cet article pour l'écho qu'il trouvera dans les premiers travaux de Hopf (1925-1930) et l'émergence *explicite* du couple local/global en géométrie différentielle.

Cet article est composite et aborde plusieurs aspects dont nous ne parlerons pas, par exemple le fondement synthétique de la géométrie analytique ou la question des axiomes de la géométrie. Il est moins consacré à la démonstration d'un résultat qu'à un panorama des questions liées aux géométries, panorama largement consacré à la motivation et la recherche d'une formulation précise d'une série de problèmes. L'interrogation initiale naît de la rencontre d'un exemple imprévu. Nous pensions, nous dit Klein, qu'une surface de courbure constamment nulle devait s'étendre à l'infini, comme le plan dans l'espace euclidien ; or Clifford a mis au jour un cas bien différent : utilisant sa notion de « droites » parallèles de l'espace elliptique (tridimensionnel), il considère la surface « réglée » formée des droites parallèles entre elles rencontrant une droite donnée ; il obtient une surface de courbure constamment nulle et dont, pourtant, la surface totale est finie. Après avoir refait les calculs en coordonnées complexes plutôt que quaternioniques, Klein fait remarquer que la surface de Clifford a la topologie d'un tore – ce que Clifford avait déjà souligné en rapprochant sa surface de celle obtenue en identifiant les côtés opposés dans un parallélogramme. Ce cas du tore plat avait jusque là échappé à tous les exposés de géométrie non-euclidienne, y compris ceux de Klein ; face à cet objet inédit, il souligne qu'on a pas, dans ce champ de recherche,

der ursprünglichen berandeten Fläche die aus beiden Seiten zusammengesetzte Gesamtläche. Diese Gesamtläche ist dann in der That eine geschlossene Fläche. Sie ist aber überdiess eine symetrische Fläche.“

⁶⁰ *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie* [Klein 1890].

prêté une attention suffisante aux propriétés de connexion des variétés, et il formule la question générale :

Un problème général se présente donc maintenant (...) : *déterminer tous les types de connexion qui se présentent dans les variétés fermées de courbure constante quelconque.* [Klein 1890 554]⁶¹

Klein commence par illustrer la question en discutant assez longuement le cas bidimensionnel à courbure strictement positive, et il cherche à exposer de manière pédagogique ce qui distingue la sphère du plan projectif – pour lequel il utilise son modèle de faisceau des droites issues d'un point donné. Les descriptions de 1875 sur le plan elliptique comme plan *double* sont reprises à l'identique. L'exposé est un peu obscur sur certains points, en particulier lorsqu'il critique vivement le modèle de Betti du plan elliptique, dans lequel sont considérés les couples de points antipodaux sur la sphère usuelle : le partage n'est pas très clair, dans le texte de Klein, entre la critique d'un modèle qu'on peut considérer moins pratique bien qu'équivalent, et la dénonciation d'une erreur de raisonnement. Klein rapporte ensuite un résultat de Killing de 1880 selon lequel il n'existe que deux formes d'espace (*Raumformen*) elliptiques à deux dimensions, l'espace sphérique et l'espace elliptique [Killing 1880]. Le principal souci de Klein est alors d'expliquer pourquoi Clifford et lui sont passés à côté de ce résultat sans le voir ; la cause en est, nous dit Klein, qu'ils travaillaient de manière analytique en utilisant d'emblée des coordonnées complexes et en autorisant des points de ramification (qui se trouvent être à coordonnées non-réelles) : le résultat de Killing est donc un résultat de classification des formes réelles et non-singulières [Klein 1890 557].

Après la formulation de la question générale et ce premier petit panorama, Klein introduit un élément important pour notre histoire. Dans son étude du cas euclidien, Killing est lui aussi passé à côté du tore plat de Clifford. Si l'on analyse ce dernier cas avec les outils utilisés par Killing, tels que la dimension des variétés de mouvements, on voit que le tore plat n'admet qu'une double infinité de mouvements alors que Killing en postulait une triple. Pour inclure la surface de Clifford, Klein part de la remarque suivante (toujours dans le cas bidimensionnel) :

Si une telle variété a, comme nous le supposons, une courbure constante et ne présente pas de bord, alors toute partie simplement connexe et simplement bordée de cette variété peut être déplacée sur elle selon une triple infinité de manières (sans se heurter à un blocage). *Mais il n'est nullement nécessaire* (ce qui était le cas pour les formes

⁶¹ „So sehen wir denn jetzt ein allgemeines Problem vor Augen (...) : alle Zusammenhangsarten anzugeben, welche bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten irgendwelchen constanten Krümmungsmasses überhaupt auftreten können.“

d'espace de Killing) *que la variété dans son ensemble [die Mannigfaltigkeit als Ganzes] puisse être déplacée sur elle-même selon une triple infinité de manières.* [Klein 1890 559]⁶²

On voit que cette analyse des postulats de Killing conduit à une explicitation inédite. En effet, si la nature topologique globale (l'ordre de connexion) des espaces était à l'origine même du questionnement, le couple local/global n'intervenait pas dans la compréhension de la question. Se faisaient face des aspects infinitésimaux – ainsi la dimension de la multiplicité des déplacements – et des aspects implicitement globaux – ainsi des postulats sur le système des déplacements formulés au moyen des notions de droites et de cercles [Killing 1880 267]. Klein met ici en avant la nature *locale* de l'homogénéité des surfaces à courbure constante. Sa formulation utilise d'ailleurs le langage hérité de la topologie riemannienne, la « partie simplement connexe » étant moins le voisinage désigné par des théorèmes d'Analyse faisant le lien entre propriétés infinitésimales et propriétés locales que le morceau « simple », celui qui dont il n'y a rien à dire. Cette remarque ne conduit pas non plus Klein à s'interroger sur la tension entre présentations axiomatiques – dérivées du modèle euclidien – et problèmes relevant de la géométrie différentielle.

C'est aussi la topologie *à la* Riemann qui semble fournir les outils pour apporter une réponse à la question générale formulée au début de l'article. Repartant de la surface de Clifford, Klein explique qu'en la découpant jusqu'à la rendre simplement connexe on en fait un polygone plan, dont les arêtes conjuguées sont associées par un déplacement euclidien. Il donne à cet occasion l'exemple d'un espace « double » de courbure partout nulle [Klein 1890 562]. Du cas du tore et du tore unilatère (la bouteille de Klein), il tire l'idée générale d'étude des formes spatiales bidimensionnelles : étudier les cas bilatères au moyen des pavages du plan euclidien, du plan hyperbolique (pour lesquels il renvoie aux travaux de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes) ou de la sphère ; ramener les cas unilatères aux cas bilatères en les « doublant ». Ces principes étant acquis, l'étude des cas tridimensionnels ouvre un chantier encore quasiment neuf [Klein 1890 564]. On voit que si l'homogénéité locale a pu un instant être explicitée, le passage au revêtement universel n'est pas décrit en termes d'équivalence locale ; la construction par découpage et dépliement va du global au global et aucune notion générale de revêtement n'est introduite.

⁶² „Hat eine solche Mannigfaltigkeit, wie wir voraussetzen, constante Krümmung und ist sie zugleich unbegrenzt, so kann jeder einfach berandete, einfach zusammenhängende Theil derselben auf ihr auf dreifach unendlich viele Weisen verschoben werden (ohne je an eine Hemmung zu stossen). Aber darum ist keineswegs nöthig (was bei den Killing'schen Raumformen zutrifft), dass sich die Mannigfaltigkeit als Ganzes auf dreifach unendlich viele Weisen in sich verschieben lässt.“

On doit signaler que dans ses *Conférences sur les mathématiques*, faites à Chicago en 1893, Klein donne une autre formulation du *Raumproblem*, dans des termes faisant explicitement jouer le passage du local au global. La 11^{ème} conférence est consacrée aux *Recherches les plus récentes sur la géométrie non-euclidienne*, Klein y reprend l'exemple du tore plat :

J'arrive à ce résultat que nos idées relatives à l'espace euclidien sont encore très incomplètes. En effet, dans toutes leurs recherches, Riemann, Helmholtz, Lie envisagent seulement une portion de l'espace entourant l'origine ; ils établissent l'existence de lois analytiques dans le voisinage de ce point. Or cet espace peut évidemment être prolongé et il s'agit alors de reconnaître quelle est la *connexion* de l'espace qui résulte par l'effet de ce prolongement. [Klein 1893 89]

La question sera reprise exactement dans ces termes par Hopf ou Cartan dans les années 1925-1930 : mais ce qui n'est chez Klein qu'une variante parmi les formulations possibles – et une variante qui n'est pas associée à un mode d'étude par passage du local au global – sera alors une formulation à la fois générale, systématique, et associée à une série de notions telles l'homogénéité locale, le prolongement des isométries le long de chemins, le passage au revêtement universel et, chez Hopf, la notion de surface complète.

4. Conclusion.

Si l'on cherche à dégager une vue d'ensemble, il est indéniable que ces travaux de Klein contribuent à souligner le rôle des propriétés topologiques globales soit dans des questions où elles n'étaient pas directement prises en compte – ainsi pour l'étude de l'espace projectif (points à l'infini, orientabilité) et le *Raumproblem* –, soit en cherchant à renouveler la démarche riemannienne – ainsi en faisant jouer à la surface idéale un rôle premier par rapport à la surface « au-dessus » du plan. Par ailleurs, des aspects locaux sont de temps à autres soulignés : ainsi la structure analytique sur la surface idéale passe-t-elle par des coordonnées locales (contrairement à la carte globale donnée avec la surface « au-dessus ») ; ainsi les variétés à courbure constante peuvent-elles n'être que localement homogènes. Cependant, les thèmes du qualitatif et du rôle de l'*Analysis situs* ne mettent pas au premier plan le couple local/global, et l'on peut en rendre en partie compte en regardant les outils manipulés par Klein ; on y trouve deux familles : d'une part des outils *analytiques*, largement issus de l'étude des variétés algébriques projectives complexes – la notion de groupe se greffe initialement sur ce tronc ; d'autre part une topologie rhétorique héritée de Riemann. Entre les deux familles, la liaison est difficile à faire : en 1882, elle contraint Klein à rester au niveau

heuristique ; à partir des *Nouvelles contributions à la théorie riemannienne des fonctions*⁶³ (1883), le lien entre les deux familles d'outils est trouvé dans la technique du dépliement, l'étude des groupes infinis discrets et des fonctions automorphes associées. Les liens entre les outils analytiques et les raisonnements qualitatifs ne s'appuient pas sur des énoncés précis de théorèmes locaux – et distinguant clairement l'infinitésimal du local – comme ceux que l'on trouve au même moment chez Weierstrass et ses élèves. Le patient – et parfaitement pre-weierstrassien dans son mode d'écriture de l'Analyse – travail d'articulation des *lieux* et des *formules* mené par Neumann n'a pas d'équivalent chez Klein.

Dans ces cours et exposés de recherche, le couple local/global n'intervient ni au niveau *méta* ni comme thème. Il intervient ponctuellement comme thème dans des textes plus généraux que Klein consacre à l'état des mathématiques, à leur histoire ou à leurs développements futurs. On peut prendre l'exemple des conférences de 1893, évoquées plus haut. Si l'on a vu Klein souligner, ponctuellement mais clairement, la nature locale de grandes familles de travaux géométriques – tels ceux de Riemann ou Lie –, le couple local/global n'apparaît pas sous la plume de Klein lorsqu'il s'agit de parler de *la véritable forme des courbes et surfaces algébriques* (conférence 4) ou de *La théorie des fonctions et la géométrie* (conférence 5). Dans ces conférences, le seul autre endroit dans lequel ce couple intervient est l'introduction aux travaux de Lie :

La distinction entre les fonctions analytiques et les fonctions algébriques, si importante en Analyse pure, se présente encore dans les études géométriques.

Les fonctions *analytiques* sont celles que l'on peut représenter par des séries de puissances qui convergent dans une certaine région ayant pour contour la circonférence du cercle dit *de convergence*. En dehors de cette région, la fonction analytique n'est pas regardée comme donnée *a priori* ; son prolongement dans des régions plus étendues est un sujet de recherches spéciales et peut conduire à des résultats tout différents, selon le cas particulier envisagé.

D'autre part, une fonction *algébrique* $\omega = \text{Alg.}(z)$ est supposée connue dans tout le plan de la variable complexe et possède un nombre fini de valeurs pour chaque valeur de z .

De même en Géométrie, nous pouvons porter toute notre attention sur une portion limitée de courbe analytique ou de surface, par exemple, en nous occupant de la

⁶³ *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie* [Klein 1883].

construction de la tangente, de l'évaluation de la courbure, etc. ; ou bien nous pouvons envisager l'étendue totale des courbes et des surfaces algébriques de l'espace.

Presque toutes les applications du Calcul différentiel et intégral à la Géométrie appartiennent à la première de ces branches et, comme c'est principalement là ce qui m'occupera aujourd'hui, il n'est pas besoin de nous limiter strictement aux fonctions algébriques, mais nous pourrions considérer des fonctions analytiques plus générales ; toujours, bien entendu, en nous limitant à des portions finies de l'espace. [Klein 1893 18]

On voit qu'en dépit d'un souci d'explicitation du caractère local de certaines études, le couple fondamental est analytique/algébrique et non local/global ; il n'est toutefois pas inintéressant de voir Klein désigner quelque chose comme local/global en parlant de l'analogue « dans les études géométriques » du couple analytique/algébrique de l'«Analyse pure ». De manière bien classique, l'évocation du local est liée à la notion de disque de convergence ; on est au plus loin d'un point de vue de légalité du lieu, puisqu'on part – dans le cas analytique – d'un élément de fonction dont le domaine est indéterminé et dont l'étude sera décrite, on l'imagine, en termes de *Gesamtverlauf*, de cours d'ensemble. On verra que la distinction ici proposée par Klein entre l'approche locale des courbes et surfaces par des outils différentiels d'une part, la théorie algébrique des courbes et surfaces algébriques d'autre part, sera reprise par Fano et Cartan pour décrire la théorie de Lie [Fano 1907] ; elle représente une structuration de l'édifice théorique *antérieure* à l'émergence du couple local/global.

Chapitre 3. Poincaré.

I. Le dépassement du local : une constante chez Poincaré.

1. L'expression du local.

Dès le début de sa carrière, Poincaré explicite le caractère local de certains résultats, s'inscrivant dans une tradition d'étude des équations différentielles et aux dérivées partielles au voisinage de points ordinaires et singuliers. Ainsi dans la *Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles* [Poincaré1878] se propose-t-il dans ces termes l'étude des solutions non holomorphes en certains points singuliers :

Dans quels cas une fonction y , définie par une équation différentielle de la forme

$$x \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où f est une fonction holomorphe de x et de y dans les environs de $x = 0, y = 0$, peut-elle se représenter dans les environs de $x = 0$ par une série à double entrée convergente, suivant les puissances croissantes de x et de x^λ , où λ est un nombre quelconque réel ou imaginaire ? [Poincaré 1878 XXXVII]¹

La restriction aux « environs » est bien sûr liée au problème de la convergence d'un certain type de séries : l'étude détaillée de conditions suffisantes de convergence conduit à la description de la « région de convergence » [Poincaré 1878 XLIII]. Ce caractère explicitement local du travail est formulé dans la *Thèse* [Poincaré 1879] en des termes légèrement différents, en utilisant la notion d'élément de fonction. Ainsi, rappelant en introduction les premiers résultats dus à Cauchy :

Cauchy aborde ce nouveau problème [la démonstration rigoureuse de l'existence des intégrales], et, dans le tome XIV des *Comptes rendus des séances à l'Académie des Sciences* (p.1020-1023), il imagine pour le résoudre un nouveau mode de calcul qu'il appelle *calcul des limites*, et il démontre que les équations différentielles ordinaires admettent une intégrale ; il définit complètement cette intégrale, ou plutôt un élément de cette intégrale, en montrant qu'elle peut se représenter en général par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable et convergente dans de certaines limites. C'est donc une intégration complète, mais qui ne nous fait pas

¹ Sauf mention du contraire, nous utilisons la pagination des *Œuvres* [Poincaré 1951].

connaître la valeur que prend la fonction cherchée quand on donne à cette variable une valeur quelconque, mais seulement quand le module de cette variable reste plus petit qu'une quantité donnée. [Poincaré 1879 L]

Le travail de thèse s'ouvre d'ailleurs sur le rappel d'une forme holomorphe de théorème des fonctions implicites, repris de Briot et Bouquet, et sur son extension par Poincaré au moyen de la notion de fonction algébroïde ; le caractère local du travail, dans les théorèmes utilisés ou les notions introduites, est constamment rappelé par la mention des questions de convergence aux environs d'un système de valeurs donné. Poincaré signale ensuite que l'étude qu'il entreprend de certaines équations aux dérivées partielles n'est *que* locale :

Nous nous bornerons, comme l'a fait Cauchy, à étudier un élément de la fonction z , c'est-à-dire la série des valeurs que prend cette fonction quand on donne à x_1, x_2, \dots, x_n des séries de valeurs telles que, si

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

sont des constantes imaginaires données,

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

des constantes réelles et positives, les modules de $x_1 - \alpha_1, x_2 - \alpha_2, \dots, x_n - \alpha_n$ restent plus petits respectivement que $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. [Poincaré 1879 LXV]

Il ajoute quelques lignes plus loin :

Il pourrait arriver qu'on soit obligé d'étudier un élément de fonction plus restreint encore, comme on a vu que cela devait avoir lieu, par exemple, dans les cas où s'applique le Lemme V. [Poincaré 1879 LXVI]

Cette identification explicite du travail local se retrouve tout au long de sa carrière, nous en aurons de nombreux exemples dans ce qui suit. Quelques éléments pour achever d'établir ce point et montrer, par exemple, que la notion de travail « aux environs » ou « au voisinage » est certes préférentiellement mais non systématiquement liée à la notion de point singulier ou aux problèmes de convergence de séries. Ainsi les fonctions méromorphes, ici de deux variables, sont caractérisées comme suit dans *Sur les fonctions de deux variables* (1883) :

Je considère une fonction de deux variables $F(X, Y)$ et je suppose que dans le voisinage d'un point quelconque X_0, Y_0 , on puisse la mettre sous la forme $\frac{N}{D}$, N et D étant des séries ordonnées suivant les puissances de $X - X_0$ et $Y - Y_0$, et convergentes lorsque les modules de $X - X_0$ et $Y - Y_0$ sont suffisamment petits. [OC4 p.147]

Si la question de la convergence est encore un élément du contexte, il ne s'agit plus du voisinage d'un point singulier mais du voisinage de tout point. La notion d'étude au voisinage

d'un point se présente aussi en dehors de tout problème de convergence, ainsi lorsqu'il s'agit de mener une étude locale en un point d'une variété dans *Sur les propriétés du potentiel et sur les fonctions abéliennes* [Poincaré 1898] :

Je me propose d'étendre les résultats précédents au cas d'une variété attirante à $n-2$ dimensions dans l'espace à n dimensions, la loi d'attraction étant en raison inverse de la puissance $n-1$ des distances. Soit v la variété attirante, O un point de cette variété dans le voisinage duquel nous voulons étudier le potentiel. Nous supposons que ce n'est pas un point singulier et nous le prendrons pour origine. Les équations de la variété prendront alors la forme suivante :

$$x'_k = \varphi_k(t_1, t_2, \dots, t_{n-2}) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

les φ_k étant holomorphes et s'annulant avec les t . [Poincaré 1898 199]

Certes l'étude est celle d'un point singulier pour la fonction potentiel, mais la possibilité de représentation paramétrique d'un voisinage d'un point géométriquement non singulier d'une sous-variété en est indépendante.

Ce mode de description local, non plus du comportement ou de la représentation d'une fonction au voisinage d'un point, mais d'un objet géométrique du type « variété » est déjà présente en 1887 dans *Sur les résidus des intégrales doubles*, lorsqu'il s'agit de définir les surfaces d'intégration dans l'espace à quatre dimensions (réelles). Poincaré y opte pour une représentation paramétrique du type graphe : les quatre coordonnées réelles x, y, z, t sont liées sur la variétés par $t = \varphi(x, y, z)$; toute surface d'intégration « peut être décomposée en plusieurs autres (...) admettant ce mode de représentation » [Poincaré 1887]. On retrouve le caractère partiel des représentations paramétriques dans le texte de synthèse que constitue, sur la notion de variété, l'*Analysis situs* de 1895 [Poincaré 1895]. Après avoir donné au paragraphe 1 la définition des variétés (i.e. sous-variétés de \mathbf{R}^n) par des systèmes d'équations et d'inéquations, définition implicite donc, il introduit au paragraphe 3 :

Considérons n équations

$$\begin{cases} x_1 = \theta_1(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ x_2 = \theta_2(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \dots \\ x_n = \theta_n(y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$$

Il est clair que ces équations (si les y sont regardées comme des variables indépendantes), représentent une variété à m dimensions. [Poincaré 1895 200]

Après avoir autorisé la limitation de la variabilité des y_i à un domaine restreint et demandé qu'en tout point le déterminant jacobien de m des fonctions θ_j ne s'annule pas, Poincaré

autorise les changements de paramètres. Cette notion élémentaire de variété paramétrée est étendue grâce à la notion de chaîne de variétés :

La portée de cette nouvelle définition serait assez restreinte, si l'on ne pouvait l'augmenter par le procédé de la *continuation analytique*.

Considérons, par exemple, les équations

$$(8) \quad x_i = \theta_i(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

pour V , et les équations

$$(8 \text{ bis}) \quad x_i = \theta'_i(y'_1, y'_2, \dots, y'_m)$$

pour V' .

Il peut arriver que ces deux variétés aient une partie commune V'' ayant également m dimensions, c'est-à-dire que tous les points de V'' appartiennent à la fois à V et à V' . Dans ce cas, à l'intérieur de V'' , les y seront des fonctions analytiques des y' et inversement.

On dira alors que les deux variétés V et V' sont la *continuation analytique* l'une de l'autre. [Poincaré 1895 200]

La notion de chaîne continue de variétés conduit à celle de réseau continu puis à une extension de la notion même de variété :

On peut avoir aussi un réseau de variétés, c'est-à-dire un ensemble de variétés telles que chacune d'entre elles soit la continuation de plusieurs autres et qu'on puisse passer d'une quelconque d'entre elles à une autre quelconque d'entre elles par une continuation analytique ; c'est ce que j'appellerai un *réseau continu*.

On pourra alors considérer l'ensemble de toutes les variétés d'une même chaîne ou d'une même variété comme formant une variété unique. [Poincaré 1895 201]

Le théorème des fonctions implicites permet ensuite de montrer que cette définition englobe celle du paragraphe 1. L'étude des variétés non orientables – « unilatères » chez Poincaré – montre au paragraphe 8 que cette définition par réseau continu de variétés paramétrées englobe strictement la première. Les variétés étant des sous-variétés de \mathbf{R}^n la notion de fonction sur une variété ne semble pas nécessiter de définition. La notion d'intégrale d'une fonction sur une variété appelle toutefois quelques explicitations ; tout d'abord si la variété peut être paramétrée en une seule fois

On sait alors ce que l'on doit entendre par l'intégrale multiple d'ordre m

$$\int F dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

étendue à la variété V ; je désigne, bien entendu, par F , une fonction donnée des y .
[Poincaré 1895 209]

Le paramétrage permet de définir ensuite la notion d'intégrale étendue à V d'une expression du type $\sum X_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_m}$, ce que nous appellerions une m -forme différentielle de \mathbf{R}^n . Lorsqu'un unique paramétrage ne suffit pas :

Si maintenant la variété V n'était pas susceptible d'être représentée par des relations de la forme (8),(9) et (10) satisfaisant à toutes les conditions énoncées, on décomposerait la variété V en variétés partielles assez petites pour être susceptibles de ce mode de représentation et l'intégrale (11), étendue à la variété totale V , serait par définition la somme des intégrales (11) étendue aux diverses variétés partielles.
[Poincaré 1895 209]

Cette définition présente deux ambiguïtés principales : il se pose premièrement un problème d'orientation, auquel Poincaré consacre le paragraphe 8, dans lequel il montre en particulier que toute variété définie implicitement est orientable (unilatère) ; il se pose ensuite un problème dans les zones de chevauchement des zones paramétrées : pour ne pas compter plusieurs fois ces zones il faudrait sans doute, comme le fait Neumann, introduire un découpage subordonné au recouvrement, mais Poincaré ne dit rien sur ce point. Il nous importe pour l'instant d'établir que le caractère partiel des représentations paramétriques est parfaitement explicite, aussi bien dans la comparaison des différentes définitions des variétés que dans la mise en place d'éléments de calcul intégral sur les variétés. Le cadre gaussien est ainsi dépassé par la considération du caractère partiel des paramétrages, la nécessité de considérer le système de paramétrages et les effets de changements de paramétrages non seulement dans une zone mais là où deux zones se chevauchent. Quelques remarques toutefois sur le vocabulaire. Notons tout d'abord qu'aucun terme *méta* tel « local » ne vient qualifier cet aspect ; Poincaré ne souligne pas que l'orientabilité est une propriété localement triviale et constitue donc une propriété pertinente à un autre niveau, niveau global ou d'ensemble. Notons ensuite que les termes de « voisinage » ou d'« environs » qui venaient naturellement sous la plume pour décrire le comportement local d'une fonction (au voisinage d'un point) n'apparaissent plus ; on rencontre ici des variétés ayant des « parties communes » et des décompositions de variétés en « variétés partielles ». Les mêmes théorèmes locaux, par exemple le théorèmes de fonctions implicites, qui appelaient alors le terme de « voisinage », appellent ici le terme de « domaine » [Poincaré 1895 202]. Aux « éléments de fonction » répondent les « variétés partielles ». C'est peut-être là le signe de la non-unification de ce que

nous regroupons sous le terme de local, de la répartition en deux univers présentant des analogies sans que cela ne les rabatte entièrement l'un sur l'autre ni ne les regroupe comme deux variantes du « local » : d'un côté des éléments de fonction, un point d'ancrage (voisinage d'*un point*) et une certaine indétermination de l'étendue (on travaille *au voisinage*, sans que le domaine soit nécessairement à déterminer c'est-à-dire à fixer) ; de l'autre des variétés partielles, des domaines qui ne sont pas associés chacun à un de ses points, des domaines dont l'étendue doit être à un moment fixée (par des systèmes d'inéquations). Nous parlerons dans la suite de référent de type « voisinage » et de référent de type « domaine ».

La thèse selon laquelle le caractère local des résultats ou de modes de représentation est systématiquement signalé par Poincaré, sans toutefois que cette expression soit uniforme, pourrait être mise en défaut par une série de passages où l'auteur semble dire que toute fonction harmonique est partie réelle d'une fonction holomorphe. Ainsi dans *Sur les fonctions de deux variables* [Poincaré 1883b], après avoir rappelé, pour les fonctions complexes d'une variable complexe, l'implication non problématique :

On sait que la partie réelle u d'une fonction d'une variable imaginaire $x+iy$, satisfait à

$$\text{l'équation } \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0 \quad (\dots)[\text{Poincaré 1883b 148}]$$

et signalé son extension directe au cas des fonctions complexes de deux variables complexes, il poursuit :

Il y a toutefois une différence essentielle entre cette théorie et celle des fonctions d'une seule variable. Pour que u soit la partie réelle d'une fonction de X et Y il ne suffit pas qu'il satisfasse à l'équation $\Delta u = 0$. [Poincaré 1883b 149]

La condition $\Delta u = 0$ semble donc être suffisante, dans le cas d'une seule variable complexe, pour que u soit la partie réelle d'une fonction holomorphe ; il semble ici manquer un référent de lieu, qu'il soit générique comme « au voisinage de chaque point » ou *méta* comme « localement », et cette absence de référent peut être lue comme une infraction à la rigueur. Nous proposons une lecture différente. Rappelons tout d'abord que les liens entre fonction (analytique) d'une variable complexe et fonction harmonique sont les suivants : la partie réelle u d'une fonction de z est harmonique, et on peut trouver une fonction de z de partie réelle une fonction harmonique u donnée au moyen d'intégrales curvilignes d'une différentielle formée simplement à partir de u . On a vu ce lien chez Riemann, on le voit chez Poincaré dans de nombreux textes, par exemple dans *Sur un théorème général de la théorie des fonctions* [Poincaré 1883a]. La fonction de z ainsi engendrée à partir d'une fonction

harmonique u est en général multivoque, mais dans un cadre où l'univocité est considérée comme une propriété qu'une fonction peut ou non présenter – et non comme un élément de la notion même de fonction –, le passage d'une fonction harmonique à une fonction holomorphe ne requiert pas de « théorème d'existence » comprenant obligatoirement une référence au lieu de validité. Ce qui, dans ce cadre, nécessite une référence au lieu, c'est l'affirmation d'univocité de la fonction ainsi engendrée. C'est bien ce qui se présente chez Poincaré : par exemple, dans le texte cité, on travaille sur une surface simplement connexe ; dans *Sur les propriétés du potentiel et les fonctions abéliennes* [Poincaré 1898], après avoir vérifié qu'une certaine différentielle est une « différentielle exacte » (nous dirions : fermée) sur un domaine privé d'une variété C , Poincaré introduit la fonction intégrale T puis note :

Donc T est une fonction uniforme dans tout domaine simplement connexe ne contenant aucun point de C . [Poincaré 1898 239]

Remarquons que le lieu de référence n'est pas un « voisinage » mais un « domaine » d'un certain type.

On notait jusqu'ici l'absence de terme *méta* pour qualifier les résultats ou modes de représentation renvoyant à un domaine *partiel*, voisinage d'un point ou domaine. Une exception tardive mais notable se trouve dans un article de 1907 sur *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme* [Poincaré 1907a]. Nous reviendrons en détail sur le contenu de cet article.

2. Dépassement du travail « au voisinage » : un objectif explicite.

Cette identification systématique et explicite du caractère local de certains résultats et modes de représentation, sans toutefois – sauf exception tardive – qu'un terme à la fois spécifique et général ne vienne sanctionner ce type de référence à un domaine partiel, conduit à formuler en de nombreuses occasions le problème du dépassement du local. Les différents contextes et les procédés techniques de ce dépassement seront présentés dans ce chapitre à travers plusieurs séries d'exemples ; arrêtons-nous ici sur la manière dont Poincaré formule cet objectif de dépassement, distingue ses modalités possibles ou souhaitables, dessine à son propos une répartition des tâches entre différentes branches des mathématiques. Nous sommes amenés à lire quelques grands textes tardifs, analyse des travaux et textes de réflexion sur les mathématiques, particulièrement riches en discours du niveau *méta*.

On trouve dans l'*Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même* [Poincaré 1901] que Poincaré rédige en 1901 à la demande de Mittag-Leffler, deux passages

principaux relatifs à ce problème. Le moins important des deux passages se trouve dans la cinquième partie, dans le point consacré aux *Equations de la physique mathématique*, c'est-à-dire aux équations faisant intervenir un Laplacien. L'ensemble du passage pourrait être organisé autour du couple local / global, ce n'est toutefois pas le cas. On y trouve néanmoins une explication *méta*, dont le caractère incongru est souligné par l'emploi de l'italique et des guillemets :

Ces problèmes ont été envisagés à plusieurs points de vue différents. Tantôt on a cherché seulement à démontrer qu'ils sont possibles et à établir en ce qui les concerne des « *théorèmes d'existence* ». [Poincaré 1901 117]

« Théorème d'existence » s'oppose ici à la recherche effective de développement des solutions en séries de divers types, ce terme sanctionne un caractère non constructif. On trouve un peu plus loin ce qui ressemble le plus à une évocation de passage du local au global, à propos de l'équation $\Delta u = e^u$:

M. Picard l'a intégrée le premier. La méthode que j'ai proposé est entièrement différente (...). Ce qui caractérise ma méthode et la distingue de celle de M. Picard, c'est qu'elle embrasse tout de suite la totalité de la surface de Riemann, tandis que M. Picard considère d'abord un domaine limité, et étend ensuite ses résultats de proche en proche jusqu'à ce qu'ils soient établis pour la surface entière. [Poincaré 1901 119]

Pour un même résultat global, puisqu'il est relatif à la totalité d'une surface de Riemann donnée, l'un choisit une méthode directement globale, l'autre une méthode de passage du local au global : ce n'est pas dit moins clairement par Poincaré en l'absence des termes « local » ou « global ». Il s'agit toutefois de la comparaison assez ponctuelle de deux méthodes, et non d'une distinction fondamentale servant de fil à l'exposé.

Le second passage jouit d'une toute autre importance, puisqu'il sert à introduire l'exposé de la longue première partie, consacrée aux équations différentielles. Citons dans son intégralité cet extrait fondamental :

Mais l'étude des intégrales des équations différentielles *dans le voisinage d'un point donné*, quelle que soit son utilité du point de vue du calcul numérique, ne saurait être regardée que comme un premier pas. Ces développements, qui ne sont valables que dans un domaine très limité, ne nous apprennent pas, au sujet de ces équations, ce que nous apprennent les fonctions Θ au sujet des intégrales des différentielles algébriques : ils ne peuvent pas être considérés comme une véritable intégration.

Il faut donc les prendre comme point de départ dans une étude plus approfondie des intégrales des équations différentielles où l'on se proposera de sortir des domaines

limités, où l'on s'était systématiquement cantonné, pour suivre les intégrales dans toute l'étendue du plan.

Mais cette étude peut-être faite à deux points de vue différents :

1° On peut se proposer d'exprimer les intégrales à l'aide de développements *toujours* valables et non plus limités à un domaine particulier. On est conduit ainsi à introduire dans la Sciences de nouvelles transcendentes ; mais cette introduction est nécessaire, car les fonctions anciennement connues ne permettent d'intégrer qu'un très petit nombre d'équations différentielles.

2° Mais ce mode d'intégration, qui nous fait connaître les propriétés des équations au point de vue de la théorie des fonctions, ne saurait suffire à lui seul si l'on veut appliquer les équations différentielles, par exemple, à des questions de Mécanique ou de Physique. Nos développements ne nous apprendraient pas, à moins d'un travail considérable, si par exemple la fonction va constamment en croissant, ou si elle oscille entre certaines limites, si elle peut croître au delà de toute limite. En d'autres termes, si l'on considère la fonction comme définissant une courbe plane, on ne saurait pas quelle est la forme générale de cette courbe. Dans certaines applications, toutes ces questions ont autant d'importance que le calcul numérique, et il y avait là un nouveau problème à résoudre. [Poincaré 1901 41]

Deux modes de dépassement du travail au voisinage d'un point, donc, le premier relevant de la « théorie des fonctions », le deuxième de ce que Poincaré nomme quelques pages plus loin la « géométrie qualitative » [Poincaré 1901 57]. De la « théorie des fonctions » relèvent les problèmes de décomposition en fonctions élémentaires et d'intégration au moyen de fonctions élémentaires – quitte à étendre la liste de ces fonctions élémentaires ; de la géométrie qualitative relèvent des questions que nous ne considérerions pas nécessairement comme telles, par exemple savoir si une fonction est bornée, périodique, ou déterminer son sens de variation. Cette dualité de points de vues ne recouvre donc pas exactement une dualité quantitatif/qualitatif, ou une opposition entre propriétés exprimables analytiquement et propriétés qui ne sont exprimables que dans le langage de la géométrie. Ainsi les propriétés qualitatives que nous prenions comme exemple – être bornée, être périodique, être croissante – sont bien des propriétés exprimables dans un cadre numérique au moyen d'égalités et d'inégalités, et on aurait peine à les caractériser en termes de géométrie élémentaire. Ce qui caractérise la démarche relevant de la « théorie des fonctions », c'est la mise en relation *analytique* d'une fonction à étudier à d'autres fonctions de référence, cette mise en relation analytique pouvant prendre la forme d'un développement en série, ou de la recherche d'une

équation définissant implicitement la nouvelle fonction au moyen des autres, comme dans le cas des fonctions algébriques ou algébroides [Poincaré 1879 LII], ou encore de la classe des fonctions vérifiant une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels. Au point de vue qualitatif la fonction n'est plus qu'une association entre ensembles de valeurs numériques, et c'est ce travail sur des ensembles de valeurs numériques qui est exprimable comme travail sur des ensembles de points : courbes, surfaces etc. La fonction est alors moins rapportée analytiquement à d'autres fonctions que, comme figure, rapportés à d'autres figures. En particulier la notion de « forme générale » permet d'associer à une fonction d'autres fonctions qui en constituent des déformations : ces déformations peuvent bien détruire les solidarités analytiques tout en conservant les propriétés qualitatives. La distinction entre point de vue « théorie des fonctions » et géométrique/qualitatif renvoie donc à deux types de solidarités, à deux manières de regrouper les fonctions en familles stables, selon qu'elles s'expriment les unes au moyen des autres ou qu'elles partagent un même comportement d'ensemble. Poincaré insiste ici sur la distinction des deux points de vue, en soulignant qu'ils peuvent nécessiter des méthodes d'étude radicalement distinctes : ainsi les « développements » si ardemment cherchés du point de vue de la théorie des fonctions peuvent ne rien enseigner du comportement d'ensemble. Ce nouveau point de vue qualitatif fait surgir de « nouveaux problèmes » et appelle de nouvelles méthodes, voire une nouvelle branche des mathématiques : on verra que l'*Analysis situs* est souvent décrite par Poincaré comme cette géométrie qualitative ; on voit ici comment elle s'articule sur une analyse qui lui fournit ses problèmes, comment elle naît d'un changement de point de vue sur les fonctions. Nous traiterons plus loin dans ce chapitre du travail global relevant de la « théorie des fonctions », concentrons-nous pour l'instant sur le lien entre global et géométrique/qualitatif. Nous avons vu, dans un texte tardif d'analyse de ses propres travaux, Poincaré lier les problèmes globaux en analyse – du moins, faute d'un terme chez Poincaré, les problèmes ne se contentant pas de l'étude dans un « domaine limité » ou au « voisinage d'un point donné » – et un point de vue géométrique/qualitatif, lui-même lié à une nouvelle discipline, l'*Analysis situs*. Il nous faut examiner d'un peu plus près la nature des liens entre ce type de problèmes, ce point de vue et cette discipline, pour estimer l'importance donnée au niveau *méta* à l'opposition local/global. Avant de revenir à ce niveau, présentons les liens tels qu'ils se nouent dans les premiers Mémoires sur les courbes définies par une équation différentielle.

3. Le paradigme C-F-N = $2p-2$.

Les résultats de Poincaré liant les singularités de certaines équations différentielles ordinaires sur une surface (compacte orientable) au genre – donc à la topologie – de cette surface serviront au 20^e siècle de modèle de travail global, et d'exemple permettant de faire comprendre l'opposition entre local et global ; valeur paradigmatique, donc. C'est par exemple l'un des cas proposés par Morse dans sa conférence sur la géométrie différentielle globale [Morse 1967]. Plus significatif pour notre histoire, ces résultats sont les *seuls* résultats globaux que mentionne Struik dans la série de conférences qu'il fait au M.I.T. sur l'histoire de la géométrie différentielle, et qu'il publie dans ISIS en 1933 [Struik 1933b] ; il introduit à leur propos la notion de « *behavior in the large* » et souligne les liens entre l'*Analysis situs* et la « *differential geometry in the large* » [Struik 1933b 188].

Eu égard à la nouveauté de ce type de démarches, Poincaré introduit avec soin l'exposé d'un nouveau point de vue dans le Mémoire de 1881 [Poincaré 1881], et l'on y trouve les articulations qui seront reprises en 1901 dans l'analyse des travaux. Si le terme de « théorie des fonctions » ne s'y trouve pas, celui de « Géométrie qualitative » [Poincaré 1881 5] s'y trouve ; le choix du terme de *courbe* dans le titre (*Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*) marque aussi clairement un changement de point de vue, après une thèse *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles* dans laquelle, on l'a vu, le caractère purement local de l'étude était explicitement souligné. Le thème du dépassement du local et l'opposition quantitatif/qualitatif sont introduits en quelques lignes :

Rechercher quelles sont les propriétés des équations différentielles est donc une question du plus haut intérêt. On a déjà fait un premier pas dans cette voie en étudiant la fonction proposée *dans le voisinage d'un des points du plan*. Il s'agit aujourd'hui d'aller plus loin et d'étudier cette fonction *dans toute l'étendue du plan*. Dans cette recherche, notre point de départ sera ce qu'on sait déjà de la fonction étudiée *dans une certaine région du plan*.

L'étude complète d'une fonction comprend deux parties :

1^o Partie qualitative (pour ainsi dire), où étude géométrique de la courbe définie par la fonction ;

2^o Partie quantitative, ou calcul numérique des valeurs de la fonction. [Poincaré 1881 3]

L'importance de l'étude qualitative est soulignée en liaison avec la physique mathématique, en particulier dans le problème des trois corps. Quant à ce qu'il faut entendre par étude qualitative, le terme d'*Analysis situs* ne fait pas encore partie du vocabulaire de Poincaré. Pour se faire comprendre il utilise deux analogies, l'une avec un théorème connu l'autre avec une pratique scolaire :

Ainsi, par exemple, pour étudier une équation algébrique, on commence par chercher, à l'aide du théorème de Sturm, quel est le nombre des racines réelles, c'est la partie qualitative, puis on calcule la valeur numérique de ces racines, ce qui constitue l'étude quantitative de l'équation. De même, pour étudier une courbe algébrique, on commence par *construire* cette courbe, comme on dit dans les cours de Mathématiques spéciales, c'est-à-dire on cherche quelles sont les branches de courbes fermées, les branches infinies etc. Après cette étude qualitative, on peut en déterminer exactement certain nombre de points. [Poincaré 1881 4]

Il est ensuite fait allusion à l'interaction entre étude qualitative et quantitative, dans des problèmes qu'on dirait de passage du local au global :

Cette étude qualitative, quand elle sera faite complètement, sera de la plus grande utilité pour le calcul numérique de la fonction et y conduira d'autant plus facilement que l'on connaît déjà des séries convergentes qui représentent la fonction recherchée dans une certaine région du plan, et que la principale difficulté qui se présente est de trouver un guide sûr pour passer d'une région où la fonction est représentée par une série à une autre région du plan où elle est exprimable par une série différente. [Poincaré 1881 4]

Cet aspect ne sera toutefois pas développé dans le Mémoire, y compris dans les exemples des chapitres 7 et 9. Signalons que cet exposé des motifs est repris *in extenso* dans l'*Analyse* de 1901.

Après cet exposé introductif, Poincaré pose le problème : étudier les courbes intégrales ou « courbes caractéristiques » de l'équation $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$, où X et Y sont des polynômes en les deux variables réelles x et y . Pour éviter les exceptions liées aux points à l'infini, Poincaré ne travaille pas dans le plan mais sur la sphère : à chaque point du plan P on associe deux points diamétralement opposés sur la sphère S , intersection de cette sphère avec la droite reliant son centre au point du plan ; les points à l'infini du plan sont donc représentés par des couples de points diamétralement opposés sur l'équateur de la sphère. On pourrait dire qu'en étudiant ces situations symétriques sur la sphère Poincaré travaille sur le plan projectif réel, mais rien de

tel n'est dit dans le texte. Si les termes de carte et de changement de carte n'y sont pas, l'étude en un point de l'équateur est menée non plus en termes de (x,y) mais dans le plan des (z,t) où $x=\frac{1}{z}$ et $y=\frac{t}{z}$, si $x \neq 0$; il s'agit donc de la même projection « gnomonique », sur un plan perpendiculaire au premier. Ainsi l'étude sur la sphère est-elle menée dans trois cartes planes différentes, chacune représentant la sphère (à antipodie près) privée d'un grand cercle. Comme annoncé dans l'introduction, le point de départ est l'étude au voisinage des points singuliers, c'est-à-dire, pour les points à distance finie, où X et Y s'annulent tous deux. Poincaré rappelle pour commencer le résultat démontré dans sa Thèse et relatifs aux points singuliers ordinaires (où, en termes anachroniques, l'application linéaire tangente à $(x,y) \rightarrow (X,Y)$ n'est pas nulle). Il n'est pas inutile de lire ce résultat tel que Poincaré l'énonce. Pour étudier le comportement au point (α,β) , on suppose $X = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(y-\beta) + \dots$ et $Y = b_0 + b_1(x-\alpha) + b_2(y-\beta) + \dots$:

Si l'équation

$$(a_1-\lambda)(b_2-\lambda)-b_1a_2=0$$

a deux racines différentes λ_1 et λ_2 ;

Si le rapport de ces racines est positif ou imaginaire, l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

est de la forme

$$z_1^{\lambda_1} z_2^{-\lambda_2} = \text{const.}$$

où z_1 et z_2 sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $x-\alpha$, $y-\beta$ et s'annulant pour $x = \alpha$, $y = \beta$. [Poincaré 1881 13]

On peut faire deux remarques à propos de la formulation de ce théorème. Premièrement il s'agit d'un résultat local et non d'une étude infinitésimale : il ne s'agit pas de dire que dans l'infiniment petit on peut, en un point singulier ordinaire, remplacer X par $a_1(x-\alpha) + a_2(y-\beta)$ et Y par $b_1(x-\alpha) + b_2(y-\beta)$, mais bien d'effectuer un changement de variable $(x,y) \rightarrow (z_1,z_2)$ permettant de « redresser » localement la situation. L'inversibilité de ce changement de variable n'est pas signalé. Remarquons ensuite que rien dans la formulation du théorème n'indique explicitement son caractère local : cet aspect est implicite dans la référence à des séries entières ; il est marqué explicitement en dehors de l'énoncé lui-même, puisque le chapitre dans lequel il s'inscrit est intitulé « Etude des caractéristiques dans le voisinage d'un point de la sphère » [Poincaré 1881 12]. Poincaré poursuit sur la discussion des situations

réelles associées à ce théorème, en distinguant parmi les points singuliers ordinaires les nœuds, foyers, cols et centres. Les situations plus complexes sont écartées de ce Mémoire [Poincaré 1881 19], ainsi que le cas exceptionnel des centres.

Le dépassement de cette étude au voisinage des points singuliers passe par l'introduction de la notion d'indice d'un cycle. Un cycle étant un chemin fermé sans auto-intersection, orienté :

Supposons qu'un point mobile décrive le cycle dans le sens positif et considérons les variations de l'expression $\frac{Y}{X}$. Soit h le nombre de fois que cette expression saute de $-\infty$ à $+\infty$; soit k le nombre de fois que cette expression saute de $+\infty$ à $-\infty$. Soit

$$i = \frac{h - k}{2} ;$$

le nombre i s'appellera l'*indice du cycle*. [Poincaré 1881 25]

Notons l'absence de construction d'une droite projective réelle et d'interprétation géométrique en termes d'application à valeur dans un cercle ou de variation totale d'un argument ; il est vrai que la fonction à étudier est une simple fonction rationnelle et que la définition donnée par Poincaré fournit en même temps le moyen de calcul. L'indice possède une évidente propriété d'additivité : si ABCDA est un cycle entièrement contenu dans l'un des hémisphères et que l'on joint A et C par un arc AMC simple entièrement situé dans le même hémisphère (on dit qu'il est à l'*intérieur* du cycle), alors

$$\text{ind. ABCDA} = \text{ind. ABCMA} + \text{ind. AMCDA} \quad [\text{Poincaré 1881 25}]$$

Poincaré formule ensuite explicitement une stratégie de passage de l'infinitésimal au global : cette formule additive permet de « ramener le calcul de l'indice d'un cycle quelconque au calcul de l'indice des différents cycles infiniment petits qui le composent » [Poincaré 1881 26]. Ce choix des « cycles infiniment petits » n'est pas une simple façon de désigner des cycles suffisamment petits pour n'entourer qu'un seul point singulier. Deux théorèmes sont rapidement établis à propos de ces cycles :

Théorème III. Un cycle infiniment petit qui ne contient à son intérieur aucun point singulier a pour indice 0.

(...)

Théorème IV. Si un cycle infiniment petit contient à son intérieur un point singulier, son indice est égal à ± 1 . [Poincaré 1881 26]

La nature exacte de cycles infiniment petits intervenant dans la démonstration du théorème III est un peu incertaine, et des cycles suffisamment petits suffiraient : il suffit pour la démonstration que si le cycle est coupé par la courbe d'équation $X = 0$, sans contenir – c'est

l'hypothèse si l'on est pas sur l'équateur, de point d'intersection de $X = 0$ et $Y = 0$ – on puisse supposer qu'il n'est pas coupé par $Y = 0$. La démonstration ne serait d'ailleurs guère compliquée sans cette hypothèse : le choix des cycles suffisamment petits permet de n'indiquer qu'une idée générale de la démonstration sans en compromettre la rigueur. Le choix des cycles infiniment joue par contre un rôle dans la démonstration du théorème IV, où il est établi que l'indice est de -1 pour un cycle infiniment petit entourant un nœud ou un foyer, de $+1$ pour un cycle infiniment petit entourant un col. L'étude utilise en effet l'approximation à l'ordre 1 de X et Y dans $\frac{Y}{X}$, sur un cercle centré sur le point singulier et de rayon ρ , « ρ étant une constante *infiniment petite* » [Poincaré 1881 26]. Il n'est pas question pour nous de souligner un manque de rigueur chez Poincaré : l'argument infinitésimal peut donner immédiatement un argument valable pour des cycles suffisamment petits ; ce qui nous importe c'est de noter que Poincaré choisit de ne pas passer par ce chemin. Il n'utilise pas non plus d'argument du type : la déformation continue d'un cycle ne passant pas sur un point singulier ne modifie pas son indice tant que la zone parcourue lors de la déformation ne rencontre pas de point singulier. Ce type d'argument est pourtant largement disponible en 1881, sur le modèle de la théorie de Cauchy des fonctions d'une variable complexe. Poincaré n'utilise pas non plus de décomposition d'un cycle en réseau de cycles suffisamment petits, alors que des arguments de ce type sont eux aussi disponibles à cette époque. Le passage des cycles infiniment petits aux cycles quelconques est *pleinement légitime* :

Problème I. Calculer l'indice d'un cycle situé entièrement dans l'un des hémisphères.

Soient N le nombre de nœuds, F le nombre de foyers, C le nombre de cols contenus à l'intérieur du cycle. Si l'on décompose le cycle donné en une infinité de cycles infiniment petits y ,

Un nombre infini des cycles y auront pour indice	0
$N+F$ des cycles y	” -1
C des cycles y	” +1.

L'indice du cycle donné sera donc $-(N+F-C)$. [Poincaré 1881 28]

Ce résultat met donc en relation l'indice, notion relative au comportement le long du cycle, avec le comportement dans le domaine intérieur au cycle : on s'inscrit ici dans la lignée classique des théorèmes reliant comportement dans un domaine et comportement au bord de ce domaine. Poincaré passe ensuite à un résultat global *sur la sphère* et non plus seulement sur un cycle donné. L'indice du cycle que constitue l'équateur est calculé de deux manières, directement puis en considérant l'équateur comme bord de l'un des hémisphères. Ici

l'argument de Poincaré peut sembler un peu rapide, puisque la réponse au problème I ne semble valide qu'en supposant qu'aucun point singulier ne se trouve exactement *sur* le cycle ; un argument rapide suffit à écarter ce problème, mais Poincaré ne se soucie pas de le donner. On peut formuler l'hypothèse que la description d'un cycle comme collection d'une infinité de cycles infiniment petits ne contribue guère à la visibilité de ce problème : un cycle infiniment petit peut à la fois entourer un point singulier et être un élément de contour passant par un point singulier. Les deux modes de calcul de l'indice de l'équateur conduisent à l'égalité :

Corollaire I : le nombre total des nœuds et des foyers est égal au nombre total des cols plus deux. [Poincaré 1881 29]

Rappelons pour la bonne intelligence du résultat que la symétrie de la situation sur la sphère fait compter « deux fois » chaque point singulier. Notons que ce résultat n'est donné que comme un « corollaire » alors qu'il est suivi d'un résultat, certes qualitatif mais non global, baptisé « théorème » : si l'on parcourt un cycle contenu dans un hémisphère, les éventuels points singuliers rencontrés sont successivement d'indice +1 et -1. Ces résultats sont regroupés dans le chapitre III intitulé « distribution des points singuliers » : l'accent n'est pas mis sur le résultat global sur la sphère, mais sur les différents types de résultats de répartition, syntaxiquement globaux, dont le lieu de référence peut aussi bien être la sphère qu'un cycle. Notons aussi que Poincaré n'utilise pas de terme particulier pour parler du corollaire I, qu'il n'est d'ailleurs pas aisé de qualifier de géométrique, ni de qualitatif puis qu'il consiste en une relation numérique. On peut penser que l'allusion, reprise en 1901, au théorème de Sturm renvoie directement à ce résultat, ce qui ne met pas l'accent sur l'aspect de contrainte globale qu'exerce sur les singularités de ce type d'équations différentielles la forme particulière de la sphère : l'auteur ne souligne pas ce qui nous semble relever de la légalité du lieu ; le lieu de référence est d'ailleurs incertain puisque le travail symétrique sur la sphère est un artifice permettant l'étude « dans toute l'étendue du plan ». Quant au caractère global de ce corollaire, il est manifeste en un sens négatif : ce corollaire ne concerne pas le voisinage d'un point. Il n'entre toutefois pas aisément dans l'idée de forme des caractéristiques ni de parcours d'une caractéristique en dehors d'une région où elle est initialement connue. Ainsi, c'est après avoir énoncé sans le qualifier ce résultat que Poincaré *reprend* le thème de l'étude globale, dans un chapitre 4 qui s'ouvre comme suit :

L'étude que nous venons de faire des points singuliers va enfin nous permettre d'aborder la question des formes géométriques que peuvent affecter les caractéristiques *sur toute la surface de la sphère*. [Poincaré 1881 33]

Le corollaire I, analogue au théorème de Sturm, est un préalable à l'étude géométrique sur toute la sphère, que nous ne présentons pas ici en détail. Les notions de contact, de cycle sans contact et de cycle limite permettent une étude qualitative analogue de la construction des courbes algébriques en Mathématiques spéciales.

Un résultat plus général que le corollaire I est annoncé dans une note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* en décembre 1881 mais démontré dans le long troisième Mémoire de la série, qui paraît en 1885 sous le titre *Sur les courbes définies par les équations différentielles* [Poincaré 1885]. De même que l'étude des équations du premier ordre et du premier degré dans le plan passait par l'introduction d'une sphère auxiliaire, l'étude, à partir du chapitre 12, des équations du premier ordre et de degré supérieur passe par l'introduction de surfaces algébriques. Soit une équation

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

où F est un polynôme. L'objectif est dans un premier temps, non pas de prendre en compte les points à l'infini mais d'uniformiser la situation, en évitant qu'à un couple de valeurs fixées (x_0, y_0) soient associées plusieurs valeurs de $\frac{dy}{dx}$. Il est atteint en considérant les courbes intégrales non plus dans le plan mais sur la surface algébrique d'équation $F(x, y, z) = 0$. Plus généralement, on peut se donner directement un problème sur une surface algébrique d'équation $F(x, y, z) = 0$: on cherchera les équations horaires d'un point sur cette surface satisfaisant à

$$\frac{dx}{dt} = X \quad \frac{dy}{dt} = Y \quad \frac{dz}{dt} = Z$$

où X, Y, Z sont des polynômes en x, y, z , soumis à la condition

$$\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z = MF \quad .$$

Sur la surface d'équation $F = 0$ on pourra y voir la donnée d'un champ polynomial de vecteurs tangents. Poincaré autorise ensuite les transformations birationnelles, en particulier pour faire disparaître les points à l'infini : soit S_1 une des composantes connexes (nappe) ainsi obtenue. Deux problèmes se posent alors : les équations différentielles peuvent présenter des points singuliers, la surface algébrique S_1 peut présenter des points singuliers géométriques. Pour ce dernier type de singularités, Poincaré donne une brève indication puis il pose : « nous supposons, dans ce qui va suivre, que la surface S_1 ne présente pas de pareils points

singuliers. » [Poincaré 1885 118]. L'étude au voisinage de chaque point peut donc être ramenée à une étude plane, le caractère local étant ici parfaitement explicite :

(...) on pourra exprimer, dans le voisinage du point M, x, y et z par des fonctions holomorphes de deux paramètres u et v et de telle façon que les trois déterminants fonctionnels

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}$$

ne soient pas nuls à la fois.

On pourra écrire alors

$$\frac{du}{dt} = U, \quad \frac{dv}{dt} = V$$

U et V étant des fonctions holomorphes en u et en v . On est alors ramené à l'étude des courbes planes définies par une équation différentielle du premier ordre et du premier degré ; car, dans le voisinage du point considéré, les fonctions U et V ont tous les caractères des polynômes entiers. [Poincaré 1885 117]

Ainsi, si l'introduction de transformations birationnelles conservait le caractère algébrique des relations, l'utilisation de paramétrisations locales holomorphes le fait perdre ; on pourrait ici faire le lien avec la distinction proposée par Poincaré en 1901 : en quittant la classe de fonctions rationnelles l'étude quitte en un certain sens la « théorie des fonctions », mais les propriétés qualitatives locales des polynômes demeurent.

La suite du travail peut donc suivre, dans son objectif de dépassement qualitatif du local, le modèle des Mémoires précédents : étude de la distribution des points singuliers, puis des cycles sans contact et des cycles limites. C'est cette première étude qui nous intéresse ici, car le rôle de la topologie de la surface S_1 y est bien plus clair qu'en 1881 : alors, Poincaré utilisait simplement le fait qu'une courbe fermée simple partage la sphère en deux zones ; en 1885, Poincaré connaît les œuvres de Riemann – auxquelles il renvoie d'ailleurs explicitement en plusieurs endroits [Poincaré 1885 135] – et il utilise pleinement la notion de simple connexité, le lien entre genre et coupure par des cycles. La notion d'indice d'un cycle est définie un peu différemment et doit faire intervenir la notion de simple connexité : on ne considère sur S_1 que les cycles qui partagent S_1 en deux régions, dont une au moins est simplement connexe ; la région simplement connexe, si elle est unique, est appelé l'intérieur du cycle, une « convention spéciale » permettant de régler les cas où les deux régions sont simplement connexes. L'intérieur pouvant ainsi être bien défini pour ces cycles particuliers, on peut distinguer le nombre de contacts intérieurs avec une trajectoire des équations

différentielles (nombre I) du nombre de contacts extérieurs (nombre E) ; l'indice J d'un tel cycle est alors défini par

$$J = \frac{E - I - 2}{2}$$

Cette définition est moins calculatoire que celle donnée en 1881, moins susceptible aussi d'une interprétation géométrique en termes de « nombre de tours » réalisé par le champ de vecteurs lors d'un parcours du cycle. Il n'est par contre pas difficile d'établir que cet indice vérifie la même propriété additive que celui défini en 1881. Le caractère peu calculatoire va par contre modifier le mode de détermination explicite de l'indice de cycles infiniment petits, analogue des théorèmes III et IV de 1881. La détermination est menée en quelques lignes, en renvoyant soit rhétoriquement soit par des figures à l'allure du système des trajectoires au voisinage d'un point ordinaire ou d'un point singulier. Le travail est un peu allusif pour qu'on puisse chercher à y suivre en détail le partage du local et de l'infinitésimal. Il ne semble toutefois pas que le travail nécessite un passage par des approximations, et l'utilisation de l'allure au voisinage d'un point singulier serait traitable localement par un changement de variable ramenant à $z_1^{\lambda_1} z_2^{-\lambda_2} = \text{const}$. De plus, un cycle infinitésimal n'est pas un objet si évanescent qu'il ne puisse posséder une forme ou être décomposé en cycles plus petits, ainsi :

Si le cycle infiniment petit n'enveloppe aucun point singulier, nous pourrions toujours supposer qu'il est convexe, car, s'il ne l'était pas, on pourrait le décomposer en plusieurs cycles plus petits et convexes. [Poincaré 1885 123]

En l'absence de résultat d'invariance de l'indice par déformation continue du cycle, Poincaré doit utiliser ce procédé de décomposition pour établir l'indépendance de l'indice envers la forme particulière du cycle, la valeur de l'indice étant déterminée intuitivement pour un cycle convexe. Le passage par des cycles « infiniment petits » ne semble ici renvoyer à aucune nécessité technique, il est une simple manière de parler commandée par le contexte de travail local au voisinage d'un point. Le lien avec la topologie de la sphère était obtenu en 1881 en calculant l'indice de l'équateur vu comme courbe puis comme bord d'un hémisphère. Ici il est fait usage d'une décomposition polyédrique de la surface S :

Tout le monde connaît le théorème d'Euler, d'après lequel si α, β, γ sont les nombres des faces, des arêtes et des sommets d'un polyèdre *convexe*, on doit avoir $\alpha - \beta + \gamma = 2$.

Ce théorème s'étend aisément au cas où le polyèdre, au lieu d'être convexe, forme une surface de genre p ; on trouve alors

$$\alpha - \beta + \gamma = 2 - 2p .$$

Mais, en géométrie de situation, on n'a pas à s'inquiéter de la forme des faces et des arêtes ; (...) Il en résulte que la figure, formée par la nappe S_1 divisée en régions simplement connexes, est un véritable polyèdre curviligne auquel s'applique le théorème d'Euler. [Poincaré 1885 124]

La somme des indices de tous les cycles d'une décomposition polyédrique est toujours égale à C-F-N du fait de l'additivité de l'indice. Ici Poincaré évite le point qui nous avait troublé dans l'usage de l'indice de l'équateur en 1881, car à aucun moment il n'a besoin de cycles passant par des points singuliers. L'autre mode de calcul de la somme des indices utilise une analyse simple du contact le long des arêtes puis en chaque sommet. On obtient

$$C-F-N = \alpha - \beta + \gamma = 2p - 2.$$

4. Une utilisation *méta* en 1907.

Un article de 1907 sur *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme* [Poincaré 1907a] fournit un cas unique – pour autant que le montrent nos parcours dans l'œuvre de Poincaré : le problème y est décomposé en plusieurs étapes dont l'une est qualifiée de *locale*.

L'enchaînement de problèmes est d'abord formulé pour une variable complexe :

On peut se proposer deux problèmes distincts :

Soit $Z = X+iY$ une fonction analytique de $z = x+iy$. Soit dans le plan des z un *arc de courbe* l et sur cet arc un point m ; soit dans le plan des Z un autre arc de courbe L et sur cet arc un point M . Est-il possible de déterminer la fonction analytique Z , de telle façon qu'elle soit régulière dans le voisinage du point m , que Z soit au point M quand z est au point m et que Z décrive la courbe L quand z décrit la courbe l ? Cela c'est le *problème local*, et l'on sait qu'il comporte une infinité de solutions.

Soit maintenant dans le plan des z une *courbe fermée* l limitant un certain domaine d ; soit dans le plan des Z une courbe fermée L limitant un domaine D . Est-il possible de déterminer la fonction analytique Z , de telle façon qu'elle soit régulière dans le domaine d , que Z parcourt la ligne L (ou le domaine D) quand z parcourt la ligne l (ou le domaine d) ? Cela c'est le *problème étendu* ; et le principe de Dirichlet nous apprend qu'il comporte une solution et une seule. [Poincaré 1907a 244]

Le problème étudié dans cet article est l'analogue à deux variables complexes, les lignes l et L étant remplacées par des « surfaces » fermées à trois dimensions délimitant des domaines de

l'espace à quatre dimensions. Poincaré n'aboutit pas à une étude complète : l'objectif de cet article est plus d'analyser la structure des problèmes et d'indiquer les directions dans lesquelles chercher les réponses [Poincaré 1907a 289]. Si le problème local en une variable a toujours une solution, ce n'est pas le cas à deux variables : une rapide étude montre qu'une solution au problème local demande la détermination de trois fonctions inconnues satisfaisant à quatre équations différentielles ; cette non trivialité du problème local le hausse au statut d'étape autonome dans l'enchaînement problématique. Pour aborder ce problème local, Poincaré se ramène à l'étude du groupe des transformations régulières en m appliquant (localement) la surface sur elle-même. Il s'appuie sur la classification des transformations de deux variables complexes donnée par Lie dans le troisième tome de sa théorie des groupes de transformations et prolonge ce travail de Lie en menant la discussion en termes *réels* et non plus complexes. Soucieux de donner un moyen explicite d'étude de l'équivalence locale en un point de deux « surfaces », Poincaré introduit un nouveau problème, « analogue au problème local » [Poincaré 1907a 255] : l'étude des transformations conservant la surface au voisinage d'un point est remplacée par celle des transformations fixant m et transformant la surface en une autre ayant avec la première un contact d'ordre donné au point m . Pour chaque ordre, Poincaré décrit un système complet d'invariants, de sorte que l'égalité de la série infinie des invariants caractérise l'équivalence locale [Poincaré 1907a 259]. Avant d'aborder le « problème étendu », Poincaré introduit « un problème nouveau que nous appellerons le *problème mixte* parce qu'il tient pour ainsi dire le milieu entre le problème local et le problème étendu » [Poincaré 1907a 264]. Grossièrement, il s'agit de passer de l'équivalence locale en chaque point de deux surfaces (« Supposons que le problème local puisse être résolu dans le voisinage de chaque point m de la surface s » [Poincaré 1907a 254]) à l'équivalence des deux surfaces, sans préjuger de la prolongeabilité analytique à l'intérieur du domaine d de l'application obtenu au voisinage de toute la surface s . La formulation précise du problème mixte passe par un changement de notation : une solution (locale) en un point m donné était jusque là désignée par un couple de fonctions f, f' des deux variables complexes $z = x+iy$, $z' = x'+iy'$; pour indiquer que l'on travaille maintenant avec une collection de fonctions dont chacune est associée à un point de la surface, c'est ce dernier qui sera indiqué au lieu des variables z, z' : une solution du problème local en m sera désignée par $Z(m), Z'(m)$ (aucune notation ne vient sanctionner la possible multiplicité des solutions en un point donné). Une fois ces notations introduites, on peut revenir au problème :

(...) il peut se faire que le problème local admette plusieurs solutions ou une infinité de solutions. C'est même seulement dans ce cas que la question dont nous allons nous occuper peut présenter de l'intérêt. [Poincaré 1907a 265]

En cas d'unicité en effet, la collection des $Z(m)$, $Z'(m)$ détermine sans ambiguïté une fonction analytique au voisinage de la surface s [Poincaré 1907a 265]. Lorsqu'il n'y a pas unicité, on est face à un problème de passage du local au global du type rencontré dans les problèmes de Cousin, dont nous parlerons longuement plus loin. Poincaré n'entre toutefois pas ici dans ce problème global. Il préfère aborder, sous hypothèse de simple connexité de s , la discussion des singularités que peuvent présenter les prolongements de la solution du problème local au delà du point donné, et cette étude (locale de nouveau, en une singularité) est rattachée à l'étude précédente en termes de groupe de Lie. Une étude détaillée est menée dans le cas de l'hypersphère S^3 . On arrive enfin au « problème étendu », attaqué à partir des résultats de Hartogs.

L'objectif que Poincaré assignait explicitement à ce travail exploratoire n'était pas d'illustrer le passage du local au global, mais de montrer combien le passage de une à deux variables complexes modifie la nature des problèmes, ici en compliquant l'aspect local et, en un certains sens, en simplifiant le problème global (théorème de Hartogs). Le terme « local » joue ici un rôle parfaitement *méta* – au sens que nous donnions à ce terme : il désigne la place d'un problème au sein d'un réseau de problèmes (problème « analogue au problème local », « problème mixte », « problème étendu »), d'un réseau contenant d'ailleurs deux problèmes globaux.

5. Un thème parmi d'autres.

On conçoit que des résultats comme celui qu'on vient de présenter – liant en une relation numérique simple, le genre d'une surface (algébrique), aux singularités des champs de vecteurs (polynomiaux) sur cette surface – puisse à l'avenir servir de modèle de formulation pour d'autres résultats globaux, fournir des techniques de démonstration de résultats globaux et de passage du local au global, ouvrir un champ de recherche sur les interactions entre espace topologique de base et objets de types divers *sur* cet espace, illustrer le rôle de la topologie dans les problèmes d'analyse, permettre de désigner par un exemple frappant et rapide à énoncer ce que c'est que *le* global. Sa présentation nous permettait aussi d'illustrer sur un point particulier les aspects que nous décrivions comme des constantes dans l'œuvre de Poincaré : expression explicite du local, objectif explicite de dépassement du local. Nous

notions que cet objectif était présenté en 1901 sous deux aspects, l'un qualitatif, l'autre relevant de la théorie des fonctions ; il renvoyait de façon privilégiée à une nouvelle branche des mathématiques, l'*Analysis situs*. Si le *dépassement du local* d'une part, le *qualitatif* d'autre part, l'*Analysis situs* enfin, se renvoient l'un à l'autre, le premier est loin d'englober les autres et n'est pas celui que Poincaré met le plus en avant lorsqu'il s'exprime sur l'organisation des mathématiques, leur nature ou leur avenir.

L'*Analysis situs* est-elle décrite comme la branche des mathématiques permettant le dépassement du local, révélant les contraintes globales qu'un espace donné impose aux objets qui en dépendent ? Ce ne sont pas ces thèmes qui sont développés lorsque Poincaré expose la nature et le rôle de cette branche de la géométrie : elle est d'abord pour lui géométrie *qualitative* et *hypergéométrie*, et ces éléments se retrouvent avec une grande stabilité dans la série des articles spécifiquement consacrée à la topologie, dans l'*Analyse des travaux* de 1901, dans la conférence sur l'*Avenir des mathématiques* [Poincaré 1908] ou dans les textes de réflexion sur les sciences. Géométrie qualitative, tout d'abord :

On a dit (...) que la géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites. Oui, sans doute, mais à une condition. Les proportions de ces figures peuvent être grossièrement altérées, mais leurs éléments ne doivent pas être transposés et ils doivent conserver leur situation relative. En d'autres termes, on n'a pas à s'inquiéter des propriétés quantitatives, mais on doit respecter les propriétés qualitatives, c'est-à-dire précisément celles dont s'occupe l'*Analysis Situs*. [Poincaré 1901 100]

Hypergéométrie ensuite :

Cette géométrie à plus de trois dimensions n'est pas une simple géométrie analytique, elle n'est pas purement quantitative, elle est aussi qualitative et c'est par là surtout qu'elle devient intéressante. L'importance de l'*Analysis Situs* est énorme et je ne saurais trop y insister ; le parti qu'en a tiré Riemann, l'un de ses principaux créateurs, suffirait à le démontrer. Il faut qu'on arrive à la construire complètement dans les espaces supérieurs ; on aura alors un instrument qui permettra réellement de voir dans l'hyperespace et de suppléer à nos sens. [Poincaré 1908 181]

On multiplierait à plaisir les citations combinant ces deux thèmes. Il n'y est pas insisté sur le rôle premier d'un espace imposant sa légalité, mais sur les positions relatives *des* figures. Cette étude qualitative des positions relatives est bien ce qu'on observait dans les Mémoires sur les courbes définies par une équation différentielle : distribution des points singuliers sur la surface puis sur un cycle, partage de l'espace par les cycles limites, cycles qui se traversent ou se touchent en un point etc. Cette étude qualitative des courbes suivies sur tout leur

parcours permet aussi d'articuler les différentes questions de stabilité tout en dévoilant de nouvelles formes du local : l'étude qualitative des retours au voisinage d'un point, l'étude qualitative des trajectoires voisines d'une trajectoire fermée jouent un rôle fondamental ; elles participent bien entendu du dépassement du local, sans toutefois nécessairement renvoyer aux contraintes d'un espace total. La *position relative des figures* plus que la *forme de l'espace*, donc ; un dépassement du local qui ne débouche pas *avant tout* sur le dévoilement de la légalité primitive du lieu.

On est aussi surpris de l'absence de toute reprise, de la moindre allusion au thème du dépassement du local dans la conférence sur *L'avenir des mathématiques* prononcée en 1908 à l'occasion du quatrième congrès international des mathématiciens. Le résultat $C-F-N = 2p-2$ aurait illustré à merveille une réflexion comme :

Les seuls faits dignes d'attention sont ceux qui introduisent de l'ordre dans cette complexité et la rendent ainsi accessible. [Poincaré 1908 169]

Ou encore :

Pour obtenir un résultat qui ait une valeur réelle, il ne suffit pas de moudre des calculs ou d'avoir une machine à mettre en ordre les choses ; ce n'est pas seulement l'ordre, c'est l'ordre inattendu qui vaut quelque chose. [Poincaré 1908 170]

Les remarques sur les ressemblances et les différences entre problèmes, dont on verra qu'elles amènent sous la plume de Hadamard ou de Weyl à souligner le contraste entre l'indiscernabilité locale des variétés et la spécificité que chacune manifeste au niveau global, ne suscitent rien de tel sous la plume de Poincaré :

Je n'aurai pas perdu mon temps (...) si ces tâtonnements mêmes ont fini par me révéler l'analogie profonde du problème que je viens de traiter avec une classe beaucoup plus étendue de problèmes ; s'ils m'en ont montré à la fois les différences et les ressemblances, si en un mot ils m'ont fait entrevoir les possibilités d'une généralisation. [Poincaré 1908 169]

On retrouve quelques lignes plus loin l'opposition entre quantitatif et qualitatif. L'étude qualitative des équations différentielles ne renvoie qu'à la « forme générale de la courbe » [Poincaré 1908 173] ; quant à l'aspect quantitatif, ce n'est pas leur caractère local qui condamne les développements des solutions en série entière :

Une semblable solution aujourd'hui ne nous satisfait plus, et cela pour deux raisons ; parce que la convergence est trop lente, et parce que les termes se succèdent sans obéir à aucune loi ; [Poincaré 1908 173]

Les quelques grands concepts unificateurs, profonds ou prometteurs, que Poincaré donne en exemple dans cette conférence sur l'avenir des mathématiques sont la convergence uniforme en analyse [Poincaré 1908 171], puis les concepts de « groupe et d'invariant » [Poincaré 1908 172].

Le thème du dépassement du local qui trouvait, entremêlé d'autres thèmes formant un réseau, une place assez importante dans l'*Analyse* de 1901 disparaît ici complètement, alors que d'autres éléments du réseau – le qualitatif, l'*Analysis situs* – demeurent. Poincaré résume en conclusion les deux objectifs de sa conférence sur l'*Avenir des mathématiques* :

Je pense que ces exemples auront suffi pour vous montrer par quel mécanisme les sciences mathématiques ont progressé dans le passé, et dans quel sens elles doivent marcher dans l'avenir. [Poincaré 1908 182]

Le passage du local au global n'est présent ni dans la dimension paradigmatique – exemples remarquables – ni dans la dimension programmatique d'un chantier décisif pour l'« avenir des mathématiques ».

II. Uniformisation et revêtements.

On a vu Riemann n'utiliser de surface que pour uniformiser des fonctions dont la multivocité est finie : la fonction prenant pour chaque valeur de la variable complexe x un nombre fini de valeurs devenait fonction uniforme d'une nouvelle variable, géométrique, un point sur une surface au-dessus du plan. Poincaré entreprend en 1883 d'utiliser les méthodes allemandes abstraites, surface de Riemann et analyse à la Weierstrass, pour établir un théorème d'uniformisation très général. L'importance et, dans une certaine mesure, les maladresses de cette démonstration lui valent une série de remarques critiques. Le long travail, en partie collectif, sur cette démonstration initiale débouche en 1907 sur un long article dont la comparaison avec celui de 1883 permet de faire ressortir la maturation des concepts comme du langage.

1. *Sur un théorème général de la théorie des fonctions* (1883).

i. Une stratégie riemannienne.

Le point de départ de la démonstration de Poincaré dans *Sur un théorème général de la théorie des fonctions* [Poincaré 1883a] est doublement riemannien : Riemann a montré comment remplacer une fonction multivoque de x par une fonction univoque de O , point générique d'une surface au-dessus du plan ; il a aussi établi, dans le §21 de sa *Théorie des fonctions d'une variable complexe*, que toute surface de Riemann simplement connexe, à bord, est conformément équivalente au disque unité d'un plan complexe. Si la surface uniformisante était simplement connexe, on pourrait combiner ces deux propositions pour uniformiser une fonction multivoque de x au moyen d'une nouvelle variable *complexe*. Le « théorème général » que Poincaré souhaite démontrer est formulé ainsi :

Soit y une fonction analytique quelconque de x , non uniforme. On peut toujours trouver une variable z telle que x et y soient fonctions uniformes de z . [Poincaré 1883a 57]

La démonstration va procéder en deux temps nettement distincts : associer à une telle fonction une surface de Riemann *simplement connexe* ; établir ensuite que cette dernière est conformément équivalente à un disque.

Sur les treize pages de l'article de 1883, une seule suffit pour construire une surface de Riemann qui soit à la fois simplement connexe et uniformisante pour une (ou une famille) de

fonctions multivoques d'une variable complexe. Fonctions multivoques et surfaces de Riemann sont décrites de la même façon. On pourrait imaginer une description statique et ensembliste : à une valeur de x sont associées des valeurs par une fonction multiforme, et des points de la surface au-dessus du point d'affixe x ; Poincaré utilise une description en termes de cheminement, parcours de la surface et prolongement de fonctions :

Considérons m fonctions de x ,

$$y_1, y_2, \dots, y_m$$

analytiques, non uniformes en général. Ces fonctions seront complètement définies lorsque l'on connaîtra, non seulement la valeurs de x , mais encore le chemin par lequel la variable x atteint cette valeur en partant du point initial O .

Nous considérerons la variable x comme se mouvant non sur un plan, mais sur une surface de Riemann S . Cette surface de Riemann sera formée de feuillet plans superposés comme dans les surfaces de Riemann, à l'aide desquelles on étudie les fonctions algébriques : seulement ici le nombre de feuillets sera infini. [Poincaré 1883a 58]

Poincaré ne partage pas le scrupule Riemannien qui interdisait de donner le même nom, d'une part à la variable complexe et au point qu'elle repère dans un plan, d'autre part au point de la surface et au point du plan au-dessus duquel il se trouve : tout s'appelle ici x , ce qui n'est finalement qu'une conséquence naturelle de l'idée selon laquelle travailler sur une surface de Riemann c'est simplement changer de point de vue sur le plan, considérer qu'un point porte non seulement une valeur qui le repère mais aussi un élément/germe de fonction. L'étude du relèvement des chemins du plan à la surface de Riemann était chez Riemann un mode de *description* de celle-ci, il devient chez Poincaré un mode de définition :

Traçons dans le plan un contour fermé quelconque C partant d'un point initial x quelconque et revenant finir à ce même point x . La surface S sera complètement définie, si nous disons à quelles conditions le point initial et le point final de ce contour devront être regardés comme appartenant à un même feuillet ou à des feuillets différents. [Poincaré 1883a 58]

La surface est décrite d'abord comme un ensemble de *points*, points eux-mêmes repérés par des points dans le plan et des classes de chemins fermés dans le plan. Les différences entre les formulations de Riemann et de Poincaré ne relèvent pas d'une simple question de style, elles traduisent aussi une différence fondamental d'objectif : Riemann associait à une fonction multivoque *la* surface qui l'uniformisait ; Poincaré va montrer que parmi *les* surfaces uniformisant la fonction il s'en trouve une simplement connexe. On dépasse ainsi le simple

changement de point de vue sur un objet pour passer du côté de la technique de formation d'un type d'objets. La multiplicité des surfaces possibles révèle un caractère partiellement conventionnel des « conditions » auxquelles « le point initial et le point final devront être regardés comme identiques ». Poursuivons :

Or il y a deux sortes de contours C ;

1° Ceux qui sont tels que l'une au moins des m fonctions y ne revient pas à sa valeur initiale quand la variable x décrit C ;

2° Ceux qui sont tels que les m fonctions y reviennent à leurs valeurs initiales quand la variable x décrit le contour C . [Poincaré 1883a 58]

En convenant que le chemin est fermé sur la surface (i.e. que le point initial et le point final doivent être regardés comme identiques) si et seulement s'il vérifie la condition 2, on définit la surface minimale uniformisant les m fonctions. Mais on ne contrôle pas la topologie de la surface ainsi instituée :

Parmi les contours de la deuxième sorte, je distinguerai encore deux espèces :

1° C sera de la première espèce, si l'on peut, en déformant ce contour d'une façon continue, passer à un contour infinitésimal de telle façon que le contour ne cesse jamais d'être de la seconde sorte ;

2° C sera de la seconde espèce dans le cas contraire.

Eh bien, le point initial et le point final de C appartiendront à des feuillet différents si ce contour est de la première sorte, ou de la seconde espèce de la seconde sorte. Ils appartiendront au même feuillet si C est de la première espèce de la seconde sorte.

[Poincaré 1883a 58]

On peut faire plusieurs remarques. Premièrement, nous notions le caractère assez ensembliste de la description de la surface comme ensemble de points ; on voit toutefois que la règle est moins formulée en termes d'identité et de différences de points qu'en termes d'appartenance ou non à un même feuillet : en l'absence de toute explicitation de la trivialité locale de la situation, la distinction entre identification de points et recollement de petits morceaux de surface est invisible. Remarquons ensuite que la construction en deux temps pourrait s'interpréter ainsi : définition, au moyen de la distinction entre les deux sortes de contours fermés, de la surface de Riemann minimale S_1 uniformisant les fonctions y ; puis construction purement topologique d'une surface S_2 au-dessus de S_1 , utilisant l'homotopie à extrémité fixe des chemins *sur* S_1 pour définir les points de S_2 . La formulation de Poincaré, semblable sur ce point à celle de Riemann, distingue toutefois mal les surfaces et le plan de base : les contours de la première espèce sont moins des contours *sur* une surface intermédiaire que des contours

de la seconde sorte *dans* le plan. Remarquons enfin que si l'aspect « trivialité homotopique » est clairement présent, l'aspect « groupe » fait défaut ; en toute rigueur, il faut autoriser la composition des chemins fermés pour que le passage au quotient par la relation de trivialité homotopique donne la bonne règle d'identification des points. Faute de cet aspect « composition » ou d'une extension explicite de la règle de trivialité en une règle générale d'équivalence des chemins fermés, un chemin γ homotopiquement non trivial et un chemin distinct mais homotope à γ aboutissent, selon Poincaré, à deux points distincts de la surface.

Que la surface ainsi construite soit simplement connexe, voilà qui ne fait pas de doute pour Poincaré :

La surface de Riemann est alors complètement définie. Elle est simplement connexe et ne diffère pas, au point de vue de la Géométrie de situation, de la surface d'un cercle, d'une calotte sphérique ou d'une nappe d'un hyperboloïde à deux nappes. [Poincaré 1883a 59]

Cette série d'exemples permet sans doute de faire comprendre que ni la courbure ni la finitude n'entrent en compte en « Géométrie » de situation. Quant à savoir si la présence d'un bord joue un rôle, Poincaré n'en dit rien, pas plus qu'il ne cite la sphère comme surface simplement connexe. Les problèmes de bord sont, ici, passés sous silence. Ainsi, rien n'est dit sur le domaine des fonctions y initialement données : ces fonctions sont supposées analytiques et non uniformes mais on ne sait si elles sont définies dans tout le plan ou non, et, dans le cas où certaines seraient à espace lacunaire, comment adapter la définition à la variété des domaines de base. Un autre élément surprend quand on compare avec la description riemannienne de la surface de Riemann d'une fonction algébrique. L'étude du relèvement des chemins entourant les points de ramification jouait alors un rôle essentiel, alors qu'aucun point du plan ne semble ici jouer de rôle particulier. Il est vrai que Riemann n'associait de surface qu'aux fonctions à multivocité finie, explicitement en 1857 et implicitement en 1851 ; il supposait en outre qu'aux points de ramification la fonction se comportait raisonnablement, en général comme $z^{1/n}$ (auquel cas il autorisait un petit changement de carte locale), au pire comme $\log z$. C'est un cas infiniment plus général que Poincaré envisage ici, puisqu'il souhaite uniformiser *toute* fonction analytique : il ne souhaite pas entrer dans l'étude de ce que peut être un point singulier dans ce cas. Une note en fin d'article vient régler ce point :

Il résulte de la manière dont cette surface S a été construite qu'autour de chaque point singulier viennent s'échanger une infinité de feuillets. Nous ne regarderons pas ces points singuliers comme faisant partie de la surface de Riemann, mais seulement de sa frontière. [Poincaré 1883a 69]

Sous des hypothèses restrictives et dans un langage un peu impénétrable, Riemann arrivait à montrer que les points de la surface de Riemann au-dessus des points singuliers dans le plan étaient des points topologiquement ordinaires de la surface de Riemann, où l'étude analytique nécessitait un petit changement de variable. Cette inclusion des points de ramification, cette distinction entre topologie ordinaire et comportement singulier mais maîtrisable de la carte globale disparaissent dans le cadre général choisi par Poincaré. Ne maîtrisant pas le comportement de la carte globale aux points singuliers de sa surface, il les exclut, s'assurant qu'en tout point étudié la carte x est une bonne carte locale. Une attention rigoureuse à la cohérence des définitions pourrait conduire à remarquer qu'il faut les exclure dès le départ : la distinction entre contours de la première et de la deuxième sorte suppose un prolongement analytique non ambigu le long de ces contours, ambiguïté à laquelle conduirait le passage par un point singulier. L'évocation par Poincaré de leur présence à la « frontière » de la surface les montre toutefois plus comme des points exclus *après* la construction de S ; inutile de souligner que l'exclusion de certains points à la dernière étape détruit la simple connexité. On remarque donc dans l'ensemble que Poincaré ne prend pas en compte ce type de problème, ni dans la définition initiale ni dans la rapide précision finale sur l'exclusion des points singuliers. Dans tous les cas, l'exclusion de ces points va nuire à la portée du théorème : on aura uniformisé x et y , sauf pour certains couples de valeurs exceptionnelles. Cet aspect n'est pas évoqué par Poincaré.

ii. Représentation conforme des surfaces simplement connexes : entre Riemann et Weierstrass.

La quasi-totalité du texte de Poincaré est consacrée à la démonstration d'existence et l'étude des propriétés d'une fonction sur S réalisant, en termes anachroniques, une bijection conforme avec le disque unité ouvert du plan complexe.

Prenons un peu de temps pour rappeler le modèle fournit par Riemann, au §21 de sa *Théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe*. Le théorème y est énoncé ainsi :

Deux surfaces planes, simplement connexes données, peuvent toujours être rapportées l'une à l'autre, de telle sorte qu'à chaque point de l'une corresponde un point unique de l'autre dont la position varie d'une manière continue avec celle du premier, et de telle sorte que les plus petites parties correspondantes des surfaces soient semblables ; de plus, pour UN point de l'intérieur et pour UN point de l'encadrement de la surface, les points correspondants de l'autre surface peuvent être donnés quelconques ; mais

alors la correspondance est déterminée par cela même pour tous les points. [Riemann 1898 49]

L'enchaînement des trois propriétés, bijectivité, continuité, conformité, est parfaitement clair et rigoureux. Notons toutefois que l'expression de la bijectivité n'est pas aisément distinguable d'une condition d'injectivité : il faut lire « l'une et l'autre » comme une référence non orientée, les deux surfaces sont permutable dans la relation. Notons ensuite que la surface considérée par Riemann possède un bord, comme c'est le cas dans tout l'exposé de 1851 où le couple surface/contour joue un rôle central. La fin de l'énoncé l'inscrit clairement dans la démarche de recherche des conditions nécessaires et suffisantes de détermination d'une fonction, d'étude précise des degrés de liberté dans chaque problème. Passons à la démonstration. Après avoir fait remarquer que l'existence d'une telle représentation définit ce nous nommerions une relation d'équivalence, Riemann conclut qu'il suffit de montrer que toute surface simplement connexe T est conformément équivalente à un disque plan K centré sur l'origine O et de rayon 1. L'application du principe de Dirichlet (§18) permet d'établir l'existence d'une fonction jouant le rôle du logarithme de la fonction cherchée : soit Θ un petit cercle sur T centré sur le point O_0 que l'on souhaite voir appliqué sur O , et l une ligne simple reliant O_0 au point O' du contour de T dont on souhaite contrôler l'image sur le contour de K ; il existe une unique « fonction de z » sur T prolongeant $\log(z-z_0)$ dans le disque Θ , de partie réelle nulle sur le contour de T , et présentant le long de l une « discontinuité » imaginaire pure $2i\pi$. Soit $t = m+ni$ cette fonction, Riemann veut montrer que m et n fournissent l'analogue d'un repérage polaire sur T . L'essentiel de l'argument consiste en l'étude des lignes de niveau de la partie réelle : la simple connexité de T permet de montrer que les courbes du type $m = \text{const.}$ sont des courbes fermées sans auto-intersection, s'entourant les unes les autres autour du point O_0 (où $m = -\infty$ par hypothèse) jusqu'au contour de T (où $m = 0$ par hypothèse). On voit alors aisément que sur l'une de ces courbes de niveau, la partie imaginaire n varie simplement de 0 à 2π (à $2k\pi$ près, k entier). Conclusion :

Posons maintenant $e^t = w$, e^m et n seront alors les coordonnées polaires du point Q relativement au centre du cercle K pris comme origine. [Riemann 1898 52]

La démonstration proposée par Poincaré dans *Sur un théorème général de la théorie des fonctions* consiste pour l'essentiel, une fois la surface S construite, en l'adaptation de cette démonstration de Riemann après que deux éléments du contexte ont varié. Premier élément, Poincaré ne s'appuie pas sur le *principe de Dirichlet* tel que Riemann l'a démontré, mais sur

la version démontrée par Schwarz en 1870. Poincaré en résume ainsi la version avec singularité logarithmique, pour une partie de plan ou une surface de Riemann de contour C :

Je dirai qu'une fonction u devient logarithmiquement infinie au point $\xi = a, \eta = b$ quand la différence

$$u + L\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2}$$

reste holomorphe au voisinage de ce point.

En vertu du théorème de M. Schwarz, on pourra aussi trouver une fonction u qui satisfera à l'équation $\Delta u = 0$, qui prendra des valeurs données le long de C et qui restera holomorphe à l'intérieur de C , à l'exception de un ou plusieurs points donnés où elle deviendra logarithmiquement infinie. [Poincaré 1883a 58]

L désigne bien sûr le logarithme. Notons que « satisfera à l'équation $\Delta u = 0$ » renvoie non à tous les points de la surface bordée par C , puisque des singularités logarithmiques sont présentes, mais au comportement *général* de la fonction u , à l'exception éventuelle de points ou de lignes singulières ; c'est le terme de « holomorphe » qui renvoie explicitement à l'ensemble des points de régularité et appelle la désignation explicite des points exceptionnels. Quelle que soit la méthode de démonstration, à la Dirichlet/Riemann ou à la Schwarz, la conclusion est la même et elle seule intervient dans le travail de Poincaré. Le deuxième élément distinguant la démonstration de Poincaré de celle de Riemann est lui, par contre, essentiel : Poincaré doit adapter la démonstration de Riemann au cas d'une surface *sans bord*. Si la question du bord – que ce soit son appartenance à la surface S ou sa nature (courbes, points exclus) – était laissée dans une certaine ambiguïté dans le passage consacré à la construction de la surface S , toute la stratégie mise en place par Poincaré va consister à utiliser un résultat de Schwarz sur les surfaces à bord pour obtenir la même conclusion – existence d'une fonction réelle harmonique positive sauf pour une unique singularité logarithmique en un point O – sur une surface sans bord. Poincaré utilise un recouvrement de S par une suite croissante de surfaces à bord :

Notre surface de Riemann S étant simplement connexe, nous pourrons y tracer une infinité de contours C s'enveloppant mutuellement et enveloppant le point O . Par chacun des points de la surface S (excepté O) passera un de ces contours et un seul. [Poincaré 1883a 59]

Notons que si l'exhaustivité du recouvrement est explicitée (« par chacun des points »), il s'agit moins d'un recouvrement par des domaines que d'un système de lignes de niveau, renvoyant au même type d'images (en plus simple) que celle des systèmes topographiques du

travail sur les courbes définies par une équation différentielle. Le contour et le domaine forment d'ailleurs une paire apparemment indissociable, la notion de contours « s'enveloppant mutuellement » renvoyant aux deux à la fois ; on notait déjà ce mode de désignation de la surface par son contour chez Riemann. Poincaré choisit une suite (C_n) de tels contours et est confronté au problème suivant. Pour chaque C_n , le théorème de Schwarz garantit l'existence d'une fonction u_n , définie sur le domaine limité par C_n , identiquement nulle sur le contour C_n , harmonique sur le domaine sauf en O où elle présente une singularité logarithmique. Poincaré va montrer que cette suite de fonctions est croissante et converge vers une fonction u , définie sur toute la surface S , et harmonique sauf pour la singularité en O . Le lemme suivant, que Poincaré ne redémontre pas, joue un rôle essentiel :

Si une fonction u satisfait à l'équation $\Delta u = 0$, si elle est positive le long d'un contour C ; si de plus en tous les points intérieurs à ce contour, elle est ou holomorphe ou logarithmiquement infinie, elle sera positive en tous les points intérieurs au contour C .
[Poincaré 1883a 61]

Ce lemme permet de prolonger les inégalités entre fonctions harmoniques du bord vers le domaine. Les u_n se comportant en O comme $-\log r$ sont donc des fonctions positives, la suite des u_n est donc aussi une suite croissante. Pour démontrer la convergence des u_n vers une fonction u , Poincaré cherche à les majorer. L'introduction d'une fonction majorante joue un rôle important dans l'histoire de cette démonstration : dans un premier temps, Poincaré utilise la théorie des fonctions elliptiques pour s'assurer de l'existence d'une fonction ψ , multiforme, holomorphe *sauf en trois points* que l'on peut choisir, de module inférieur à un et s'annulant en O ; la fonction $t = \log \operatorname{mod} \frac{1}{\psi}$ est positive, harmonique pour une singularité logarithmique bien maîtrisée en O , et présentant trois autres points singuliers. Pour passer de la donnée d'une fonction auxiliaire dans le plan complexe à la surface S , et pour utiliser un lemme s'appliquant aux fonctions uniformes, Poincaré doit changer de surface de Riemann, ou plutôt :

Je supposerai que la fonction $y_m (\dots)$ soit précisément ψ . Si cela n'était pas (\dots) , on l'y adjoindrait. [Poincaré 1883a 60]

On voit ici pourquoi, alors que le théorème à démontrer ne concerne qu'une fonction analytique, Poincaré construit une surface simplement connexe S associée à une famille (finie) de telles fonctions : quand bien même on ne partirait que d'une seule fonction y , on devrait ensuite modifier la surface pour introduire la fonction auxiliaire ψ . Un point important

réside dans le fait que ψ présente dans le plan trois points singuliers, qui seront, Poincaré le précise en note, « en dehors de la surface de Riemann » [Poincaré 1883a 69]. La positivité de t sur S garantit que t majore les u_n : la suite des u_n est croissante et majorée, elle converge donc vers une fonction u . Ici encore se présente une petite difficulté dans le passage du plan à la surface S : t est logarithmiquement infinie en O (dans le plan), mais S possède une infinité de points au-dessus de O – dont on découvre en cours de route qu'ils appartiennent, eux, à la surface S – ; t possède donc une infinité de points singuliers logarithmiques, et Poincaré doit avoir recours à une petite astuce pour y majorer la suite des u_n , nous n'entrons pas ici dans le détail.

Une fois établie l'existence d'une fonction u sur la surface S sans bord, il reste démontrer qu'elle réalise bien l'application conforme de S sur un disque ouvert. Poincaré se lance pour ce faire dans une analyse à la Weierstrass. Une première démonstration l'amène à couper des ε en trois pour montrer que la fonction limite u est continue. La propriété démontrée n'est d'ailleurs pas exactement la continuité en chaque point de S , mais ce que nous nommerions la continuité localement uniforme : un lemme de majoration issu de la théorie des fonctions harmoniques (et l'inégalité des accroissements finis) permet de montrer que, dans un disque donné, pour tout ε (strictement) positif, on trouve une distance ρ telle que les valeurs de u diffèrent de moins de ε dès que les points du disque sont distants de moins de ρ . Poincaré démontre ensuite, pour les u_n et leurs dérivées partielles, ce qu'il nomme la convergence uniforme : la série (2) étant $u = u_1 + (u_2 - u_1) + \dots$

Nous avons vu que la série (2) est convergente, mais cela ne suffirait pas pour ce que nous avons en vue ; il faut encore faire voir qu'elle est uniformément convergente (*gleichmässig*). En d'autres termes, il faut montrer qu'autour de chacun des points de la surface de Riemann S , on peut trouver une région P jouissant de la propriété suivante ; on pourra prendre n assez grand pour que la différence $u - u_n$ reste plus petite que ε à l'intérieur de la région P , et cela quelque petit que soit ε . [Poincaré 1883a 63]

Ici encore, ce que Poincaré nomme convergence uniforme est la convergence localement uniforme. La démonstration repose sur le même lemme de majoration uniforme que pour la continuité et montre une maîtrise rigoureuse de l'enchaînement des déterminations des variables auxiliaires ; le fait qu'un domaine carré puisse être découpé en un nombre *fini* de carrés suffisamment petits joue un rôle essentiel et parfaitement clair. De ces résultats de convergence uniforme découlent aisément les autres propriétés de la fonction u : elle est harmonique sauf en O (du moins au point au-dessus de O où l'on a conservé la singularité

logarithmique) ; la simple connexité de S permet de considérer u comme la partie réelle d'une fonction holomorphe $u+iv$ (et u_n comme partie réelle de u_n+iv_n), v demeurant définie à un multiple entier de 2π près, à cause de la singularité logarithmique. La fonction cherchée est alors, comme chez Riemann, $z = e^{-(u+iv)}$; elle ne présente plus aucune multiformité. De l'injectivité des $z_n = e^{-(u_n+iv_n)}$ (« Il est évident, d'après la définition de la fonction z_n , que cette fonction ne peut prendre qu'une seule fois la même valeur à l'intérieur d'un contour C_n » [Poincaré 1883a 68]) et de l'uniformité de la convergence, on conclut par un argument classique de calcul de résidus à l'injectivité de z . Si, en s'écartant des notations de Poincaré en nommant O le point générique de la surface S , z est une fonction analytique injective de O , donc, par inversion, O est une fonction analytique univoque de z . Si le résultat d'uniformisation des fonctions analytiques par une nouvelle variable complexe z est ainsi obtenu, la nature de l'image de la fonction z ne fait l'objet d'aucune étude par Poincaré. Le rapprochement avec la démonstration de Riemann et le fait que la suite des u_n tend vers 0 à l'infini invitent implicitement à penser que le domaine de la variable uniformisante z est le disque unité.

Par les idées qu'il introduit, Poincaré ramène, comme l'écrit Koebe en 1908 [Koebe 1908 26], le problème de l'uniformisation à celui de la représentation conforme. Les idées y sont bien : construction d'une surface au moyen de classes d'équivalences de chemins ; choix des critères d'équivalence permettant non seulement d'uniformiser des fonctions multiformes, mais aussi de rendre la surface simplement connexe, approximation d'une surface simplement connexe sans bord par une suite croissante de disques sur lesquels faire jouer les versions usuelles des théorèmes d'existence de fonctions harmoniques. On est toutefois frappé par le contraste entre une partie géométrique traitée rapidement et presque avec désinvolture, et une partie d'analyse qui montre une maîtrise des concepts et méthodes de l'analyse à la Weierstrass, en ε - δ ; on peut penser qu'en 1883, indépendamment de la situation particulière de Poincaré, les deux domaines n'ont pas atteint le même degré de maturité : alors que Poincaré progresse en analyse dans un champ balisé par des modèles et des contre-exemples, il propose un prolongement audacieux des méthodes géométriques riemanniennes. Dans les deux cas il manipule un langage qui, s'il le permet, n'oblige pas à désigner les points singuliers ; l'attention minutieuse portée par Riemann ou Neumann aux points de ramification n'a pas ici sa contrepartie, et il semble qu'on peut sans conséquence exclure à chaque étape certains points singuliers, dont on sait d'ailleurs mal à quel espace ils appartiennent ni quand

exactement on les exclut. C'est une maturation considérable sur ces points que montre la comparaison des textes de 1883 et 1907.

2. *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques* (1907).

Aux douze pages de l'article de 1883 répondent les soixante-treize pages de l'article que Poincaré fait paraître en 1907 dans *Acta Mathematica* [Poincaré 1907b]. Certes Poincaré y aborde un point non traité en 1883 : celui du lien entre les différentes uniformisantes possibles, la notion de fonction fuchssoïde généralisant celle de fonction fuchsienne. L'essentiel de l'article de 1907 est pourtant consacré à la reprise des résultats énoncés en 1883 et à leur démonstration dans un cadre qui résiste aux critiques d'Osgood ou de Hilbert. L'article s'ouvre d'ailleurs sur le rappel de ces points faibles :

1° Pour tout point de la surface de Riemann pour lesquels les fonctions données existent, les fonctions uniformisantes se comportent régulièrement. Il y a exception pour trois de ces points qui constituent ce que M. Hilbert a appelé des *Ausnahmsstellen*. (...)

2° Mes procédés permettaient bien de montrer que l'on pouvait faire la représentation conforme de ma surface de Riemann sur une aire intérieure à un cercle ; mais on ne voyait pas que cela fut possible sur un cercle ;

(...) 3° L'introduction de la fonction auxiliaire, arbitraire dans une large mesure, donnait à la solution un caractère artificiel dont il convenait de se débarrasser, et pour cela il fallait démontrer que toute surface de Riemann, simplement connexe, est représentable soit sur un cercle, soit sur une sphère pointée (ou ce qui revient au même sur le plan tout entier. [Poincaré 1907b 70]

Nous concentrerons notre attention sur la partie géométrique consacrée aux surfaces de Riemann.

i. L'idée de surface de Riemann, selon Poincaré.

Alors qu'en 1883 Poincaré construisait en quelques lignes l'objet dont il avait besoin pour sa démonstration, il prend le temps en 1907 d'exposer une théorie de ce *type d'objets*, en discutant avec soin les étapes et les liens entre les notions.

Considérons dans un premier temps la notion la plus classique, celle de surface de Riemann (au-dessus du plan) d'une fonction analytique. Poincaré prend comme point de départ la

notion weierstrassienne d'élément de fonction, « une série de puissances R convergeant à l'intérieur d'un cercle C » [Poincaré 1907b 73]. Il avait déjà utilisé cette notion dans un article de 1888 *Sur une propriété des fonctions analytiques* [Poincaré 1888] pour démontrer que l'ensemble des valeurs que peut prendre, pour une valeur donnée de la variable, une fonction analytique multiforme est dénombrable (de la « première puissance » au sens de Cantor). L'enchaînement est classique : notion d'éléments de fonction contigus, chaîne (finie) d'éléments de fonction contigus ; on obtient ainsi le domaine principal d'une fonction, nous dit Poincaré, dont le résultat de 1888 montre qu'on peut le décrire en n'utilisant qu'une famille dénombrable d'éléments de fonctions. Il lève quelques lignes plus loin une ambiguïté : le domaine principal est *complet* si la fonction analytique ne peut être prolongée à un domaine plus grand, *incomplet* dans le cas contraire, auquel cas on peut considérer le domaine *complété*. Le polissage conceptuel nécessite encore que la notion de domaine principal d'une fonction analytique soit indépendante du système dénombrable d'éléments choisi pour le représenter ; il choisit ici une formulation purement topologique de l'équivalence :

Cette notion de l'équivalence de deux domaines peut se définir sans faire intervenir la fonction F . Deux domaines seront *équivalents* quand on pourra établir entre les points de l'un et ceux de l'autre une correspondance biunivoque, de telle façon qu'à tout point de l'autre corresponde un point de l'autre et un seul, à deux points identiques de l'un deux points identiques de l'autre, à deux points non identiques de l'un, deux points non identiques de l'autre ; et à deux points infiniment voisins de l'un, deux points infiniment voisins de l'autre. [Poincaré 1907b 76]

On n'avait jamais vu la notion de bijectivité définie avec une telle prolixité. Notons toujours la formulation non orientée : il ne s'agit pas d'une application d'un espace vers un autre, et de l'application réciproque, mais d'un lien entre deux espaces jouant des rôles symétriques. Notons aussi une difficulté proprement conceptuelle. Il s'agit pour Poincaré de montrer que la notion d'équivalence de domaines, fussent-ils donnés au départ comme domaines de fonctions analytiques, peut être définie indépendamment des fonctions de départ ; faire une théorie des domaines, et non seulement une théorie des domaines de fonctions. Il ne réussit toutefois pas dans ce nouveau cadre à donner une notion d'équivalence analytique, seule l'équivalence topologique est mentionnée : la surface associée à une fonction analytique est aussi une surface topologique abstraite, pas encore une variété analytique abstraite.

Poincaré élargit le cadre en permettant d'associer à une fonction d'autres domaines que son domaine principal complet, puis de considérer d'autres domaines au-dessus du plan que des domaines associés à une fonction. On se souvient qu'en 1883, la surface de Riemann était

obtenue en déclarant la condition à laquelle des points du plan devaient être regardés comme appartenant au même feuillet de la surface ; ces conditions étaient formulées en termes de chemins fermés. En 1907, Poincaré revient en détail sur ces conventions d'identification des points. D'abord dans le cas de la surface associée à une fonction analytique :

(...) voyons ce que nous devons entendre par le domaine D d'une fonction analytique F quelconque. C'est l'ensemble des cercles de convergence C relatifs aux différents éléments de F , mais avec la convention suivante : *pour que deux points du domaine soient regardés comme identiques, il ne suffit pas qu'ils aient même coordonnées.* Soient E et E' deux éléments de la fonction, C et C' les cercles de convergence correspondants ; R et R' les deux séries correspondantes, soient M et M' deux points considérés comme appartenant le premier à C , le second à C' , et ayant d'ailleurs mêmes coordonnées ; les deux points coïncident donc au point de vue géométrique, mais il ne s'ensuit pas qu'ils soient identiques à notre nouveau point de vue ; de l'un de ces deux points comme centre, je décris un cercle K assez petit pour être contenu tout entier tant dans C que dans C' ; si les deux séries R et R' ont même somme à l'intérieur de K , les deux points M et M' seront regardés comme identiques, sinon non.
[Poincaré 1907b 73]

Cette convention (et la condition de maximalité donnée un peu plus loin) définit le domaine principal D d'une fonction analytique. Poincaré montre ensuite comment faire varier la convention pour obtenir de nouveaux domaines :

On pourra faire une convention différente ; on pourra convenir que l'égalité des séries R et R' reste une condition *nécessaire* pour que les deux points M et M' soient identiques, mais que cette convention ne soit plus suffisante. (...) On définira ainsi un autre domaine D' , nous pourrions appeler D le *domaine principal* de la fonction F ; les divers domaines D' seront les *domaines secondaires* de cette même fonction. Alors à chaque point d'un domaine secondaire D' correspondra un point et un seul du domaine principal D , mais à un point de D pourront correspondre plusieurs points de D' (...).
[Poincaré 1907b 74]

Remarquons le mouvement inverse du mouvement de passage d'un ensemble à un ensemble quotient : lorsqu'on construit un ensemble quotient on part d'un premier ensemble, plus « gros », et on décide d'y regarder une relation d'équivalence comme la relation d'égalité ; on affaiblit la relation d'égalité initiale en lui substituant ce qui n'était qu'une relation d'équivalence. Poincaré part de l'ensemble le plus petit, le plan complexe ou ensemble des points « au point de vue géométrique », et change de point de vue en imposant aux points une

relation d'équivalence plus stricte que l'égalité. Là où un passage au quotient « colle » des points ensembles, Poincaré – proche, ici, de Riemann – décolle tout d'abord des points pour faire surgir des feuilletés là où il ne semblait y avoir qu'un morceau de plan ; dans un second temps on précise la relation d'équivalence qui doit faire voir comme identiques des points qui *de droit* pourraient ne pas l'être. On pourrait faire une lecture ensembliste du premier moment, le décollement, dans le texte de 1883 : le passage au quotient, deuxième moment, intervient sur un espace de chemins. Le travail est, en ce sens, moins ensembliste en 1907 : le recollement a lieu moins dans un ensemble que sur fond du droit absolu à ne pas considérer comme identique à lui-même chaque point du plan. Ce droit était rapproché, chez Riemann, de la notion première de grandeur variable de type complexe, identifiée à la notion géométrique de grandeur variable continue à deux degrés de liberté ; ce point est absent dans les textes de Poincaré. Signalons aussi qu'on ne trouve chez Poincaré aucune métaphore de recollement ou de dépliement. Après que Poincaré a évoqué la possibilité de considérer d'autres relations que, pour le dire en termes anachroniques, l'égalité des germes de fonction analytique, il doit donner quelques précisions sur le type de relations permises. On voit ici qu'il donne les éléments d'une théorie générale, dans laquelle il ne construit pas un objet particulier dans un but précis mais décrit une série de règles du jeu définissant un type d'objets. Le travail passe donc par l'énoncé de ce qu'on pourrait nommer des axiomes de recollement :

Pour définir un domaine secondaire D' , nous devons, d'après ce qui précède, énoncer les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux de ses points M et M' doivent être regardés comme identiques. Le choix de ces conditions reste arbitraire dans une très large mesure, il est cependant soumis aux restrictions suivantes : soient deux points M et M' ayant mêmes coordonnées et appartenant respectivement à deux éléments de fonctions ; soient C et C' les deux cercles, R et R' les deux séries correspondant à ces deux éléments. Il s'agit de savoir à quelles conditions les deux points M et M' seront identiques :

1° La condition que $R = R'$ dans le voisinage des points M et M' n'est plus suffisante mais reste nécessaire.

2° Si les points M et M' ont même coordonnées, il y aura une infinité de couples de points N et N' appartenant respectivement à C et à C' et qui auront mêmes coordonnées. Si M et M' sont identiques il devra en être de mêmes pour tous les couples de points tels que N et N' .

3° Deux points identiques à un même troisième sont identiques entre eux.

4° Si nous considérons deux éléments *quelconques* de la fonction F , et que les cercles correspondants soient C et C' ; il faudra que l'on puisse passer de l'un à l'autre par une *chaîne* d'un nombre fini d'éléments, dont les cercles soient respectivement $C, C_1, C_2, \dots, C_n, C'$; et de telle façon que si l'on considère deux cercles consécutifs de cette chaîne, il y ait un point intérieur à l'un qui soit identique à un point intérieur à l'autre.
[Poincaré 1907b 74]

La condition 1 permet de conserver le lien avec le plan et avec une fonction analytique ; pour employer un vocabulaire riemannien, d'ailleurs non repris par Poincaré, le nouveau domaine sera « étendu au-dessus » du domaine principal D d'une fonction analytique, D étant lui-même « étendu au-dessus » du plan complexe. La condition 2 présente une importante nouveauté : elle impose que dans l'univers (on n'ose pas dire « l'ensemble ») des points librement décollés par la pensée, l'identification de deux points ne peut aller sans l'identification des points voisins ; le recollement ne peut être purement ponctuel, il doit légèrement s'étaler, ce qu'on peut aussi lire comme une condition de locale trivialité de l'espace obtenu : il doit présenter les mêmes solidarités locales que les points du plan de base. Rien n'était explicite sur ce point en 1883, quelque bonne volonté qu'on veuille mettre à y interpréter points et feuillettes. Notons aussi que dans la définition de la notion de « variété » dans *l'Analysis situs* de 1895, la locale trivialité n'était pas explicitée, en dépit d'une présence implicite sous forme de conditions jacobiniennes pour les variétés définies par des systèmes d'équations ou de paramétrages, sous forme de condition sur l'action « proprement discontinue » d'un groupe au §11. La condition de connexité par arc de D' donnée au point 4 est certes claire, bien de formulation maladroite si on s'en tient à un canon ensembliste : l'ensemble des points est-il l'ensemble des éléments de fonctions F – auquel cas on travaille sur le domaine principal D – ou les points d'un domaine plus déplié D' ? Les cercles sont-ils des cercles dans le plan, sur D ou sur D' ? Poincaré est ici dans la droite ligne de Riemann, les surfaces étant moins des ensembles de points à construire que des changements de point de vue sur les points du plan. Son analyse des systèmes de conditions permettant ce changement de point de vue lui permet par contre de s'affranchir de la donnée d'une fonction analytique F initiale :

On voit aussi la possibilité de définir un domaine, indépendamment de toute fonction F . Il suffit de se représenter un ensemble dénombrable de cercles C_1, C_2, \dots , en convenant que deux points appartenant à deux de ces cercles peuvent ne pas être identiques bien qu'ayant mêmes coordonnées, ou même que deux cercles peuvent coïncider sans être considérés comme identiques. Il faut alors pour achever de définir

le domaine, énoncer les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux points M et M' soient identiques ; ces conditions devront rester soumises aux restrictions énoncées plus haut ; la première ici n'a plus de sens, mais les trois autres doivent subsister. [Poincaré 1907b 75]

On retrouve le double mouvement : droit de décollement, conditions de recollement. Pas plus que dans les cas des domaines principaux et secondaires associés à une fonction analytique on ne trouve d'évocation de carte ou de changement de carte. Bien sûr le fait que les cercles (disques) soient vus *à la fois* comme des disques plans et des disques d'un nouvel espace peut être vu comme une manière de dire que les disques de l'espace abstrait sont munis canoniquement d'une carte plane, que les points du nouvel espace possèdent une coordonnée complexe. Cette carte locale n'est toutefois pas désignée dans le système, aucun aspect de continuité ni d'analyticité n'est évoqué : les disques de la surface abstraite héritent des structures analytiques et topologiques de leur contrepartie plane. Aucune condition de changement de carte n'est imposée pour les points appartenant, dans l'espace abstrait, à deux disques, alors que de telles conditions étaient formulées parfaitement explicitement dans la définition des variétés paramétrées dans le §3 de l'*Analysis situs* de 1895. Remarquons en passant que jamais le terme de « variété » n'est utilisé par Poincaré en 1883 ou en 1907 : variétés et surfaces de Riemann renvoient à des traditions problématiques distinctes. On notera aussi que c'est le terme *domaine* qui est systématiquement utilisé en 1907 et non celui de surface, marquant une inflexion weierstrassienne. La question des cartes et de la définition abstraite de la notion de domaine, abstraite au sens où elle ne dépend pas d'une fonction analytique à uniformiser, est éclairée par une série de remarques sur l'ajout d'éléments singuliers. Les seuls éléments de fonction utilisés par Poincaré pour former le domaine principal d'une fonction analytique multiforme sont, du moins dans la définition de départ, les éléments holomorphes. Poincaré propose d'étendre la définition en ajoutant les éléments à l'infini – formés de la partie extérieure à un disque du plan fini et d'une série de puissances négatives convergeant dans ce domaine – et les éléments polaires, « qui seront formés d'un cercle de convergence et du *quotient* de deux séries de puissances. Si nous introduisons ces éléments, nous pouvons étendre le domaine D de la fonction F de façon que les pôles en fassent partie. » [Poincaré 1907b 77]. On se souvient du silence complet sur ce point en 1883. Les points singuliers faisaient alors, eux, l'objet d'une exclusion explicite – et rapide – de la surface de Riemann, du fait qu'une infinité de feuillets devraient s'y rejoindre. En 1907, Poincaré décide de sauver de l'exclusion les points à ramification finie, en ajoutant aux éléments holomorphes, à l'infini et polaires, les éléments algébriques :

Nous pouvons même envisager une troisième sorte d'éléments, les *éléments algébriques* formés d'un cercle de convergence et d'une série de *puissances fractionnaires*, cela pourrait nous permettre d'étendre le domaine d'une fonction de façon que ses points de ramification algébrique en fissent partie. [Poincaré 1907b 77]

Il était en effet surprenant en 1883 de voir que ce point essentiel de la théorie riemannienne, l'inclusion des points à ramification finie dans la surface uniformisant la fonction, était totalement laissé de côté. Là où Riemann et Neumann expliquent, avec une clarté variable, que ces points ne sont pas géométriquement singuliers sur la surface, Poincaré voit le contraire :

Ce seraient seulement des points *singuliers* de ce domaine, et les éléments correspondants seraient singuliers même au point de vue géométrique (c'est-à-dire en faisant abstraction de la fonction F qui leur a donné naissance), car un pareil élément ne serait pas un cercle simple, mais un cercle multiple, $n^{\text{plé}}$ si n est le dénominateur des exposants fractionnaires de notre série ; de telle façon qu'il y aurait à l'intérieur de ce cercle, n points, qui auraient mêmes coordonnées et qui devraient néanmoins être regardés comme distincts. [Poincaré 1907b 77]

On voit que la singularité réside dans *la relation* entre le voisinage de ce point et sa trace plane, Poincaré ne nie pas la lissité de la surface abstraite en ce point ; la notion de « point de vue géométrique » ne recouvre pas exactement la même chose chez Riemann et Poincaré, du moins sur ce point. On voit aussi la confirmation de ce qui était implicite dans la manière de rapporter au plan de base le domaine formé des éléments holomorphes : c'est la variable x apparaissant dans la série qui joue le rôle de carte. La stratégie de carte globale est bien la même que celle de Riemann, mais elle est formulée par un détour local au moyen de la notion weierstrassienne d'élément de fonction. Cette stratégie esquivait toute question de changement de carte, mais elle oblige à travailler au voisinages des points de ramification algébrique avec une carte singulière.

Dans l'étude du domaine construit en 1883 pour uniformiser des fonctions analytiques y_1, \dots, y_n , le domaine de définition des fonctions y_i n'était pas pris en compte. En 1907 au contraire sont définies plusieurs relations entre domaines qui vont permettre de rendre compte exactement du lien entre domaines et familles de fonctions. On a vu la manière dont Poincaré définit la notion de domaines équivalents, pour pallier le caractère non canonique du choix d'un système dénombrable d'éléments représentant tout le domaine. Sur le même modèle sont définies les notions de domaine *contenu* dans un autre, puis de domaine *multiple* d'un autre :

Un domaine D est *contenu* dans un domaine D_1 , quand à tout point de D correspondra un point de D_1 et un seul ; quand à un point de D_1 ne peut correspondre qu'ou bien un seul point de D , ou bien aucun point de D ; quand enfin deux points de l'un sont identiques, non identiques ou infiniment voisins si les deux points correspondants de l'autre sont identiques, non identiques ou infiniment voisins.

Un domaine D sera *multiple* d'un domaine D_1 , quand à tout point de D correspondra un point de D_1 et un seul, tandis qu'à tout point de D_1 correspondent plusieurs points de D ou même une infinité. (...) Complétons toutes ces définitions (domaines équivalents, contenus ou multiples) en disant que deux points correspondants doivent avoir mêmes coordonnées. [Poincaré 1907b 76]

La dernière précision montre qu'on demeure dans le cadre de « domaines au-dessus » du plan complexe (ou de la sphère de Riemann). Ces notions servent à étudier le lien entre le domaine D associé à une famille F_1, \dots, F_n de fonctions analytiques et les domaines principaux D_1, \dots, D_n de chacune de ces fonctions :

Considérons un élément de D_1 et un point de cet élément, il pourra se faire qu'en ce point une des fonctions F_2, F_3, \dots, F_n n'existe pas ; dans ce cas ce point n'appartiendra pas à D ; il pourra se faire aussi que l'une de ces $n-1$ fonctions admette plusieurs valeurs, n par exemple ; alors à ce point de D_1 correspondront n points de D (...). Nous pouvons alors construire un domaine intermédiaire, D_1' , déduit de D_1 en supprimant tous les points de ce domaine auxquels ne correspondent aucun point de D ; de sorte que D_1' est contenu dans D_1 et que D est multiple de D_1' . [Poincaré 1907b 78]

L'ajout d'une fonction analytique à une famille donnée a deux effets distincts, un effet que nous dirons horizontal de restriction de la partie de \mathbb{C} au-dessus de laquelle s'étale le domaine de la famille, et un effet vertical de dépliement, d'ajout de feuillets. Le contraste est frappant entre cette comptabilité méticuleuse des points qui apparaissent ou disparaissent et l'absence de toute considération de ce type en 1883. Le fait qu'une partie de la critique ait porté sur la disparition de trois points du plan complexe lors de l'introduction de la fonction auxiliaire t en 1883 invitait bien sûr à préciser ce point.

ii. Un outil de démonstration.

Comparons sur quelques points la démonstration de 1907 à celle de 1883. On verra qu'en dépit du caractère assez général de l'exposé sur la notion de *domaine* qui ouvre le travail de

1907, les notions ne sont introduites que dans la mesure où elles interviendront dans une étape de la démonstration.

Une différence importante réside dans les lemmes d'analyse utilisés :

On voit que la démonstration du Mémoire cité (*Bull. Soc. Math.*) a été simplifiée par l'application de la méthode du balayage et surtout par celle du théorème de Harnack, qui permet de supprimer toutes les discussions relatives à l'uniformité de la convergence. [Poincaré 1907b 87]

On se souvient en effet que la plus grande partie du Mémoire de 1883 était consacré à l'établissement de l'uniformité (locale) de la convergence d'une série de fonctions dont la majoration par une fonction auxiliaire t garantissait la convergence (ponctuelle). Ici la convergence en un seul point suffit à garantir les convergences uniformes, c'est la théorème de Harnack :

D'après ce théorème, si l'on a une série

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots ,$$

et qu'à l'intérieur d'un certain cercle, le terme général f_n soit une fonction *harmonique* et *positive* ; si la série converge en un point intérieur au cercle, elle convergera en tout autre point intérieur au cercle ; de plus la convergence sera uniforme et la série obtenue en la différentiant une ou plusieurs fois termes à termes sera aussi uniformément convergente. [Poincaré 1907b 82]

Quand à la méthode de balayage, elle permet d'établir l'existence d'une fonction de Green – harmonique sauf pour une singularité logarithmique, positive et tendant vers 0 à l'infini. On se souvient de la méthode employée en 1883 : la surface était décrite comme réunion d'une suite croissante de disques (bord inclus) sur lequel un théorème de Schwarz garantissait l'existence d'une fonction harmonique positive, nulle au bord, possédant une unique singularité logarithmique. La méthode de balayage, présentée par Poincaré [Poincaré 1890] et utilisée ensuite comme principale méthode pour établir l'existence de fonctions harmoniques, procède au moyen d'un recouvrement de l'espace par des disques. Ici le domaine étant celui formé des éléments de fonction d'une famille de fonctions analytiques, sa décomposition en une famille infinie de disques est disponible d'emblée. On part d'une fonction u_0 ayant les bonnes propriétés dans l'un des disques C_0 – harmonique sauf pour une singularité logarithmique en un point fixé O , positive dans C_0 et nulle au bord – prolongée par zéro dans le reste du domaine ; la fonction ainsi obtenue est continue mais non dérivable sur le cercle bordant C_0 . On construit ensuite une suite de fonctions u_0, u_1, \dots partant de la fonction u_0 donnée. A chaque étape on corrige la fonction obtenue à l'étape précédente en *balayant* les

points singuliers présents dans l'un des disques C_k en les compensant au moyen d'un potentiel de ligne. Un ordre de parcours astucieux de la famille des disques finit par balayer toutes les singularités, sauf bien sûr le point logarithmique. De même qu'en 1883, la construction de la suite u_n ne garantit pas sa convergence, et une grande partie du travail consiste à l'établir, mais cette fois au moyen du théorème de Harnack.

Méthode du balayage et théorème de Harnack amènent à poser le problème comme suit :

Nous sommes en présence de deux hypothèses seulement :

1° Ou bien u_n croît indéfiniment avec n et cela pour tous les points du domaine D .

2° Ou bien, pour tous les points de D , u_n tend vers une limite u , et cette limite que nous appellerons *fonction de Green* est une fonction harmonique, sauf au point O ; et dans le voisinage de O , la différence $u-u_0$ est harmonique. Cette fonction de Green est partout positive ou nulle. [Poincaré 1907b 82]

Comme en 1883 la convergence ponctuelle va être établie en introduisant une fonction auxiliaire majorante, mais Poincaré a en 1907 mis en place les notions de domaine *contenu dans* un autre et de domaine *multiple* d'un autre nécessaires au traitement rigoureux des modifications du domaines induites par l'introduction d'une nouvelle fonction à uniformiser. Deux lemmes sont tout d'abord établis, reliant les fonctions obtenues par méthode de balayage sur deux domaines liés ; si l'on part d'un élément considéré comme commun à deux domaines D et D' et qu'on applique à chacun la méthode de balayage pour former des suites u_n et u_n' :

(...) si la suite des u_n' converge pour le domaine D' , la suite des u_n relative à un domaine D contenu dans D' convergera *a fortiori*. [Poincaré 1907b 85]

puis,

Si donc la série converge pour un domaine D' elle convergera *a fortiori* pour un domaine D multiple de D' . [Poincaré 1907b 86]

On se souvient que la fonction auxiliaire t introduite en 1883 possédait dans le plan complexe trois points singuliers (non polaires), excluant ainsi trois points du plan – et une infinité de points de la surface au-dessus de ces trois points – du champ de l'uniformisation. Un choix plus heureux de fonction auxiliaire permet d'éviter ce problème en 1907 : soit $x = f(z)$ une fonction fuchsienne de la première famille :

Dans ce cas, cette fonction peut prendre toutes les valeurs possibles ; la fonction inverse

$$y_{p+1} = \varphi(x)$$

existe pour toutes les valeurs de x .

La fonction y_{p+1} , réciproque de la fonction fuchsienne prenant toutes les valeurs complexes et non toutes sauf trois, est donc multivoque mais définie dans tout le plan complexe. Elle y possède des points de ramification algébrique, mais Poincaré a pris soin de montrer comment les inclure à son domaine principal. La situation est donc en un sens plus favorable que celle de 1883 : si y_1, \dots, y_p (système (I)) est la famille de fonctions à uniformiser, l'ajout à la liste de cette fonction auxiliaire y_{p+1} n'impose aucune restriction horizontale au domaine. Par contre, et ce point était totalement absent en 1883, le domaine Δ associé à la nouvelle famille est un domaine multiple du domaine D associé à la famille initiale. Le domaine de y_{p+1} étant le disque associé à la fonction fuchsienne, il y existe trivialement une fonction de Green $t = -\log |z|$, il existe donc aussi une fonction de Green sur Δ , qui est multiple d'un domaine contenu dans le domaine de y_{p+1} . Avant d'aborder le problème de descente de Δ à D , Poincaré passe de l'harmonique à l'holomorphe en introduisant ce que nous nommerions un revêtement universel de Δ . Quittant un instant l'enchaînement des théorèmes d'analyse, il reprend le fil de la discussion générale sur les domaines, en définissant tout d'abord la notion de domaine régulièrement multiple d'un autre :

Nous dirons que Δ est *régulièrement multiple* de D , s'il satisfait à la condition suivante. Soit M un point de D ; soient

$$M_1, M_2, \dots$$

les points correspondants de Δ . Soit M' un autre point de D , infiniment voisin de M ; nous supposons que parmi les points de Δ qui correspondent à M' , il y en ait un qui soit infiniment voisin de M_1 , un qui soit infiniment voisine de M_2, \dots [Poincaré 1907b 90]

On voit donc, formulée en termes de transition infiniment petites, une condition de relèvement des chemins.

Soit maintenant D un domaine quelconque ; je dis que nous pourrions trouver un domaine Δ régulièrement multiple de D et simplement connexe. [Poincaré 1907b 90]

Δ est bien entendu construit en définissant une notion de chemins équivalents. Notons que le traitement homotopique – en termes de déformations de chemins – de 1883 fait ici place à un traitement homologique – l'équivalence des chemins étant décrite en terme de formation d'un bord complet. Cet entrelacement complexe de domaines permet d'aboutir à la conclusion partielle suivante :

En résumé, étant donné un système (I) quelconque de fonctions multiformes, et D le domaine principal de ce système, on peut toujours former un domaine régulièrement

multiple de D , simplement connexe, et pour lequel la fonction de Green existe.
[Poincaré 1907b 92]

La simple connexité garantit, et sur ce point la démarche ne se distingue pas de celle de 1883, que si la fonction de Green u existe elle est partie réelle d'une fonction holomorphe $u+iv$, les intégrales définissant v possédant des périodes polaires mais pas de périodes cycliques [Poincaré 1907b 93], d'où l'existence d'une fonction $e^{-(u+iv)}$ à la fois holomorphe (sans aucun point singulier) et uniforme. La fonction v dépend d'une constante arbitraire, on dispose donc d'une infinité de telles fonctions : Poincaré montre que toute fonction de ce type est la composée de l'une d'entre elles et d'une homographie ; la fonction initiale ne prenant qu'une fois la valeur nulle, un petit raisonnement montre que ces fonctions sont injectives. Poincaré explicite ensuite le problème de l'image :

Nous avons vu qu'il existe une fonction analytique z du domaine D , qui ne peut prendre que des valeurs de module plus petit que 1, et qui ne peut prendre chacune de ces valeurs qu'une seule fois, mais nous ne savons pas encore si elle peut prendre toutes ces valeurs. [Poincaré 1907b 104]]

Si l'on nomme K ce cercle unité :

Nous serons amené à distinguer dans K deux ensembles de points :

1° l'ensemble E des points de K auxquels correspond un point de D

2° l'ensemble E_1 des points de K auxquels ne correspond aucun point de D .

Je me propose de démontrer que l'ensemble E comprend tout l'intérieur de K et que l'ensemble E_1 se réduit à la circonférence de K . [Poincaré 1907b 104]

Suit un raisonnement que nous classerions dans la topologie ensembliste : la fonction z étant analytique elle est ouverte, ou pour le dire comme Poincaré « autour de tout point de E on peut décrire un cercle assez petit pour que tous les points intérieurs à ce cercle appartiennent également à E » [Poincaré 1907b 104] ; son injectivité et la simple connexité de D montre que E est simplement connexe (au sens où toute courbe fermée simple dans E enferme une aire entièrement contenue dans E). Ces préliminaires permettent de donner deux preuves de l'affirmation relative à E , la première preuve étant reprise d'Osgood. Poincaré aborde ce qu'on pourrait appeler le problème de descente, dont le point de départ est rappelé dans ces termes :

Considérons un système quelconque

(I) y_1, y_2, \dots

de fonctions multiformes de x . Nous avons vu au paragraphe IV que si D est le domaine principal de ce système, on peut toujours trouver un domaine D' régulièrement multiple de D , et simplement connexe, pour lequel la fonction de Green u existe. [Poincaré 1907b 111]

et ce résultat suffisait à établir le théorème d'uniformisation visé. Mais Poincaré souhaite étudier la question de l'existence d'une fonction de Green sur D , quittant donc le strict problème d'uniformisation des fonctions analytiques pour les questions de représentation conforme d'un domaine donné. Le lien entre D et D' est décrit au moyen des automorphismes du revêtement, introduits par le relèvement des chemins fermés :

(...) à tout point M de D correspondent divers points

$$M_1, M_2, \dots$$

de D' ; si de plus le point M varie sur D d'une manière continue, il en sera de même des points M_1, M_2, \dots sur D' . Si M décrit une courbe fermée infiniment petite, il en sera de même de M_1, M_2, \dots , mais cela ne sera plus vrai en général si la courbe fermée décrite par M n'est plus infiniment petite. [Poincaré 1907b 111]

Poincaré établit que ces transformations forment un groupe, le groupe fuchsöide, et qu'elles sont linéaires (i.e. homographiques) en z . La descente de D' à D est étudiée au moyen du produit ; il établit ainsi :

On prendra les diverses transformées de z par les substitutions linéaires de ce groupe fuchsöide, on en fera le produit ; si ce produit converge, c'est que la fonction de Green existe pour le domaine D (...) [Poincaré 1907b 116]

Il reste à étudier les cas où ce produit ne converge pas.

iii. Représentation conforme des domaines simplement connexes

Le problème se situant au niveau de l'existence d'une fonction de Green et non du passage d'une telle fonction u à la fonction à valeur complexe z associée, Poincaré se donne un domaine D simplement connexe. L'étude se termine au moyen de la « méthode alternante de M. Schwarz » [Poincaré 1907b 119] ; si l'on se fie au résumé que Poincaré propose dans son introduction :

Je considère un domaine D (ou surface de Riemann) simplement connexe, mais d'ailleurs quelconque. J'en enlève une aire simplement connexe, et il me reste un domaine D_1 doublement connexe. Au paragraphe XII je forme la fonction de Green

relative à ce domaine et je montre qu'elle existe toujours. Je suis amené à distinguer deux cas.

Le premier est examiné aux paragraphes XIII et XIV ; je montre que dans ce cas le domaine D_1 est représentable sur une couronne circulaire et le domaine D sur un cercle.

Dans le second cas que j'étudie au paragraphe XV, le domaine D_1 est représentable sur un cercle, et le domaine D sur une sphère. [Poincaré 1907b 72]

Il semble donc que, parmi les trois cas possibles, disque, sphère pointée, sphère complète, deux seuls soient pris en compte. L'évocation du domaine doublement connexe obtenu en retirant un disque semble d'ailleurs exclure la sphère, alors que c'est la sphère pointée qui n'apparaît pas en conclusion. Le bilan donné à la fin du paragraphe XV semble dire un peu autre chose :

En résumé, un domaine D simplement connexe quelconque est susceptible de représentation conforme soit sur un cercle (paragraphes XIII et XIV), soit sur une sphère pointée (paragraphe XV). [Poincaré 1907b 138]

Regardons d'un peu plus près les grandes lignes du raisonnement. Poincaré considère au paragraphe XII un domaine D simplement connexe, O le point choisi dans ce domaine pour porter la singularité logarithmique de la fonction de Green, C_0 l'élément de D de centre O , O' un point différent de O , C_0' un élément contenant O' mais pas O . Nous sommes ici dans le cas général évoqué brièvement au début du Mémoire et non dans le cas du domaine associé à une fonction analytique ou à une famille de telles fonctions. Alors que dans ce deuxième cas les éléments de fonctions pouvaient jouer à la fois le rôle d'éléments (au sens ensembliste) du domaine *et* de recouvrement du domaine (après sélection d'une famille dénombrable), les éléments ici ne jouent que le rôle de recouvrement. Ceci permet de supposer :

(...) que le point O' qui appartient à C_0' , n'appartient à aucun autre élément de D , contigu à C_0' (...).

Construisons ensuite un domaine D_1 contenu dans D , et qu'on déduira de D tout simplement en supprimant l'élément C_0' ; les points de D qui font partie de C_0' , sans appartenir à aucun autre élément de D , contigu à C_0' ne feront pas partie de D_1 ; et au contraire les points des éléments contigus à C_0' appartiendront à D_1 , bien que faisant partie de C_0' . [Poincaré 1907b 119]

On pourrait se demander si cette suppression fait disparaître l'unique point O' ou un petit domaine bidimensionnel contenant O' . On apprend quelques lignes plus loin que Poincaré voit la partie commune δ commune à C_0' et D_1 comme

(...) un domaine limité extérieurement par la circonférence C_0 et intérieurement par une ligne fermée L_0 , formée d'un nombre fini d'arcs de cercles (...) [Poincaré 1907b 121]

c'est donc la deuxième interprétation qui doit prévaloir. Le domaine D_1 possède donc une frontière dont une composante est donnée par la courbe fermée L_0 , en plus de la frontière primitive de D . Cette frontière primitive n'a jusqu'à présent joué aucun rôle, mais elle intervient ici ; on peut d'ailleurs s'interroger sur sa nature, les domaines considérés étant, par construction, des domaines sans bord ; ils ne sont pas plongés dans un espace ambiant au sein duquel leur associer une frontière au sens topologique. Poincaré fait ici apparaître la frontière à l'occasion de la représentation conforme, qui, en un sens, plonge la surface dans un espace ambiant. Après avoir démontré l'existence d'une fonction de Green $u(D_1, O)$, harmonique sauf pour une singularité logarithmique en O , positive, tendant vers 0 à l'infini, Poincaré fait remarquer que D_1 peut ne pas être simplement connexe, et il propose de le rendre simplement connexe en y pratiquant une coupure Q « qui partira d'un point quelconque de L_0 et qu'on prolongera indéfiniment dans le domaine D_1 . » [Poincaré 1907b 122] ; le domaine simplement connexe ainsi formé est baptisé D_2 , Poincaré montre qu'il admet une fonction de Green, qu'on peut donc passer à la fonction z le représentant conformément sur le disque K :

On voit alors que la circonférence de K va se partager en quatre arcs ; l'un arc AB correspondra à la ligne L_0 , les deux extrémités A et B correspondant au point où la coupure Q aboutit à L_0 ; les deux autres arcs $A'A$ et BB' correspondront aux deux lèvres de la coupure Q . Le quatrième arc $B'A'$ correspondrait à la frontière du domaine primitivement donné D . Mais *ce dernier arc $B'A'$ peut se réduire à un point.*

Nous sommes donc amenés à distinguer deux cas :

1° Celui où l'arc $B'A'$ ne se réduit pas à un point. Dans ce cas je dis que le domaine D_1 est susceptible d'une représentation conforme sur un anneau circulaire et le domaine D sur un cercle ; la fonction de Green $u(D, O)$ existe.

2° Celui où l'arc $B'A'$ se réduit à un point. Dans ce cas je dis que le domaine D_1 est susceptible de représentation conforme sur un cercle, et le domaine D sur une sphère fermée. [Poincaré 1907b 123]

On est un peu surpris de voir la « sphère fermée » évoquée au point 2 : le raisonnement passant par D_2 est mené sous l'hypothèse de non simple connexité de D_1 , et d'une frontière de D formée d'un unique point, deux renseignements compatibles avec le seul cas de la sphère pointée. Pour établir ce résultat, Poincaré introduit une nouvelle fonction V , sur D_1 : on part d'une fonction V_0 valant identiquement 1 sur la frontière L_0 , identiquement nulle en dehors de

la circonférence de C_0' , reliant continûment les valeurs 0 et 1 dans le domaine intermédiaire δ ; en balayant les éléments de D_1 , deux cas peuvent se présenter. Dans le premier cas, on obtient une fonction V harmonique, nulle sur L_0 et tendant vers 0 « quand on se rapproche de la frontière du domaine primitivement donné D » [Poincaré 1907b 124] ; on conclut alors que D_1 est conformément équivalent à un « anneau circulaire » [Poincaré 1907b 128] puis que D est un disque. Dans le second cas, le balayage conduit à une fonction V identiquement égale à 1 ; on montre alors que D_1 est conformément équivalent à un disque pointé (le raisonnement utilise à un moment la non simple connexité de D_1), donc D à une sphère pointée. Le bilan de cette étude est délicat à tirer. Le raisonnement ne présente pas de défaut, au sens où il explicite l'hypothèse de non simple connexité de D_1 ; le problème est qu'il écarte sans le considérer le cas où D_1 serait simplement connexe (cas où D est une sphère), au simple motif que bien « que le domaine D soit simplement connexe, le domaine D_1 ne le sera pas en général » [Poincaré 1907b 122]. Si l'on quitte le fil démonstratif pour ne lire que les bilans provisoires ou définitifs que Poincaré en tire, on voit que le même cas est décrit à quelques pages d'intervalles comme celui de la sphère et comme celui de la sphère pointée.

Le bilan de la comparaison des preuves de 1883 et 1907 est donc contrasté. On peut diviser le Mémoire de 1907 en quatre parties : l'idée de surface de Riemann selon Poincaré (§II), la reprise dans ce cadre plus rigoureux de la démonstration de 1883 (§III-VIII), fonctions fuchsoides et problème de descente (§IX-XI), représentation conforme des domaines simplement connexes (§XII-XV). C'est la même stratégie de démonstration qui est reprise : uniformiser des fonctions multiformes d'une variable complexe x sur un domaine (abstrait) qui soit de plus simplement connexe, dont on montre qu'il est conformément équivalent à un disque ouvert dans le plan d'une nouvelle variable complexe z , la variable uniformisante. Le traitement désinvolte de 1883 contraste avec le traitement détaillé et, en un sens très ensembliste, de 1907 : notions abstraites de domaine d'une fonction multiforme puis, plus généralement, de domaine obtenu en « recollant » des disques ; domaines équivalents, domaines contenus l'un dans l'autre, domaines multiples l'un de l'autre puis régulièrement multiples ; étude détaillée des liens entre évolution de la famille de fonctions à uniformiser et des domaines successifs associés ; étude de l'ensemble image ; inclusion au domaine principal d'une fonction multiforme des éléments à l'infini, polaires et à ramification algébrique. L'exposé du §II peut sembler d'une grande généralité et, dans la forme, presque axiomatique dans sa recherche des conditions générales de formation des domaines. On constate toutefois que chacune des subtilités introduites est utilisée au moins une fois dans la version corrigée de

la démonstration de 1883 : c'est exactement sur les points où une critique a porté que Poincaré affine et explicite sa théorie ; c'est, à certains égards, *uniquement* sur ces points. D'autres aspects restent dans une certaine pénombre. Ainsi, si l'étude des points à inclure ou à exclure est menée dans certains cas avec grand soin, le fait que les points singuliers non algébriques des fonctions à uniformiser sont exclus de l'étude n'est pas mentionné. Le fait que l'introduction d'une fonction auxiliaire t dont le domaine principal est un disque ouvert contraint le domaine D' – simplement connexe et sur lequel une fonction de Green existe – à être conformément équivalent à un disque (et non à une sphère complète ou pointée), est à la fois central dans la construction de l'exposé – puisque la quatrième partie souhaite contourner cette introduction artificielle de fonction auxiliaire – et peu explicite. L'étude finale laisse planer une ambiguïté sur la classification à équivalence conforme près des domaines simplement connexes. Le partage entre la sphère et la sphère pointée est brouillé, la distinction entre frontière vide ou réduite à un point peu claire, aucun argument de topologie générale, on pense bien sûr à la compacité, n'est évoqué.

III. Représentation des fonctions méromorphes de deux variables.

Les théorèmes de Weierstrass et Mittag-Leffler sur les fonctions méromorphes d'une variable complexe sont déjà des résultats globaux et trouvent à ce titre une place dans notre exposé. C'est toutefois le passage à deux variables complexes proposé par Poincaré en 1883 qui va principalement retenir notre attention, car il contraint à la fois à une *reformulation* du problème et à des innovations dans les *techniques de preuves*. Après avoir été généralisés par Pierre Cousin, ces énoncés deviennent des *modèles de problèmes* appelés à jouer, dans les années 1940, un rôle fondamental dans l'émergence du langage des faisceaux.

1. Les théorèmes à une variable.

En 1876, Karl Weierstrass communique à l'Académie des Sciences prussienne une série de résultats fondamentaux *Sur la théorie des fonctions analytiques univoques*². Nous étudierons dans un autre chapitre quelques points précis relatifs aux innovations, tant conceptuelles que lexicales, proposées par Weierstrass dans ce texte et dans ses cours ; pour l'heure, il nous suffit de rappeler les objectifs que Weierstrass fixe à son étude des fonctions univoques d'une variable complexe³. Après avoir distingué les points réguliers des points singuliers – définis au départ topologiquement comme les points-frontière (*Grenzstellen*) du domaine de régularité (*Stetigkeitsbereich*) –, il distingue les singularités inessentielles (i.e. les pôles, dont il montre qu'ils sont nécessairement isolés) des points singuliers essentiels. Le cas des fonctions rationnelles fournit ensuite les principes généraux de l'étude : on montre qu'une fonction ne possédant que des points singuliers inessentiels (y compris en ∞) est rationnelle [Weierstrass 1876 79]⁴; elle est rationnelle entière (i.e. polynomiale) si de plus ∞ est l'unique point singulier. L'étude sera donc guidée par la question : dans quelle mesure la nature et de la répartition des points singuliers détermine-t-elle la nature *arithmétique* d'une fonction univoque [Weierstrass 1876 83] ; « arithmétique » renvoie ici, on le comprend à la lecture de l'article, à la possibilité d'aboutir à une écriture explicite au moyen d'un nombre limité de symboles, en l'occurrence les écritures rationnelles, la fonction exponentielle et le symbole G introduit pour désigner une fonction entière quelconque – i.e. sans singularité dans

² *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen* [Weierstrass 1876].

³ Ladite variable, notée x , peut prendre toute valeurs complexe finie ainsi que la « valeur » $x = \infty$.

⁴ Nous utilisons la pagination de [Weierstrass 1894-1927 2]..

le domaine fini⁵. A cette question générale correspond un principe d'étude : Weierstrass désigne par A le domaine de régularité, par A'' le domaine dans lequel la fonction n'est pas définie (Weierstrass entend par là, en termes anachroniques : le complémentaire de l'adhérence de A) et par A' le domaine formé de A et de ceux de ses points frontières qui ne sont que des singularités inessentiels ; A' est décrit comme le plus grand domaine dans lequel la fonction se comporte comme une fonction rationnelle. Les fonctions vont être distinguées et regroupées par complexité croissante des domaines associés : des fonctions partageant le même domaine A' sont dites de même classe [Weierstrass 1876 81]. On pourrait voir dans cette répartition par classe une forme de passage à une problématique de *légalité du lieu*, puisqu'on fixe le domaine pour étudier ensuite la nature arithmétique des fonctions univoques sur ce domaine. Mais l'on est pas dans une forme *pure* de cette problématique, telle qu'on l'a trouvée énoncée par Weyl en 1913 ; les domaines ne sont qu'une façon – certes nouvelle et jouant un rôle fondamental dans l'émergence du langage ensembliste – de parler des singularités. Les classes ne sont en effet qu'un intermédiaire de classification, l'objectif est de les regrouper en genres (*Gattungen*) en étudiant les types de frontières possibles (*Begrenzungsweise*) pour A , c'est-à-dire les différents types de répartition des singularités essentielles et inessentiels [Weierstrass 1876 81]. On voit que la mise en place de formulations précises de topologie ensembliste ont ici un rôle ancillaire : Weierstrass forge cet outil pour pouvoir parler précisément du *système des singularités* ; d'un système dont l'ensemble sous-jacent n'épuise pas la structure.

Après que le cas des fonctions rationnelles a permis de faire sentir la question et les principes, Weierstrass peut commencer l'étude des fonctions entières ($A =$ le domaine fini de la variable complexe). C'est alors la nature topologique du lieu des zéros (*Null-Stellen*) qui intervient :

Désignons maintenant par $G(x)$ une fonction entière donnée, quelconque, de x ; trois cas peuvent alors se présenter :

- 1) elle ne possède aucun zéro – alors elle est comme la fonction désignée plus haut par $G_2(x)$ et peut être exprimée sous la forme

$$e^{\bar{G}(x)} ;$$

- 2) elle possède un nombre fini de zéros – elle est alors représentable sous la forme

$$G_0(x)e^{\bar{G}(x)}$$

où $G_0(x)$ désigne une fonction rationnelle entière ;

⁵ La démarche « arithmétique » prend plus loin une forme plus précise lorsque Weierstrass introduit la notion de fonction première (*Primfunktion*) [Weierstrass 1876 91], fonction univoque n'ayant qu'un point singulier (essentiel ou non, à distance finie ou en l'infini) et au plus un zéro

3) elle possède un nombre infini de zéros – elle peut dans ce cas être mise sous la forme

$$x^\lambda G_0(x) e^{\overline{G}(x)}$$

où λ est soit nul soit un nombre entier positif ; dans ce type d'écriture, outre les zéros non nuls (a_1, a_2, a_3, \dots), G_0 est formée avec la variable x et une suite (m_1, m_2, m_3, \dots) de nombres entiers. [Weierstrass 1876 98]⁶

Dans ce dernier cas, l'hypothèse $A = C$ implique que la suite des zéros tend vers ∞ ; le théorème établit que cette condition nécessaire est aussi suffisante et formule le résultat en donnant une expression canonique de la fonction entière de zéros donnés (avec multiplicités m_i). Weierstrass peut ensuite aborder le cas des fonctions ayant un, et un seul, point singulier essentiel :

Soit $f(x)$ une fonction univoque de x ayant pour unique point singulier essentiel ∞ alors, dans le cas où elle a en outre un nombre quelconque (voire infini) de singularités inessentiels, on peut former une fonction $G_2(x)$ dont la suite des zéros est identique à celle de la fonction

$$\frac{1}{f(x)}.$$

Alors $G_2(x).f(x)$ est également une fonction entière de x et, si on la désigne par $G_1(x)$,

$$f(x) = \frac{G_1(x)}{G_2(x)}. \quad [\text{Weierstrass 1876 102}]^7$$

On voit que ce ne sont pas ici les questions « arithmétiques » de représentation qui interviennent ; le ressort essentiel est l'existence d'une fonction entière de zéros donnés.

Peu d'années après, Mittag-Leffler utilise les notations et la méthode de démonstration de Weierstrass pour établir une série de théorèmes additifs. Le premier avait été communiqué en 1876 à l'Académie de Stockholm, et Weierstrass en avait donné une démonstration en 1880⁸.

⁶ „Jetzt bedeute $F(x)$ irgend eine gegebene ganze Function von x , so können drei Fälle eintreten : 1) sie hat keine Null-Stellen – dann ist sie eine Function wie die eben mit $G_2(x)$ bezeichnete, und kann in der Form $e^{G(x)}$ ausgedrückt werden; 2) sie hat Null-Stellen in endlicher Anzahl – dann ist sie in der Form $G_0(x)e^{g(x)}$ darstellbar, wo $G_0(x)$ eine rationale ganze Function bedeutet; 3) sie hat unendlich viele Null-Stellen – in diesem Falle kann sie auf die Form $x^\lambda G_0(x)e^{G(x)}$ gebracht werden, wo λ Null oder ein ganze positive Zahl, $G_0(x)$ aber in der beschriebene Weise aus den von verschiedenen Null-Stellen (a_1, a_2, a_3, \dots), einer Reihe ganzer Zahlen (m_1, m_2, m_3, \dots) und der Veränderlichen x zusammengesetzt ist.“

⁷ „Ist $f(x)$ eine eindeutige Function von x mit der einen wesentlichen singularitäten Stelle ∞ , so lässt sich in dem Falle, wo sie ausserdem beliebig viele (auch unendlich viele) ausserwesentliche singuläre Stellen hat, eine Function $G_2(x)$ herstellen, für welche die Reihe der Null-Stellen identisch ist mit der Reihe der Null-Stellen der Function $1/f(x)$. Dann ist $G_2(x).f(x)$ ebenfalls eine ganze Function von x , und man hat, wenn diese mit $G_1(x)$ bezeichnet wird, $f(x) = G_1(x)/G_2(x)$.“

⁸ K. Weierstrass Über einen Functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler, Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaft vom 5. August 1880 = [Weierstrass 1894-1927 2 189-199]. Non consulté.

Notre objectif n'est pas d'étudier la construction progressive de cette série de théorèmes⁹ ; on peut choisir comme représentant un énoncé légèrement ultérieur, dans la version que Mittag-Leffler communique à Hermite et que l'on retrouve insérée dans les C.R.A.S. en 1882 :

Je suppose données :

1° Une suite infinie de valeurs a_1, a_2, a_3, \dots , toutes inégales et assujetties à la condition

$$\lim_{\nu} a_{\nu} = \infty ,$$

$$\nu = \infty ;$$

2° Une suite infinie de fractions entières, rationnelles ou transcendentes de la variable y , s'annulant toutes pour $y = 0$:

$$G_1(y) = c_1^{(1)}y + c_2^{(1)}y^2 + c_3^{(1)}y^3 \dots ,$$

$$G_2(y) = c_1^{(2)}y + c_2^{(2)}y^2 + c_3^{(2)}y^3 \dots ,$$

.....

$$G_{\nu}(y) = c_1^{(\nu)}y + c_2^{(\nu)}y^2 + c_3^{(\nu)}y^3 \dots$$

Il est alors toujours possible de former une fonction analytique $F(x)$, n'ayant d'autres points singuliers que a_1, a_2, a_3, \dots , et telle que, pour chaque valeur déterminée de ν , la différence

$$F(x) - G_{\nu}\left(\frac{1}{x - a_{\nu}}\right)$$

ait, en supposant $x = a_{\nu}$, une valeur finie et déterminée, de telle sorte que, dans le voisinage de $x = a_{\nu}$, $F(x)$ puisse s'exprimer sous la forme

$$G_{\nu}\left(\frac{1}{x - a_{\nu}}\right) + P(x - a_{\nu}). \quad [\text{Mittag-Leffler 1882 414}]^{10}$$

P désignant une série entière de rayon de convergence non nul. Au vocabulaire près, on voit qu'il démontre que tout système de parties principales (dans le domaine fini) est le système d'une fonction méromorphe F . Comme pour le théorème de Weierstrass, la démonstration part de la somme des $G_{\nu}\left(\frac{1}{x - a_{\nu}}\right)$ et introduit des termes correctifs pour assurer la convergence : on est dans l'exercice de majoration d'une série doublement indicée, typique de ce qu'on retiendra de l'Analyse à la Weierstrass.

⁹ Série à laquelle s'intègrent rapidement d'autres mathématiciens. Pour l'analogue du théorème de Mittag-Leffler dans le cas des fonctions harmoniques de trois variables réelles, on trouve par exemple [Appel 1883 326].

¹⁰ Mittag-Leffler *Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable*, CRAS **94** (1882) p.414-416. La série des théorèmes est présentée dans l'article de synthèse : G. Mittag-Leffler *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante*, Acta Math. **4** (1884), p.1-79.

2. La représentation des fonctions méromorphes de deux variables : Poincaré 1883.

L'objectif de Poincaré est bien clair :

On sait que M. Weierstrass a démontré au sujet des fonctions d'une seule variable complexe le théorème suivant :

Si $F(x)$ est une fonction méromorphe dans toute l'étendue du plan, c'est-à-dire n'ayant à distance finie d'autres singularités que des pôles, on peut la mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières.

La théorème analogue pour les fonctions de deux variables n'est pas encore démontré. [Poincaré 1883b 147] ¹¹

Plus précisément :

Voici quel est le problème :

Je considère une fonction de deux variables $F(X,Y)$ et je suppose que dans le voisinage d'un point quelconque X_0, Y_0 on puisse la mettre sous la forme $\frac{N}{D}$, N et D

étant deux séries ordonnées suivant les puissances de $X-X_0$ et $Y-Y_0$ et convergeant lorsque les modules de ces quantités sont suffisamment petits. Je suppose de plus que, lorsque les modules de $X-X_0$ et $Y-Y_0$ restent assez petits, les deux séries N et D ne peuvent s'annuler à la fois que pour des points isolés. Je dis que cette fonction peut se

mettre sous la forme $\frac{G(X,Y)}{G_1(X,Y)}$, G et G_1 étant des séries ordonnées suivant les

puissances de X et Y et *toujours* convergentes. [Poincaré 1883b 147]

Notons tout d'abord que la forme générale du problème a changé. Certes le théorème à une variable était un théorème global, mais il ne prenait pas la forme d'un résultat de *passage du local au global*. Cette modification de forme du problème découle d'un mode différent de *position du problème* – de description de ses *donnés*. La complexification topologique liée au passage à deux variables en est la cause. Revenons un instant au cas à une variable. On ramenait le problème à celui de l'existence d'une fonction entière de lieu des zéros donné, les lieux des zéros des fonctions entières étant de même nature que les lieux singuliers de fonctions méromorphes. Pour préciser le problème, il suffisait alors de considérer le lieu des zéros de $1/F$, se donner, donc une simple suite (a_v) de points du plan complexe tendant vers l'infini, doublée d'une suite de mutliplicités (m_v) . A une variable, le lieu appelé à devenir lieu

de zéros d'une fonction peut être désigné sans faire intervenir de fonction, en un moment préalable et autonome. Si la construction d'une fonction entière de zéros donnés est aussi le ressort fondamental de la démonstration de Poincaré, en passant à deux variables complexes la situation se complique sensiblement : le lieu des zéros est (en termes réelles), un lieu bidimensionnel dans l'espace à quatre dimensions. Comment « se donner » un tel lieu de zéros ? En 1883, la manière usuelle de parler d'un lieu bidimensionnel dans l'espace à quatre dimensions est d'en donner une équation¹², mais si Poincaré formule ainsi son problème, il le détruit¹³ ! C'est le moment autonome et pré-fonctionnel de désignation du lieu des zéros qui va disparaître dans la position du problème à deux variables. Elle est remplacée par l'analyse suivante :

Ainsi autour du point X_0, Y_0 il existera par hypothèse une région R_0 où la fonction F pourra se mettre sous la forme $\frac{N_0}{D_0}$; de même autour d'un autre point X_1, Y_1 il existera une région R_1 où F pourra s'écrire $\frac{N_1}{D_1}$. Mais si les deux régions R_0 et R_1 ont une partie commune, N_1 pourra ne pas être la *continuation analytique* de N_0 . Toute ce que nous savons, c'est que dans la partie commune aux deux régions, le rapport $\frac{N_1}{N_0}$ ne devient ni nul ni infini. [Poincaré 1883b 147]

La difficulté spécifique à ce problème prend ici une nouvelle forme : on peut bien choisir de représenter, localement, une fonction méromorphe par le quotient de deux éléments de fonction, mais la représentation n'est pas unique¹⁴. Le recollement des dénominateurs en une seule fonction entière se heurte au fait que, dans l'intersection de deux boules, on ne peut être certain que le choix de la représentation fractionnaire donne l'égalité $D_1 = D_0$; tout au plus sait-on que $D_1 = \varphi D_0$, où φ est une fonction holomorphe non nulle dans l'intersection (puisque $\varphi = N_1/N_0$, les fonctions ayant les mêmes zéros avec mêmes multiplicités¹⁵). Il n'importe d'ailleurs pas de prolonger un D_i particulier, mais de construire une fonction entière ayant dans chaque hypersphère exactement les mêmes zéros de D_i . On voit en quoi le problème topologique posé par la nature du lieu des zéros dans le cas à deux variables conduit certes Poincaré à poser le problème en termes purement fonctionnels, mais que cela induit une

¹¹ H. Poincaré *Sur les fonctions de deux variables*, Acta Mathematica 2 (1883) p.97-113 = *Œuvres* 4 p.147-161.

¹² Une complexe ou deux réelles.

¹³ Plus précisément : il le détruit s'il suppose que ce lieu est celui des zéros d'une fonction *entière*. Bien entendu on dispose d'une « équation » pour ce lieu, $0 = 1/F$, mais $1/F$ possède *a priori* des pôles.

¹⁴ Même lorsque, comme Poincaré prend garde de le faire, on suppose N et D sans facteur commun.

formulation en termes de données locales (en chaque point) et de non-coïncidence dans des *intersections*.

Le passage de une à deux variables impose une dernière innovation dans la formulation précise du problème. Il suffisait, à une variable, d'évoquer deux suites ; le caractère dénombrable des données se prêtait directement aux travaux sur les séries de fonctions – fussent-elles doublement indicées. La situation décrite plus haut par Poincaré est celle au voisinage de chaque point de \mathbf{C}^2 , le système des données n'est, pour l'instant, pas dénombrable. Le problème devient traitable par l'introduction d'un *recouvrement dénombrable* de \mathbf{C}^2 : si banale que soit devenue cette description, elle n'est pas usuelle en 1883 ;

Voici la démarche que je vais suivre dans la démonstration :

1° Je construirai une infinité de régions hypersphériques Je supposerai qu'un point x,y,z,t appartient au moins à une, et au plus à cinq de ces régions ; cela est toujours possible. Je supposerai de plus qu'à l'intérieur de R_i^0 par exemple, la fonction

F peut se mettre sous la forme $\frac{N_i}{D_i}$. J'appelle M_i le module de D_i . [Poincaré 1883b

149]

On notera au passage l'usage d'un aspect de topologie de la dimension : on peut recouvrir l'espace à quatre dimensions avec des boules, de sorte que tout point appartienne à au plus cinq d'entre elles. Plus grossièrement on peut relever que, non seulement le recouvrement est dénombrable, mais qu'il est aussi localement fini (avec un majorant global pour le nombre d'intersections) : le décor topologique est planté qui permet un travail sur des séries de fonctions.

La démonstration elle-même utilise trois familles de techniques qui nous intéressent à des degrés variés. Premièrement, la technique permettant de garantir la convergence dans tout \mathbf{C}^2 des séries en question est exactement la même que chez Mittag-Leffler et Weierstrass ; elle ne concerne pas notre histoire. Une deuxième technique joue pour nous un certain rôle. Poincaré travaille avec des fonctions harmoniques de quatre variables réelles et non directement avec les fonctions analytiques de deux variables complexes. Le passage d'une à deux variables est, ici aussi, non trivial : à une variable complexe, une fonction potentiel de deux variables

¹⁵ Grâce à l'hypothèse : « les deux séries N et D ne peuvent s'annuler à la fois que pour des points isolés. »

réelles (i.e. vérifiant $\Delta u = 0$) est partie réelle d'une fonction holomorphe¹⁶ ; il n'en va pas de même à deux variables complexes, les parties réelles de fonctions holomorphes étant caractérisées par l'annulation de cinq opérateurs $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, dont le Laplacien Δ n'est que le premier [Poincaré 1883b 149]. Poincaré établit par des moyens d'Analyse que parmi les solutions de l'équation $\Delta u = 0$ répondant au problème, il peut en trouver une annulant aussi les quatre autres opérateurs [Poincaré 1883b 159]. On notera qu'à aucun moment Poincaré ne souligne le rôle des hypothèses topologiques : c'est le fait que l'on travaille dans \mathbb{C}^2 qui garantit que les fonctions numériques de quatre variables réelles vérifiant le système d'équations aux dérivées partielles est non seulement localement mais aussi globalement partie réelle d'une fonction analytique univoque de deux variables complexes ; ou, pour le dire dans le langage usuel de Poincaré, qui garantit que la fonction complexe formée à partir de la fonction réelle univoque est elle aussi univoque. On verra ces aspects topologiques, passés sous silence par Poincaré, jouer un rôle central dans la suite.

La troisième technique utilise, elle, de manière fondamentale, la description du problème au moyen d'un recouvrement localement fini. S'étant ramené à un problème de fonction harmonique, Poincaré commence par utiliser des technique d'Analyse (généralisant la représentation intégrale des fonctions harmoniques à la Poisson) dans chacune des hypersphères R_i^0 :

Je construirai une fonction potentielle J_i^0 jouissant des propriétés suivantes : elle est holomorphe à l'extérieur de R_i^0 , et tend vers 0 quand $x^2+y^2+z^2+t^2$ croît indéfiniment ; à l'intérieur de R_i^0 , la différence $J_i^0 - \log M_i$ est holomorphe ; enfin sur la limite de la région R_i^0 , J_i^0 est holomorphe quand $\log M_i$ l'est lui-même. [Poincaré 1883b 149]

Poincaré entend ici par « harmonique » une fonction numérique u de quatre variables réelles vérifiant $\Delta u = 0$ là où elle n'est pas infinie, et par « holomorphe » une fonction harmonique partout finie (à distance finie). En prenant les exponentielles, on voit que $\exp(J_i^0)$ est une fonction harmonique qui ne s'annule pas en dehors de l'hypersphère et qui possède dans l'hypersphère (bord inclus) exactement les zéros de $M_i = |D|$; ou, pour le dire autrement, dans l'hypersphère les fonctions $\exp(J_i^0)$ et $|D|$ sont équivalentes au sens où l'une est multiple de l'autre par une fonction harmonique sans singularité ni zéro. En suivant le modèle du raisonnement à une seule variable, il semble naturel de chercher à construire une fonction

¹⁶ En général multivoque.

entière à partir de $\prod \exp(J_i^0) = \exp(\sum J_i^0)$, quitte à affronter de délicats problèmes de convergence. Mais le problème de convergence n'est pas ici le seul ; les hypersphères R_i^0 empiètent les unes sur les autres et, dans l'intersection de deux d'entre-elles le produit $\prod \exp(J_i^0)$ s'annule sur le lieu des zéros voulu, mais avec le double des multiplicités voulues¹⁷. Poincaré utilise alors une technique qui n'avait bien entendu pas d'équivalent pour le problème à une seule variable : il considère l'intersection R_{ik}^1 de R_i^0 et R_k^0 , puis reprend le raisonnement précédent en faisant jouer à R_{ik}^1 le rôle que jouait R_i^0 et à J_i^0 le rôle que jouait $\log M_i$; il obtient donc une fonction holomorphe à l'extérieur de l'intersection, tendant vers 0 à l'infini, et dont l'exponentielle a exactement les bons zéros dans l'intersection (signalons que nous nous écartons ici des notations de Poincaré qui, en n'utilisant pas d'indices doubles, s'expose à quelques obscurités). Ainsi – en oubliant pour l'instant les intersections de plus de deux hypersphères – c'est l'exponentielle de la somme $J_i^0 + J_i^0 - J_{ik}^1$ qui possède dans l'union des deux hypersphères les bons zéros, multiplicités comprises, ce qui amène à chercher à partir de la fonction
$$\frac{\prod \exp(J_i^0)}{\prod_{i < k} J_{ik}^1} = \exp\left(\sum J_i^0 - \sum_{i < k} J_{ik}^1\right).$$
 Cette fonction présente toutefois le même problème de multiplicité dans une région commune à trois des hypersphères ... le procédé de résolution s'arrête heureusement puisqu'aucun point n'appartient à plus de cinq hypersphères. La fonction considérée est donc l'exponentielle d'une somme alternée de fonctions J , associées successivement aux hypersphères, aux intersections deux à deux, aux intersections trois à trois, ..., jusqu'aux intersections cinq à cinq [Poincaré 1883b 158].

On voit l'originalité de ce traitement, dans un dernier tiers du 19^e siècle où les découpages et recollements bord à bord sont devenus courants, mais pas les recouvrements avec empiètement. Si cette démonstration de Poincaré n'avait pas mérité sa place dans notre histoire pour son lien avec la théorie des faisceaux, ni pour la formulation d'un problème d'Analyse comme problème de passage d'un système de représentations locales à une représentation globale, nous l'aurions intégré à l'éventail des *pratiques du lieu*, aux côtés de procédés de découpage, recollement, dépliement (après découpage), déploiement (au dessus de ...), fusion, approximation par des domaines polygonaux etc. rencontrés jusqu'ici¹⁸.

¹⁷ Nous nous plaçons au voisinage d'un point d'intersection de deux et seulement deux des hypersphères.

¹⁸ Nous n'analyserons pas l'article de Poincaré *Sur les propriétés du potentiel et les fonctions abéliennes* [Poincaré 1898]. Poincaré y montre un résultat plus précis dans un cas plus particulier : une fonction abélienne

3. La thèse de Pierre Cousin (1895).

Dans cette thèse¹⁹, Cousin rapproche les théorèmes de Weierstrass et Poincaré sur la représentation des fonctions méromorphes (pour tous les points à distance finie, i.e. dans \mathbf{C} et \mathbf{C}^2 respectivement) comme quotient de deux fonctions entières et le théorème de Mittag-Leffler sur l'existence d'une fonction holomorphe (dans \mathbf{C}) associée à tout système de parties principales. Il propose un modèle unique de formulation et de traitement de ces problèmes lui permettant de les étendre à n variables complexes et à d'autres domaines que \mathbf{C}^n , ceux qu'on nommera plus tard les polycylindres (i.e. des produits de domaines de \mathbf{C}). L'uniformité de son raisonnement le conduit toutefois à une erreur, qui sera relevée par Osgood et corrigée – sur les conseils d'Osgood – par Thomas Gronwall (1877-1932) en 1917 [Gronwall 1917].

Nous ne citons pas ici les théorèmes dans la forme la plus générale atteinte par Cousin, mais plutôt dans une étape doublement intermédiaire : pour deux variables complexes (et non n quelconque) et pour un domaine dont nous dirions qu'il est le produit de deux ouverts relativement compacts du plan complexe, de bord analytique. Si le passage de deux à n variables ne demande pas de travail spécifique, Cousin passera un peu plus loin de ces domaines (s_1, s_2) à des domaines plus généraux (S_1, S_2) en approchant les seconds par les premiers ; mais ce n'est pas ce type de technique qui nous intéresse ici. Plus pertinent pour nous est la manière dont Cousin rapproche les énoncés des problèmes additifs et multiplicatifs. La notion fondamentale est celle, additive, de fonctions « équivalentes » en un point :

Si deux fonctions de cette nature [méromorphe] se trouvent définies simultanément à l'intérieur d'une même portion d'aire et si leur différence est régulière en tout point de cette aire, je dirai que les deux fonctions sont *équivalentes* dans la portion d'aire considérée ; si leur différence est régulière en un point, les deux fonctions sont *équivalentes* en ce point.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctions F et Φ soient équivalentes en un point M , est que l'on ait pour les points situés dans le domaine de M :

$$F = \Phi + f,$$

(i.e. méromorphe de n variables complexes admettant $2n$ périodes indépendantes) est quotient de deux fonctions analytiques d'une type particulier, généralisant les classiques fonctions Θ .

¹⁹ *Sur les fonctions de n variables complexes* [Cousin 1895].

f étant une fonction régulière en M . [Cousin 1895 10]

On notera que le passage de l'équivalence globale (dans une portion d'aire) à l'équivalence locale utilise le caractère implicitement local de la notion de fonction régulière en un point, et la notion explicite de « domaine d'un point », utilisée déjà par Neumann et dont nous verrons plus loin qu'elle est utilisée en France par Tannery ou par Appel (le maître de Cousin). Cette notion permet d'énoncer les théorèmes suivants²⁰ :

J'ai rapproché les énoncés de ces deux théorèmes parce que les démonstrations, à une légère différence près, en sont identiques.

Théorème I. Soient S_1, S_2 deux aires connexes prises sur les plans respectifs des deux variables x et y ; soient s_1, s_2 deux aires connexes à contour fermé simple ou complexe, complètement intérieures respectivement à S_1 et S_2 .

On suppose qu'en tout point (a, b) intérieur à (S_1, S_2) correspondent :

1° deux cercles : $\Gamma_{a,b}$ de centre a et $\gamma_{a,b}$ de centre b , intérieurs respectivement à S_1 et S_2 .

2° une fonction $f_{a,b}(x, y)$ monotrope et sans espace lacunaire définie à l'intérieur de $(\Gamma_{ab}, \gamma_{ab})$ et telle qu'en tout point (a', b') intérieur à $(\Gamma_{ab}, \gamma_{ab})$ elle soit équivalente à la fonction $f_{a',b'}(x, y)$ qui correspond à ce point.

Il existe une fonction $F(x, y)$ monotrope et sans espace lacunaire définie à l'intérieur de (s_1, s_2) et qui en tout point intérieur à (s_1, s_2) est équivalente à la fonction qui correspond à ce point.

Théorème II. Au lieu de supposer chacune des fonctions $f_{a,b}(x, y)$ de l'énoncé précédent monotrope et sans espace lacunaire à l'intérieur de $(\Gamma_{ab}, \gamma_{ab})$ on peut supposer que chacune d'elles est le logarithme d'une fonction $v_{a,b}(x, y)$ régulière à l'intérieur de $(\Gamma_{ab}, \gamma_{ab})$ et telle qu'en tout point (a', b') intérieur à $(\Gamma_{ab}, \gamma_{ab})$ elle soit équivalente à

$f_{a',b'}(x, y)$; cela revient à supposer que le quotient $\frac{v_{a,b}(x, y)}{v_{a',b'}(x, y)}$ est régulier et différent de

0 au point a', b' .

²⁰ Précisons quelques points du vocabulaire utilisé par Cousin : « monotrope » signifie univoque et n'ayant que des singularités inessentiels ; quant à l'absence d'« espace lacunaire » pour une fonction considérée dans une certaine région « Cette dernière condition signifie que si M désigne un point quelconque de la région considérée, il existe un point aussi voisin que l'on veut de M pour lequel la fonction est régulière. » [Cousin 1895 10] On verra plus loin (par exemple dans le « Théorème fondamental ») le rôle de cet hypothèse : les résultats globaux portent sur les domaines de méromorphie et non sur les domaines d'holomorphie ; dire qu'une fonction existe et est sans espace lacunaire dans un domaine donné D c'est, pour Cousin, dire qu'elle est méromorphe dans tout D . Lorsque Osgood reformule les résultats de Cousin dans son exposé sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, il reprend la présentation de Poincaré en parlant de fonctions localement représentables comme quotient de deux fonctions analytiques sans facteur commun. cf [Osgood 1913 45].

Il existe alors une fonction $F(x,y)$ définie à un multiple près de $2i\pi$ à l'intérieur de (s_1, s_2) et équivalente en tout point intérieur à (s_1, s_2) à la fonction qui correspond à ce point. [Cousin 1895 23]

Avant de regarder les démonstrations, donnons la conséquence que Cousin tire en quelques lignes du théorème II :

Théorème III. Si à chaque point (a,b) intérieur à (S_1, S_2) correspondent :

1° deux cercles $\Gamma_{a,b}$ de centre a et $\gamma_{a,b}$ de centre b , respectivement intérieurs à S_1 et S_2 .

2° une fonction $V_{a,b}(x,y)$ ²¹ régulière à l'intérieur de $(\Gamma_{ab}, \gamma_{ab})$ et telle qu'en tout point

(a', b') intérieur à $(\Gamma_{ab}, \gamma_{ab})$ le quotient $\frac{v_{a,b}(x,y)}{v_{a',b'}(x,y)}$ soit régulier et différent de 0 ;

il existe une fonction $V(x,y)$ régulière à l'intérieur de (s_1, s_2) et telle qu'en tout point (a,b) intérieur à (s_1, s_2) le quotient de $V(x,y)$ par la fonction $v_{a,b}(x,y)$ qui correspond à ce point est régulier et différent de 0. [Cousin 1895 25]

L'accent est donc mis sur l'unité de la série de théorèmes : on passe de I à II par un simple « cette démonstration est analogue à la précédente, la seule différence consiste en ce que les fonctions $f_{a,b}(x,y)$, φ_a et $F(x,y)$ ne sont définies qu'à un multiple près de $2i\pi$ » [Cousin 1895 24] ; on passe de II à III en posant $V(x,y) = e^{F(x,y)}$, où F est la fonction du théorème II. On ramène le problème multiplicatif (II) au problème additif (I) par des logarithmes, le prix à payer étant une multivocité qu'on peut faire disparaître par une nouvelle exponentielle. L'unité de cette série passe aussi bien entendu par l'uniformité des formulations, inspirées de la formulation de Poincaré : une forme générale de problème est exhibée à travers des variantes, les trois résultats visés en fin de thèse en découlant malgré la diversité de leurs allures : existence d'une fonction méromorphe de parties principales données dans un cas, existence d'une fonction holomorphe de lieu de zéros donné dans l'autre, représentation d'une fonction méromorphe comme quotient de deux fonctions holomorphes. Si aucun terme *méta* tel « local » ou « global » ne vient caractériser cette forme de problème, la référence au lieu est constante et non ambiguë.

Les preuves de Cousin reposent sur un Théorème fondamental qu'il nous faut décrire, à la fois pour le comparer avec la méthode de Poincaré et pour comprendre l'erreur qu'Osgood et Gronwall pourront déceler. Les théorèmes II et III étant déduits rapidement du théorème I, c'est un résultat additif qui constitue ce ressort essentiel. Il est énoncé dans le cas d'une fonction de $n+1$ variables x_1, \dots, x_n, y , chacune variant dans une région d'un plan complexe

²¹ Lire : $v_{ab}(x,y)$.

limitée par des « contours fermés simples ou composés » [Cousin 1895 10]. Par commodité, les n premières variables sont collectivement désignées par l'unique lettre x et le domaine de x est désigné par Γ . Le domaine de la variable y est subdivisé en un nombre fini de régions R_i « dont chacune est limitée par un contour fermé simple » (donc simplement connexe) et l'on note l_{np} la portion de périmètre commune à deux régions contiguës ; on retrouve donc un classique découpage en pièces planes simplement connexes. La position du problème fait toutefois apparaître des empiètements :

A chaque région R_p je fais correspondre une fonction des $(n+1)$ variables complexes $x_1, x_2, \dots, x_n, y, f_p(x, y)$ définie pour x intérieur à Γ et pour y intérieur à un contour fermé R_p enveloppant R_p : à l'intérieur de la région où elle est définie $f_p(x, y)$ est supposée *monotrope* et *sans espace lacunaire* ; on fait de plus l'hypothèse suivante : si R_p et R_n sont deux régions contiguës, R_p et R_n ont une portion d'aire commune où les deux fonctions $f_p(x, y)$ et $f_n(x, y)$ sont simultanément définies ; on suppose que ces deux fonctions sont *équivalentes* dans la portion d'aire où elles sont simultanément définies. [Cousin 1895 11]

A cette situation correspond le

Théorème fondamental. Il existe une fonction $F(x, y)$ monotrope et sans espace lacunaire définie pour x intérieur à Γ et y intérieur à S et qui, en chaque point intérieur à S , est équivalente à la fonction correspondant à ce point. [Cousin 1895 11]

L'idée est de ne travailler que dans le plan de la variable y , en prolongeant les f_p, f_n de $\Gamma \times R_p$ (en notations anachroniques) à $\Gamma \times \mathbb{C}$ grâce à :

$$I_{np}(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{l_{np}} \frac{f_p(x, z) - f_n(x, z)}{z - y} dz \quad [\text{Cousin 1895 12}]$$

La ligne l_{np} constitue une coupure pour cette fonction, et la première partie de la thèse de Cousin était consacrée à l'étude du comportement des fonctions de ce type lors du franchissement de la coupure et aux extrémités de l_{np} . Un aspect fondamental de la situation, mais qui reste implicite dans le travail de Cousin, est que les l_{np} ne comportent pas de « boucle » : on verra Oka insister sur cet aspect, mais en 1939. Pour l'heure, Cousin définit la fonction φ comme somme de tous les I_{np} et montre que la fonction définie dans chaque R_p par $F(x, y) = f_p(x, y) + \varphi(x, y)$ répond à la question [Cousin 1895 15] ; d'une manière informelle, on peut dire que les sauts de la fonction φ associés aux coupures l_{np} viennent exactement compenser la différence entre les fonctions R données dans deux régions contiguës. On voit que, quelque proche de Poincaré que puisse être Cousin dans la façon de poser les problèmes,

ses outils sont bien différents. Là où Poincaré travaillait directement dans \mathbb{C}^2 et utilisait un recouvrement, Cousin travaille dans plan d'une seule variable (arbitrairement distinguée) et utilise un découpage des plus classiques. Cousin est en cela bien plus proche de ce que qu'on trouve, par exemple, dans la thèse de Painlevé, *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* [Painlevé 1887]. Notons que le passage du « théorème fondamental » aux théorème I,II,III passe par un lemme établissant l'existence d'un découpage (fini) subordonné à un recouvrement (d'une aire limitée) [Cousin 1895 22].

Lorsque Cousin reprend ce procédé en l'adaptant au cas multiplicatif – où le quotient de deux fonctions v_p et v_n (analogues des f) est au voisinage de l_{np} égal à une fonction holomorphe non nulle g_{np} – et définit les fonctions I_{np} en faisant jouer à $\log g_{np}$ le rôle de $f_p - f_n$. Mais, l'étude de la multiformité de $\log g_{np}$ comme fonction de l'unique variable y ne suffit pas à régler la question. C'est là l'erreur qu'Osgood relève dans l'argument de Cousin [Gronwall 1917 54] ; le travail de recollement morceaux par morceaux dans un domaine éventuellement multiplement connexe R dans le plan de la variable y , tel que Cousin le mène, ne conduit à la conclusion annoncée que si, par ailleurs, toutes les autres variables, x_i , varient dans des domaines simplement connexes. Gronwall peut donc, en reprenant le même procédé que Cousin, énoncer un résultat dans lequel le domaine d'uniformité de la fonction finale F est un sous-domaine (Σ, R) de celui, (S, R) des données. Les T_{np} désignent ici des voisinages des l_{np} et le domaine de la variable y est noté S' et non R :

Let a function $u_p(x, y)$ be given for every region R_p , uniform and holomorphic in (S, S') , boundaries included, and such that for any two adjacent regions R_n and R_p , the quotient

$$\frac{u_p(x, y)}{u_n(x, y)} = g_{np}(x, y)$$

is holomorphic and different from zero in (S, T_{np}) . Then there exists a function $G(x, y)$ holomorphic in (S, S') , uniform in (Σ, S') , where Σ is any simply connected part of S , and such that in (S, R_p) (boundaries included (...)) the quotient

$$\frac{G(x, y)}{u_p(x, y)}$$

is holomorphic and different from zero. [Gronwall 1917 53]

Maintenant que l'on a précisé ce que la preuve de Cousin prouve, on peut se demander si l'on peut prouver le théorème qu'il l'avait énoncé. Gronwall montre ici que l'hypothèse topologique de simple connexité de toutes les composantes du polycylindre (sauf au plus une)

est fondamentale ; un même exemple, sur le produit de deux domaines annulaires, permet d'établir non seulement que le procédé de démonstration de Cousin peut conduire à des fonctions multiformes, mais, qu'il n'existe pas toujours de fonction ayant la propriété multiplicative demandée [Gronwall 1917 57-64]. Si l'analyse de la preuve de Cousin semble être le fruit d'un travail commun d'Osgood et Gronwall, ce contre-exemple délicat est un apport propre de Gronwall. C'est ce contre-exemple qui a conduit nos deux auteurs à analyser la démonstration de Cousin²² : il semble donc que l'erreur de Cousin avait échappé au pointilleux Osgood comme elle avait échappé aux examinateurs.

²² On le voit dans l'exposé d'Osgood [Osgood 1913 46].