Les propriétés de l'espace, sont–elles proprement irréductibles ou sont-elles au contraire justiciables d'une analyse conceptuelle ? Kant contre Leibniz, une discussion de l'analyse du philosophe Albert Lautman.

Jean-Jacques Szczeciniarz*[1]
Université Paris-Diderot

[1] Adresse électronique : Szczeciniarz@paris7.jussieu.fr

Table des matières

1-Introduction

Comment analyser l'espace?
La question que je pose sera orientée dans une direction mathématique. Si l'on se place du point de vue de la topologie comme appréhension mathématique de l'espace la question posée devient celle-ci : les liaisons qui nous semblent s' y manifester tiennent-elles à la nature des contraintes qui s'y exercent, ou celles que notre manière de l'appréhender impose, est-il de ce point de vue une pure manière de réceptionner le monde extérieur et les mathématiques que nous forgeons ne viennent-elles que s'y inscrire, ou peuvent-elles en investir complètement la structure et en produire une traduction algébrique qui la réduise à un système de concepts?

Je voudrais présenter quelques analyses mathématiques et philosophiques de l'espace ayant trait en particulier à la différence entre l'espace de dimension trois et celui de dimension deux.
Pour ce faire je vais vous présenter certaines idées ou thèmes philosophiques qui sont à la base d'un certain traitement algébrique de l'espace. Je prends mes appuis dans la philosophie ébauchée par Albert Lautman [2]

Après avoir introduit à une analyse de la différence entre les conceptions de l'espace de Leibniz Kant, différence est une opposition classique en philosophie qui n'est pas toujours appréciée dans sa pleine signification, l'analyse se centrera va tenter sur des aspects de la notion d'intrinsécéité, et sur les apports que la topologie algébrique permettent d'approfondir en particulier à travers la notion de dualité..
Je reprends ensuite des résultats du mathématicien Louis Antoine obtenus de sa thèse: *Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages* [LA] que Lautman cite et retient pour sa réflexion philosophique, et reprend les éléments de ce résultat à la lumière de la théorie de l'homologie
Je tente enfin une discussion sur la philosophie proposée concernant les espaces mathématiques R^3 et R^2.

2-Leibniz-Kant
Lautman commence par distinguer entre les propriétés qui résultent pour un être géométrique, de sa nature intrinsèque et celles qui résultent de ses relations avec le milieu qui l'entoure.
Les propriétés intrinsèques dit Lautman, appartiennent en propre à l'être que l'on envisage indépendamment de ses relations avec les autres êtres (de l'existence d'autres êtres) ou avec le milieu environnant (l'espace). J'ajoute que cette indépendance peut être construite, la construction présentant en quelque sorte des propriétés propres à l'être sur lequel nous allons

[2] philosophe français que son engagement dans la Résistance française, comme chef de guerre puis sa capture par les Allemands a enlevé à une philosophie des mathématiques de grande qualité en plein développement

travailler, comme une variété que nous considérons indépendamment des cartes et des coordonnées qui la relient à l'espace ambiant.
Les propriétés de relation ne peuvent au contraire être attribuées à un être mathématique que si l'on se réfère à autre chose qu'à lui, « les propriétés de relation traduisent en somme la solidarité d'un être et de l'univers au sein duquel il est plongé ».

a) **L'opposition Leibniz-Kant**
Cette opposition porte sur leurs conceptions relatives aux propriétés extrinsèques des êtres géométriques.
Selon Leibniz les rapports que la monade entretient avec toutes les autres monades se réduisent à des propriétés internes, enveloppées dans l'essence de la monade individuelle.
Je reprendrai une analyse célèbre de Russell. Ce qu'il appelle le « principe des relations internes ». « La doctrine des relations internes prétend que toute relation entre deux termes exprime en premier lieu, les propriétés intrinsèques des deux termes et, si l'on pousse l'analyse une propriété du tout qu'ils constituent ensemble. Avec certaines relations cette vue est plausible. Considérons l'exemple de l'amour et de la haine. Si A aime B cette relation donne un exemple d'elle-même et on peut qu'elle consiste en certains esprits de A. Même un athée doit admettre qu'un homme peut aimer Dieu. Il s'ensuit que l'amour de Dieu est l'état d'un homme qui le ressent et non pas proprement un fait relationnel. Mais les relations qui m'intéressaient étaient d'un type plus abstrait. Supposons que A et B soient des événements et que A soit antérieur à B. Je ne pense pas que cela implique quoi que ce soit en A en vertu de quoi, indépendamment de B , il doive avoir un caractère que nous exprimons de façon impropre en mentionnant B. Leibniz donne une exemple extrême. Il dit que si un homme vivant en Europe a une femme aux Indes et que la femme meurt sans qu'il l'apprenne l'homme subit un changement intrinsèque au moment de cette mort ».[R p.54-55]
On sait que Russell s'est opposé à cette doctrine des relations internes. Elle est particulièrement inapplicable dans le cas des relations « asymétriques », de relations qui si elles ont lieu entre A et B ne peuvent avoir lieu entre B et A. Si on prend l'exemple de la relation « antérieur ». Si A est antérieur à B , B n'est pas antérieur à A. Et l'on sait également que Russell a développé une analyse qu'il a appliquée à Leibniz pour mettre en défaut son système. Qu'importe la critique que Russell adresse au système de Leibniz qui est pleine de difficultés, nous pouvons en retenir sa mise en évidence de cette notion de relation interne.
Lautman quant à lui, distingue deux moments constitutifs du système des monades: celui où Leibniz conçoit la sympathie universelle de toutes les monades, celui où il inscrit cette sympathie dans la loi du devenir interne de chaque monade isolée de toutes les autres. Ces deux aspects ont été largement étudiés (Jalabert p.e.)
Une chose peut en exprimer une autre comme « une projection de perspective exprime son géométral »[Le1]
« Chacune de ces substances représentant exactement l'univers à sa manière, et suivant un certain point de vue, et les perceptions des choses externes arrivant à l'âme à point nommé, en vertu de ses propres lois, comme dans le monde à part et comme s'il n'existait rien que Dieu et elle...il y aura un parfait accord entre toutes les substances ». [Le2]

b) La théorie kantienne de l'espace, aspects principaux
Deux textes sont rapportés par Lautman. [L p.150]
Les positions respectives que les corps e l'espace occupent les uns par rapport aux autres ne se laissent pas décrire, dit Lautman, uniquement en termes de relations mutuelles entre les corps.

« Elles se réfèrent à un système de référence privilégié et universel, celui qu'établissent dans l'espace les distinctions fondamentales de la gauche et de la droite, du haut et du bas, de l'avant et de l'arrière du corps humain » [L p. 150]
Kant se rapporte à la manière dont les cheveux sont plantés sur la tête, dont se déroulent les spirales des coquilles du limaçon, dont le houblon monte à son tuteur, on observe, dit-il, partout dans la nature un mouvement privilégié de la gauche vers la droite. D'où l'incongruence des figures symétriques. La main gauche et la main droite possèdent examinées en elles- mêmes, exactement les mêmes parties, celles-ci sont dans chaque main disposées de la même façon, les deux mains sont donc identiques et semblables (*gleich und ähnlich*). Mais si elles sont bien symétriques, elles ne sont pas superposables.
Je poursuis l'analyse de Lautman. L'incongruence des figures symétriques se rattachent à la structure de notre corps et se retrouve en géométrie pure. Kant invoque le cas des triangles sphériques parfaitement semblables et identiques et qui ne peuvent se recouvrir.
La thèse principale de Kant est qu'il y a des faits sensibles dont aucune analyse rationnelle des propriétés internes des corps ne peut rendre compte. Ces faits résultent de la place que ces corps occupent dans l'espace sensible. La raison ne peut caractériser de façon abstraite les propriétés des corps. Les propriétés qui résultent de leur position dans l'espace ne peuvent être appréhendées que par l'intuition sensible qui se rapporte à l'intuition de l'espace. « ... patet hic non nisi quadam intuitione pura diversitatem nempe discongruentiam notari posse »[K p. 396] cité in [L p. 151]

Ce point de vue précisé dans la physique et la géométrie contemporaines est celui qui traite de la question de la chiralité. En géométrie une question est de savoir si on peut ou non orienter un espace donné.
Pour la physique il s'agit de phénomène de physique élémentaire asymétrique par réflexion qui possède donc ce que l'on appelle une chiralité.
La géométrie différentielle s'est construite à partir d'un concept essentiel qui a été forgé au cours du XIX[è] siècle : celui de variété. Le concept désigne une entité géométrique qui est structurée de façon à acquérir une autonomie depuis l'espace dans lequel elle est située. La première forme qu'elle a prise est celle d'une surface abstraite.
La géométrie différentielle constituée par Gauss et Riemann étudie ainsi les propriétés d'une variété, indépendamment de l'espace dans lequel cette variété serait plongée, éliminant toute référence à un contenant universel ou à un centre de coordonnées privilégié. Riemann a généralisé le point de vue de Gauss. Les notions de distance, de courbure, de géodésique, y ont un sens intrinsèque car elles sont définies de proche en proche sans sortir de la variété.

3-Approfondissement de la notion d'intrinsécéité.
Une variété sur laquelle est définie une mesure de distance, un ds^2, à plus de deux dimensions n'est plus susceptible de comparaison intuitive du moins à un niveau élémentaire avec une surface. Les notions de géométrie différentielle, qui ont abstrait et intégré à des niveaux plus profonds et subtilement les notions intuitives, sont devenues des notions intellectuelles, caractérisant un « mode d'exploration mathématique d'une variété par cheminement sur cette variété ». Il faut concevoir que nous réussissons à nous placer en pensée sur la variété géométrique et que nous l'explorons en nous déplaçant sur celle-ci qui possède donc une forme et une structure en elle-même autonome. Ce déplacement s'effectue sur la surface de la variété indépendamment de l'espace ambiant dans laquelle elle est comme on dit « plongée ».

4- Remarques principales de Cartan et Weyl

Dans l'espace euclidien ordinaire, un champ de vecteurs constant x devrait avoir pour propriété que toutes les flèches qui servent à le décrire doivent être parallèles les unes aux autres. Ainsi dans une variété euclidienne une certaine notion de parallélisme a-t-elle sa place. La géométrie hyperbolique n'admet pas de champ de vecteurs que nous puissions considérer sans ambiguïté comme parallèles partout. Aussi une grande révolution de la géométrie a-t-elle consisté à concevoir une notion de parallélisme attachée à la surface ou à la variété considérée.

La notion de parallélisme a commencé par être définie par référence à l'espace ambiant, puis le point de vue de Cartan et celui de Weyl a mis en évidence la supériorité de la vision intrinsèque.

Cartan explique, comme le rappelle Lautman, que le point de vue des propriétés induites est « philosophiquement inférieur » au point de vue intrinsèque et, je cite [p. 152-153]« le moindre résultat dans le sens de la réduction de l'extrinsèque à l'intrinsèque tend en effet à inscrire dans la structure d'un être les relations qu'il soutient avec l'espace ambiant et à restaurer ainsi la vision de la monade leibnizienne » L'opération philosophique que tente de réaliser Lautman consiste à mettre au bénéfice d'une position leibnizienne pour laquelle les relations qu'un être entretient aux autres et à son extérieur sont internes, tout progrès dans le sens du développement de propriétés intrinsèques.

a)Le parallélisme

Rappelons le cas du parallélisme de Tullio Levi-Civita. Je vais commenter un peu plus précisément cette situation. Le raccordement des voisinages des différents points n'est plus indéterminé reprend Lautman citant Cartan. Les morceaux d'espace sont orientés de proche en proche les uns par rapport aux autres, de telle sorte qu'il soit constamment possible de définir le parallélisme de deux vecteurs issus de deux points infiniment voisins. Cartan explique comment ce parallélisme est dans la théorie de Levi-Civita induit sur la variété par l'espace euclidien ambiant dans lequel elle est plongée.

Cartan prend l'exemple d'une courbe de l'espace euclidien. La cinématique d'un mobile sur cette courbe est identique à la cinématique d'un mobile sur une droite. Cette correspondance entre axes de courbe et segments de droite vient de ce qu'il est possible de dérouler la courbe sur une droite initialement tangente en un point à la courbe. De la sorte on peut projeter une courbe sur sa tangente. Comme le dit Lautman,[L p.153] les opérations d'enroulement et déroulement d'une courbe sur une droite ne sont possibles que par une série de projections successives de la courbe sur la droite mais dans l'espace qui les contient l'une et l'autre. Autrement dit ces opérations présupposent l'espace ambiant et ne peuvent qu'être extrinsèques.

Si l'on replace cette analyse dans un contexte plus général, on doit dire que le concept de « congruence métrique » a d'abord été considéré comme la seule relation de base de la géométrie et que la géométrie physique s'est développée par son entremise en termes de positions relatives et de déplacements de congruences physiques standards. La théorie de la Relativité Générale a impliqué une approche de la géométrie physique très différente des vues métriques de Helmholtz, Poincaré, Hilbert. Elle a suggéré que la géométrie affine puisse se développer indépendamment de la métrique. C'est une connexion affine qui relie l'état d'un système en un point de l'espace temps aux événements voisins de l'espace temps et appartient aux différentielles des grandeurs correspondantes. Après que Einstein a appliqué la Géométrie Riemannienne à la théorie de la Relativité Générale la géométrie riemannienne s'est beaucoup développée et Tullio Levi-Civita a introduit la notion de transport infinitésimal qui éclaire certaines propriétés de la Géométrie riemannienne. Et c'est Weyl qui en 1918 a généralisé le concept de déplacement parallèle de Levi Civita en introduisant une structure affine sur une variété par le concept de déplacement parallèle qui ne demande pas le plongement de la variété dans un espace métrique de dimension supérieur libérant le concept de transport

parallèle de sa dépendance d'une métrique riemannienne. Il ouvre ainsi la possibilité de fonder la géométrie différentielle sur une notion intrinsèque seulement.
Lautman rapporte la manière dont Cartan expose le point de vue de Levi-Civita dans l'article qu'il cite [Ca]. Prenons le cas de deux vecteurs tangents à une variété issus de deux points infiniment voisins de la variété, A et A'. Considérons le plan tangent à la surface en A. Il contient le vecteur tangent à V issu de A. On peut projeter orthogonalement sur ce plan le vecteur issu du plan infiniment voisin A'. Les deux vecteurs issus de A et de A' seront dits parallèles si la projection du second sur le plan tangent en A est parallèle au sens ordinaire au vecteur issu de A. Il est remarquable que cette construction a consisté à installer dans la variété le parallélisme de deux vecteurs en passant par l'intermédiaire des plans tangents qui contiennent les vecteurs tangents à la variété et donc à localiser la notion de parallélisme pour lui redonner un sens.
Si l'on attache à A et A' des systèmes locaux de références, les seconds axes subissent une rotation par rapport aux premiers on peut déterminer les angles de cette rotation de sorte que les conditions du parallélisme de deux vecteurs infiniment voisins soient constamment satisfaites [L p. 154]
Les plans extérieurs tangents, les projections et les rotations qu'implique le parallélisme de Levi-Civita n'ont de sens que par rapport à l'espace dans lequel la variété est plongée. Cartan montre toute la différence qui sépare le point de vue de Levi-Civita et le sien ou celui de Weyl. La définition intrinsèque se présente de la manière suivante: en dimension deux, deux directions issues de deux points voisins A et A' sont parallèles si elles font le même angle avec la géodésique qui passe par A et A'. On ne fait appel dans ce cas à aucune opération dans l'espace extérieur.

b) L'argument de Weyl

Il est possible de préciser l'argument de Weyl de la manière suivante. [W] p. 210-211.Soit une variété M et un point de celle-ci, il faut choisir un étalon de longueur, une jauge arbitraire avant que les longueurs des vecteurs ne soient déterminées. Tout ce qui est intrinsèque à la notion de géométrie métrique en un point est la possibilité de déterminer les rapports de longueur de deux vecteurs et l'angle de ces deux vecteurs en un point. Une variété métrique doit fournir ces deux genres de déterminations. Une variété métrique doit posséder une structure conforme (qui conserve les angles) mais Weyl demande en plus que la structure métrique en un point soit connectée à son voisinage infinitésimal. Une structure conforme détermine seulement une classe d'équivalence de connections affines mais comme Weyl le montre la structure additionnelle requise pour déterminer une unique connection affine est fournie par le transport congruent de longueur. Je donne donc les deux définitions suivantes.
Un point p de M est métriquement connecté à son voisinage infinitésimal si et seulement si pour toute longueur en p, il est possible de déterminer en tout point p' infinitésimalement proche de p une longueur à laquelle la longueur en p donne lieu quand elle est déplacée de manière congruente de p à p'.
Par rapport à un choix de jauge pour un voisinage de p dans M, le transport d'une longueur l_p en p dans M à un point infiniment voisin p' constitue un déplacement congruent si et seulement si il existe un choix de jauge pour le voisinage de p dans M relativement auquel la longueur transportée $\overline{l}_{p'}$ a la même valeur que $\overline{l}_p$.

$$\overline{l}_{p'} - \overline{l}_p = d\overline{l}_p = 0$$

Weyl appelle une telle jauge *géodésique*.
La réflexion de Lautman porte ensuite sur les limitations de cette réduction de l'extrinsèque à l'intrinsèque. Il y a bien suivant son analyse une détermination de plus en plus précise de notions intrinsèques qui soient à la base de la géométrie nouvelle. On peut bien dire alors que nous avons affaire à un processus suivant lequel les déterminations des relations à l'espace

extérieur sont internalisées à la constitution de l'objet qui entretenait ces relations à l'espace qui lui était posé extérieur. Dans la mesure où il s'agit de déterminations relationnelles que celles-ci sont dans le sens énoncé internes et qu'elles sont de nature conceptuelles nous sommes bien dans une situation leibnizienne monadologique.

5- Structure et situation en topologie algébrique

Cette « dualité » extrinsèque-intrinsèque se retrouve en topologie algébrique. Je vais reprendre la suite de l'argument de Lautman pour le discuter.

Il prend appui sur les auteurs comme [S T], [A H], qui ont mis au centre de leurs considérations sur la topologie la dualité des points de vue intrinsèque et extrinsèque.

Mais cette fois le type de relations que nous examinons est quelque peu différent. Il ne s'agit plus de propriétés des objets géométriques comme le parallélisme de deux vecteurs sur une surface dont on conçoit qu'elles puissent être déterminées par des propriétés de la surface elle-même.

On se place du point de vue de la topologie. Les propriétés qu'étudie la topologie sont celles qui sont conservées par homéomorphisme (transformations biunivoques et bicontinues). On distingue deux sortes d'homéomorphies: celles qui sont réalisables par déformation de deux figures qui les amènent à coïncider dans l'espace, celles qui sont homéomorphes sans qu'aucune déformation dans l'espace ne puisse les amener à coïncider.

Lautman annonce ainsi le problème qu'il va considérer. Deux courbes fermées quelconques si elles sont situées dans un même plan on peut toujours réaliser une correspondance homéomorphique entre elles en amenant par une série de positions intermédiaires l'une des deux courbes à coïncider avec l'autre, mais « si elles ne sont pas

Figure 1 Le nœud de trèfle

pas situées dans un même plan, il se peut qu'il soit impossible de les amener sans déchirure à coïncider . Lautman prend l'exemple du cercle et du nœud de trèfle (vous avez ici un nœud de trèfle).

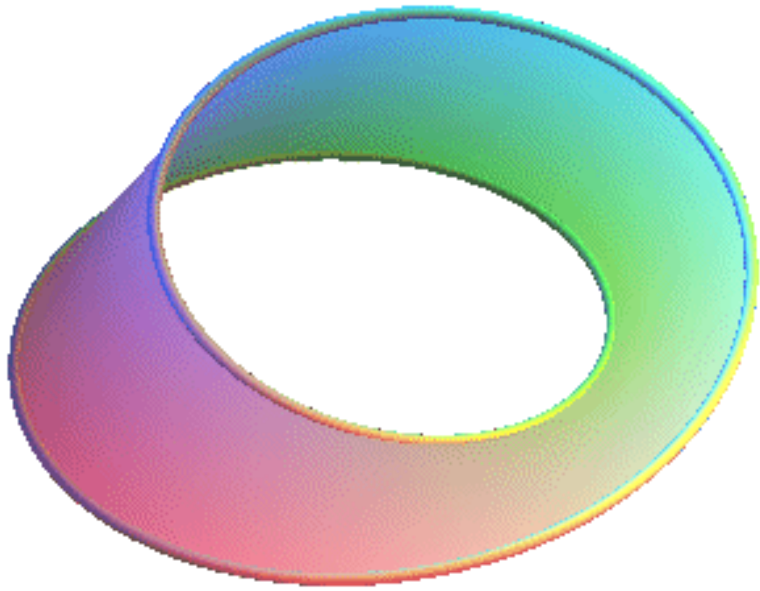
Ce sont deux courbes homéomorphes, il existe une correspondance ponctuelle bijective et bicontinue entre leurs points respectifs.

Il est impossible de les amener à coïncider par une déformation continue dans l'espace. Il « existe pour des figures des propriétés internes (*Innere Eigenschaften*) [S et T] ou propriétés de structure (*Gestaltliche Eigenschaften* [A et H] comme celles d'être une courbe fermée, et qui sont indépendantes de toute référence à l'espace ambiant »

Et il y a des propriétés d'insertion ou de situation (*Einbettungseigenchaften, Lageeigenschaften*) qui sont attribuées à une figure par les relations qu'elle entretient avec toutes les figures de l'espace.
D'où ce problème leibnizien : est-il possible de déterminer des propriétés de situation par la connaissance des propriétés de structure? C'est le sens qu'il faut donner au terme d' *Analysis Situs* dû à Leibniz. Le mouvement dénoté dans l'analyse précédente va dans ce sens. Une longueur et une courbure qui sont des propriétés apparemment de situation sont en réalité dans de nombreux cas des propriétés qui dépendent de propriétés structurelles de la surface considérée.
Remarquons qu'une surface sphérique n'est pas développable : aussi petit soit-il on n'arrivera pas à écraser un morceau de calotte sphérique sur un plan sans la déchirer (si elle est en celluloïd : balle de ping-pong) ou sans l'étirer (si elle est en caoutchouc). Un homéomorphisme local de la surface sphérique sur le plan ne sera jamais une isométrie.
Considérons la propriété d'être orientable. Elle signifie que l'on peut déplacer un vecteur sortant normal à une surface de façon continue de sorte qu'il pointe toujours vers l'extérieur. Cela signifie que le déterminant des vecteurs qui forment un repère sur la surface reste égal à 1. Lautman donne l'exemple classique de la bande de Möbius, qui manifeste selon lui, la rencontre du point de vue de la situation et du point de vue intrinsèque. La bande de Möbius est obtenue en identifiant les deux extrémités d'une bande après avoir tordu l'une d'elle ou en ayant inversé les deux points extrêmes de l'une d'elle. Cette bande n'a qu'un seul côté ce qui est une propriété extrinsèque car pour la vérifier il faut fendre le ruban et le détordre et donc effectuer une rotation autour d'un axe extérieur à la bande. Mais on peut aussi déplacer continument une droite sur la surface et l'on constate que la droite retourne au point de départ avec une orientation inverse de celle du départ. Dans un espace orientable à n dimensions l'espace euclidien par exemple, il y a pour une variété à n-1 dimensions équivalence entre le fait d'être bilatère et celui d'être orientable. Se rencontrent dit Lautman le point de vue de situation et le point de vue intrinsèque. L'orientabilité ou la non-orientabilité sont des propriétés intrinsèques, l'unilatéralité ou la bilatéralité des propriétés extrinsèques qui dépendent de l'espace ambiant (cf. figure 2, le ruban de Moebius)).
Des propriétés géométriques de relation se laissent exprimer par des propriétés algébriques intrinsèques.
Je voudrais pour clarifier la question kantienne citer un texte de « Qu'est-ce que s'orienter dans la pensée ? » [K 3]. « S'orienter signifie au sens propre du mot : d'après une contrée du ciel donnée (nous divisons l'espace en quatre contrées de cette sorte) trouver les autres, notamment le levant. Si je vois en ce moment le Soleil dans le ciel et si je sais qu'il est maintenant midi, je serai capable de trouver le sud, le nord et l'est. Mais j'ai besoin à cet effet d'éprouver dans mon propre sujet le sentiment d'une différence, celle de ma droite et de ma gauche. Je dis sentiment parce que, du dehors, ces deux côtés ne présentent dans l'intuition aucune différence perceptible. Si, traçant un cercle en dehors de toute référence à une dissemblance entre les objets qu'il pourrait impliquer, je n'avais cette faculté di distinguer le mouvement de droite à gauche du mouvement opposé, et d'établir a priori ainsi une différence dans la position des objets, je ne saurais s'il faut situer l'ouest à droite ou à gauche du point sud de l'horizon et, pour achever le cercle, rejoindre alors le sud par le nord et par l'est. Ainsi je ne m'oriente géographiquement, malgré toutes les données objectives figurant dans le ciel que par un principe subjectif de différenciation ; et si un jour par un miracle, toutes les constellations, gardant par ailleurs la même configuration et bien la même la même position relative, avaient simplement leur orientation inversée d'est en ouest, nul regard humain à la vérité, ne remarquerait dans la première dans la première nuit étoilée qui suivrait, le moindre changement ; et même l'astronome qui ne considérerait que ce qu'il voit ou non, tout à la fois, serait fatalement désorienté. Dans ces conditions cependant, viendra à son aide, de façon

naturelle, cette faculté innée certes, mais accoutumée par une fréquente pratique, de différencier au moyen du sentiment la droite et la gauche, et il lui suffira de porter les yeux sur l'Etoile polaire pour s'apercevoir du changement survenu et pour s'orienter en dépit de celui-ci. » L'orientation selon Kant est bien fondée sur un principe subjectif de différenciation de la droite et de la gauche qui en dépit d'une relativité indistinguable de la position des objets permet d'établir une différence. Ce principe subjectif qui détermine l'intuition et est irréductible ne peut être absorbé par la position et l'organisation des objets dans l'espace. Il ne s'agit en aucun cas d'une relation entre les objets qui pourrait leur être intériorisée mais il permet leur différenciation *a priori*.

Voici trois représentations du ruban de Moebius, on voit qu'il s'agit d'une surface non orientable, une normale qui glisse le long de cette surface se retourne sans qu'il ait été besoin de changer de côté précisément parce qu'il n' y a qu'un seul côté ;



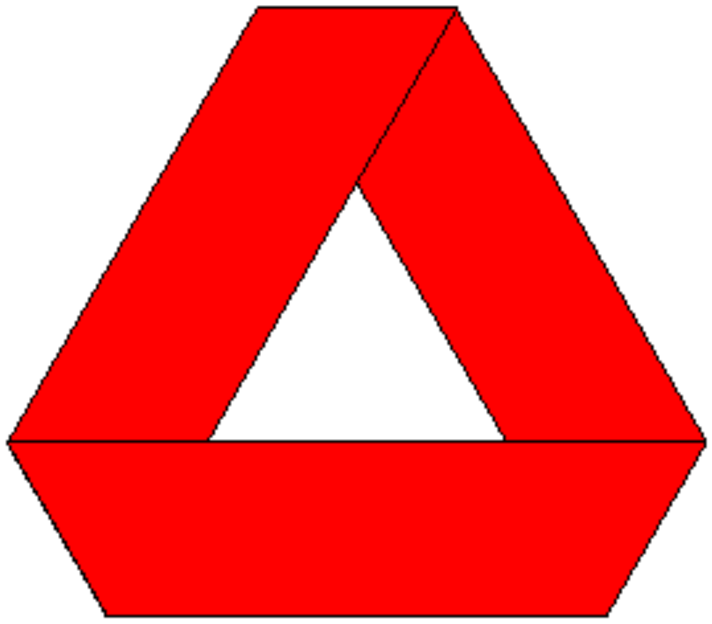


Figure 2

6- Les théorèmes de dualité: une question leibnizienne prégnante

Or précisément la topologie algébrique nous fournit des moyens de rapporter des propriétés de situation à des propriétés de structure de l'objet géométrique introduit dans l'espace. Ce qui ferait alors de l'espace un ensemble de relations ou de propriétés intériorisées à l'objet d'abord vu en situation.
L'introduction d'un polyèdre au sein de l'espace modifie la structure interne de cet espace en soumet les éléments à de nouvelles connexions « et établit entre l'espace et lui les relations qui caractérisent son mode d'insertion dans l'espace ». Les théorèmes de dualité en topologie permettent de déterminer cette action du polyèdre sur l'espace à partir de la seule connaissance structurale du polyèdre. L'analyse que propose Lautman est de fait complexe. L'introduction d'un polyèdre ou ce qui revient au même la soustraction à l'espace de ce polyèdre se répercute sur la structure de l'espace tout entier. C'est un phénomène général, enlevez l'origine à **R** il n'est même pas étoilé.
Mais cette détermination que nous allons discuter est-elle un argument suffisant en faveur d'une conception de l'espace purement relationnelle qui permet de faire absorber des propriétés qui l'organisent par les objets géométriques introduits ?

Le polyèdre jouit ainsi de certaines propriétés de la monade leibnizienne. Il exprime de son point de vue les propriétés de l'espace complémentaire du sien. Et donc ses relations à l'espace tout entier.

7-Quelques propriétés topologiques caractéristiques

Du point de vue de la topologie algébrique élémentaire nous avons affaire à des simplexes et des complexes simpliciaux. Un point est un simplexe de dimension zéro, un segment AB un simplexe à une dimension, déterminé par les deux points A et B, un triangle est un simplexe à deux dimensions, n+1 sommets déterminent un simplexe à n dimensions. Ce simplexe possède des faces à 0, 1, 2,..., n-1 dimensions en considérant successivement ses sommets, ses arêtes, ses côtés etc.

A partir de là nous pouvons donner la définition d'un complexe simplicial. C'est une figure formée d'un ensemble de simplexes possédant les propriétés suivantes

Tout point de la figure appartient au moins à un simplexe

Tout point n'appartient qu'à un nombre fini de simplexes

Etant donné deux simplexes ou bien ils sont sans point commun, ou bien l'un est en face de l'autre, ou bien ils ont une face commune

Les voisinages d'un point dans les différents simplexes auxquels il appartient sont réunis en un voisinage unique

La dimension de ce complexe est celle du simplexe ayant la dimension la plus élevée dans la décomposition simpliciale du complexe. L'exemple donné par Lautman est celui que l'on donne en général, la surface d'une sphère est un complexe à 2 dimensions dont on obtient une décomposition en considérant le tétraèdre ABCD inscrit. Le tétraèdre est un simplexe à 3 dimensions: les 4 triangles qui le limitent forment un complexe à 3 dimensions topologiquement équivalent à la surface de la sphère où interviennent 4 simplexes à 2 dimensions: les 4 triangles ABC, ABD, BCD, ACD, 6 simplexes à 1 dimension les 6 arêtes et 4 simplexes à 0 dimension
Nous avons là une organisation de l'espace à l'aide de ces structures. Celle-ci est contrainte par une hiérarchie de compositions à partir de ces simplexes. Cette composition elle-même provient d'une réflexion sur les polyèdres. Cette réflexion fondée sur une longue tradition est orientée vers une question beaucoup plus générale qui est celle de l'organisation possible de l'espace. Si l'on procède à cette identification on peut concevoir que la question soulevée soit vue comme leibnizienne.
Il ne s'agirait plus d'installer dans l'espace pré-donné une suite de construction, mais de voir l'espace lui-même comme le résultat de ces constructions.

Je poursuis l'analyse de la réflexion de Lautman et du choix de ses objets d'analyse. Toute étude structurale d'un complexe repose sur la connaissance de certains nombres appelés *nombres de Betti* invariants par toute transformation topologique. Intuitivement un nombre de Betti correspond au nombre maximum de coupes qui peuvent être faites sur une surface en des endroits appropriés sans que celle-ci soit divisée en deux pièces ou plus. Si on coupe un tube de papier dans le sens de la longueur le papier reste en une pièce.
On définit sur un complexe de dimension n certaines combinaisons de simplexes de la dimension 0, de la dimension 1, de la dimension n, qui forment des cycles relatifs à chaque dimension. On définit ce que l'on entend par indépendance de plusieurs cycles d'une même dimension. Et les nombres de Betti mesurent pour chaque dimension de 0 à n le nombre maximum de cycles indépendants de cette dimension.

Je donne en suivant Lautman la définition d'un cycle avec quelques commentaires. Pour un simplexe de dimension n on appelle frontière de ce simplexe la somme algébrique de ses faces à $n-1$ dimensions. Il faut bien noter que nous effectuons une somme algébrique de faces, ce qui signifie une façon de les conjoindre. Ce qui correspond à une forme de construction spatiale. Les éléments de la construction restant à disposition visibles dans le montage.

On appelle *k*-chaîne une somme algébrique de simplexes de la dimension *k*, chacun pouvant être éventuellement multiplié par un coefficient entier. On appelle cycle une chaîne fermée, c'est-à-dire une chaîne dont la frontière est nulle. On voit comment cette théorie remplit l'espace et le reconstitue. Les concepts de chaîne et de cycle établissent les conditions de cette expansion reconstruction.
Le nombre de Betti de la dimension 0 mesure les composantes du complexe, c'est-à-dire le nombre de parties isolées qui le composent. L'espace euclidien dont on retire les points situés sur une couronne circulaire a son nombre de Betti de la dimension 0 égal à 2. En effet un point de la partie hachurée extérieure et un point de la partie intérieure ne peuvent être reliés par un chemin continu. Ils appartiennent donc à deux composantes connexes distinctes.
Le nombre de Betti de la dimension 1 mesure le nombre maximum de courbes fermées indépendantes qui ne sont pas réductibles à un point par déformation continue. Le plan euclidien percé de deux trous. Les bords des trous sont des courbes irréductibles à un point, le nombre de Betti de la dimension 1 est égal à 2. A quel concept correspondent exactement les nombres de Betti ? Il s'agit d'indiquer une manière de décomposer une surface par exemple pour la dimension 2, à l'aide d'objets de dimensions différentes. Le nombre de Betti de dimension 0 enregistre la décomposition donnée (les composantes connexes éventuelles) dans le cas de la dimension 1 il s'agit de courbes fermées sur la surface qui découpent celle-ci en deux morceaux et ainsi de suite. Il s'agit bien d'une mise au jour d'invariant de structure de la surface qui contraint le mode de décomposition de celle-ci. On les découvre quand on cherche à agir sur ces objets géométriques qu'on veut démembrer.
Lorsque l'on dispose de ce mode de structuration des objets de l'espace et en même temps d'un mode de calcul fondé sur cette organisation hiérarchisée, on peut se demander si nous pouvons l'exploiter pour obtenir une analyse de l'espace extérieur aux objets géométriques qu'il a accueillis. C'est l'objet des théorèmes de dualité.

8-Les théorèmes de dualité Poincaré Alexander

Le théorème de Poincaré énonce que pour une multiplicité fermée de dimension *n*, les nombres de Betti de la dimension *k* sont égaux aux nombres de Betti de la dimension *n-k*. Cette symétrie interne entre les nombres de Betti d'un même complexe Q vient de ce que les nombres de Betti de la dimension *k* sont les nombres de Betti de la dimension *n-k* pour un autre complexe que le premier, son complexe *dual*. Le complexe dual Q* d'un complexe Q résulte d'une autre décomposition en cellules des mêmes points que ceux qui figurent dans la décomposition en cellules de Q.
Chacune des cellules à *n-k* dimensions de Q* intersecte les cellules à *k* dimensions du complexe Q. Et Lautman fait le commentaire suivant. « Alors que nous étions partis d'une conception où les nombres de Betti étaient les caractéristiques propres à cette variété (multiplicité), voici que l'être étudié se dédouble et que les nombres de Betti du nouveau complexe peuvent être déterminés à partir de l'ancien. Cette dualité au sein d'un même être a donc déjà le sens d'une relation entre deux êtres discernables quoiqu'encore indissolublement liés l'un à l'autre. » Cette dualité possède une longue histoire. A la différence de la dualité que l'on établit en géométrie projective, dualité de Desargues, point /plan, plan/plan, plan /point, dans le cas d'un complexe nous avons affaire à une décomposition précise suivant les contraintes du complexe d'une figure quelconque et la dualité est construite dans le complémentaire du complexe initial. C'est la raison pour laquelle il semble que l'on ait affaire à l'espace tout entier.

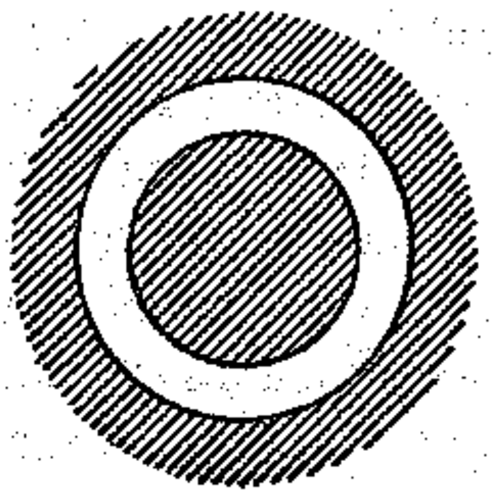


figure 3

*L'espace euclidien dont on retire les points situés sur une couronne circulaire a son nombre de Betti de la dimension 0 égale à 2. Un point de la partie hachurée extérieure et un point de la partie hachurée intérieure appartiennent respectivement à deux composantes connexes distincts. Le nombre de Betti de la dimension 1 du plan euclidien percé de deux trous car les bords des trous sont des courbes irréductibles à un po*int.

9-Correspondance entre deux êtres distincts

On franchit une étape supplémentaire lorsque l'on passe d'une symétrie interne à une correspondance entre deux êtres distincts. Lautman ajoute à juste titre qu'il s'agit de fait d'un changement de perspective sur une situation fondamentalement semblable.
On considère un complexe Q à *k* dimensions plongé dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ à *n* dimensions. Soit $\mathbf{R}^n$- Q l'espace complémentaire du complexe Q. Le théorème d'Alexander démontre l'existence d'une nouvelle dualité entre les nombres de Betti de Q et ceux de son complémentaire, $\mathbf{R}^n$- Q.
Soit p^r (Q) le nombre de Betti de dimension *r* du complexe Q. On a : $p^r (Q) = p^{n-r-1} (\mathbf{R}^n - Q)$.
Le nombre de Betti de dimension *r* de Q est égal au nombre de Betti de dimension *n-r-1* de R^n - Q, sauf pour le cas où $r = n-1$ pour lequel on a
$P^{n-1}(Q) = p^0 (\mathbf{R}^n - Q)-1$.
Lautman à titre de complément introduit la notion d'*enlacement* de Pontrjagin. On dit qu'il y a enlacement entre deux courbes fermées sans points communs s'il y a intersection entre le plan compris à l'intérieur d'une de ces courbes et l'autre courbe. Donc il y a dans $\mathbf{R}^n$ enlacement entre les cycles frontières de dimension r appartenant à Q et les cycles frontières de dimension *n-r-1* appartenant à $\mathbf{R}^n$ –Q. Et donc on peut en déduire dit Lautman qu'il y a intersection entre les cycles frontières de la dimension r de Q et certaines chaînes de dimension *n-r* de $\mathbf{R}^n$ –Q. On doit pouvoir alors considérer ces cycles de dimension r et ces chaînes de dimension *n-r* comme appartenant respectivement à des complexes en dualité.

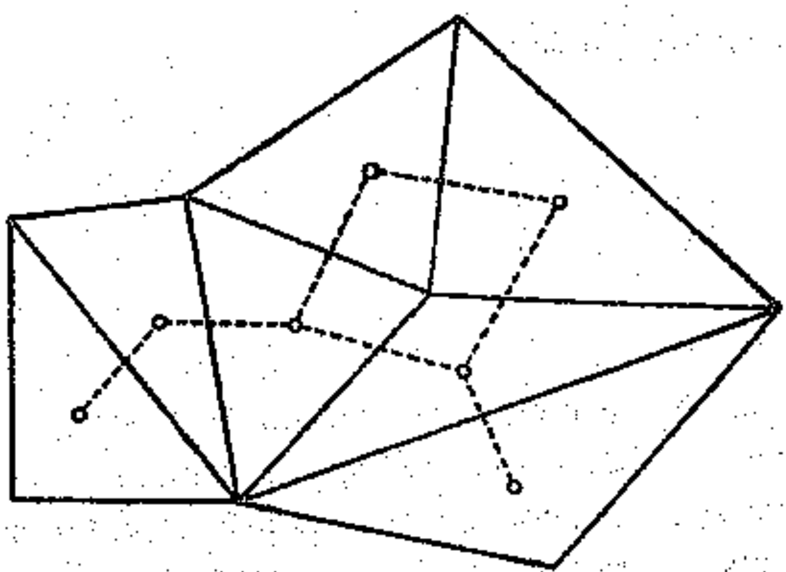


Fig. 4. (d'après la figure 13 de la Topology de S. Lefschetz)

Le nombre de Betti de la dimension 2 est égal au nombre de Betti de la dimension **1.** *Le complexe dual résulte d'une autre décomposition en cellules à partir des mêmes points que ceux qui figurent dans la première décomposition en cellules.*

9-La signification philosophique de ce résultat

Dans l'espace euclidien à *n* dimensions tous les nombres de Betti sont nuls sauf celui de la dimension 0 qui est toujours égal à 1 dans les espaces connexes. « Ce n'est que parce que l'on introduit dans $\mathbf{R}^n$ un complexe Q qu'il en résulte pour l'espace $\mathbf{R}^n$ –Q une structure plus compliquée que celle de l'espace primitif. Le fait d'introduire dans l'espace (euclidien par exemple) un complexe en change la structure entière. Cela signifie à ce niveau que l'espace ne possède pas la structure fixe invariante d'un contenant non modifiable.
On enlève de $\mathbf{R}^n$ un complexe Q supposé percé de deux trous C et D et il en résulte pour - $\mathbf{R}^n$- Q l'existence de cycles C' et D' de dimension 1 enlacés avec C et D et non réductibles à un point par déformation continue. Les nombres de Betti de $\mathbf{R}^n$ - Q exprimant la structure de cet espace expriment du même coup la nature de l'action qu'exerce sur $\mathbf{R}^n$ le complexe Q. Lautman continue en disant que « le théorème d'Alexander permet de prévoir d'avance le résultat de cette action de Q sur $\mathbf{R}^n$ par la connaissance de la structure propre de Q. »[L] p.162

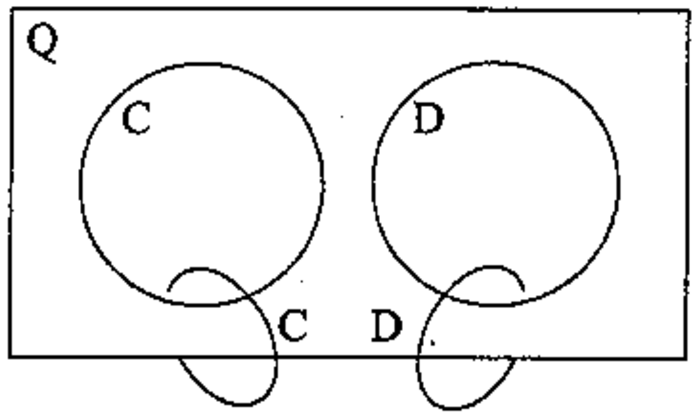


Fig. 5 d'après la figure 35 de la *Topologie* d'Alexandroff et Hopf

On enlève de l'espace R2 l'espace Q percé de deux trous C et D et il en résulte pour $\mathbf{R}^2$*-Q l'existence de cycles C' et D' de la dimension 1 enlacés avec C et D et non simplement connexes.*

Parmi les cycles certains se trouvent être en même temps frontières de chaînes à $k+1$ dimensions. Une circonférence est non seulement une chaîne de la dimension 1 mais un cycle puisqu'elle est fermée et même un cycle frontière puisqu'elle est la frontière d'un simplexe à 2 dimensions (le disque topologiquement équivalent au triangle inscrit).

Un cycle frontière est dit homologue à 0. Soient $u_1^k, u_2^k, u_3^k, ..., u_m^k$ m cycles à k dimensions
Ils sont dits indépendants s'il n'existe pas de combinaison linéaire $t_1u_1^k + t_2u_2^k + t_3u_3^k, + ..., + t_mu_m^k$ qui soit homologue à zéro sans que tous les coefficients t_i s'annulent. Comme le rappelle Lautman, si l'on peut trouver sur un complexe m cycles linéairement indépendants et que l'on ne puisse en trouver $m+1$, le nombre de Betti de la dimension k est m. L'analyse topologique de cette sorte repose sur l'invention d'un moyen conceptuel d'effectuer un calcul sur l'espace et les figures qui le peuplent. Ici en particulier la notion de combinaison linéaire et de façon générale l'introduction de la combinatoire topologique a marqué une nouveauté conceptuelle importante : elle permet d'explorer la structuration conceptuelle des découpages possibles de l'espace. Le nombre de cycles indépendants nous indique la nature de ce découpage dans ce calcul sur l'espace. Nous atteignons de la sorte les éléments atomiques irréductibles de la combinatoire.
Il s'agit de contraintes objectives sur notre manière de concevoir l'espace. La question de savoir si elles désignent des propriétés de l'espace en soi ou bien de notre conception de l'espace est une question dont je ne discuterai pas ici, elle implique de plus que nous ayons tranché celle de l'existence en soi de l'espace lui-même.
C'est précisément à travers cet usage de la combinatoire que nous pouvons prolonger l'analyse à la dualité.

On peut considérer les cycles de dimension *r* et les chaînes de dimension *n-r* comme appartenant à des complexes en dualité dans $\mathbf{R}^n$ et l'on voit ainsi comment s'opère le passage du cas « interne » au cas « externe »
Il est important de voir que l'introduction du complexe Q exerce une action comme dit Lautman, sur le complexe $\mathbf{R}^n$ en introduisant par cette action de Q grâce à la structure propre de Q qui permet de créer une structure propre dans $\mathbf{R}^n$ - Q à savoir les cycles C' et D' enlacés avec C et D. Le complémentaire de Q hérite d'une structure du fait de Q.
Nous pouvons alors comprendre cette citation de Alexandroff et Hopf. [A H] p. 449 cité in Lautman [L].

« Le théorème de dualité d'Alexander appartient sans aucun doute aux découvertes les plus importantes de la topologie dans ces dernières années. Tout ce que nous savons des propriétés de situation des polyèdres et des ensembles fermés dans les espaces à plusieurs dimensions se ramène à lui. Les propriétés de situation d'un ensemble F dans un espace R sont en premier lieu les propriétés de l'espace complémentaire R-F et le théorème de dualité nous apprend à déterminer ces propriétés dans le cas d'un polyèdre plongé dans l'espace euclidien, pour autant qu'elles se laissent exprimer par les nombres de Betti et les groupes de torsion »[A et H] p. 449 in [L]

L'exemple le plus simple donné par Lautman est celui du théorème de Jordan qui dit qu'une courbe fermée dans le plan divise le plan en deux régions séparées dont elle est la frontière commune. Le théorème caractérise l'action de la courbe sur l'espace. Avec la formule d'Alexander le théorème de Jordan est immédiat. Une courbe fermée C est un complexe à une dimension son nombre de Betti de la dimension 1 p^1 est égal à 1.
Dans le plan de dimension 2 on a : p^0 ($\mathbf{R}^2$ - C) (c'est le nombre de composantes isolées de l'espace dont on enlève les points situés sur la courbe C: p^0 ($\mathbf{R}^2$ -C)= p^1 (C) +1 = 2

« L'action de la courbe sur l'espace est déterminée à partir de la connaissance des invariants de structure de la courbe considérée intrinsèquement. »
D'où la citation de Pontriajagin.
« Dans son mémoire célèbre de 1895 sur l' *Analysis situs* paru dans le journal de l'Ecole polytechnique, Poincaré a démontré le théorème de dualité qui porte aujourd'hui son nom et qui établit l'identité du r^{me} et du $n\text{-}r^{me}$ nombre de Betti d'une variété orientable à n dimensions. A peu près à la même époque, Jordan énonçait pour la première fois le théorème relatif aux courbes fermées.
Personne ne se doutait que deux théorèmes aussi différents appartenaient au même cercle d'idées. »[Po] p.165sq.

Les propriétés internes découvertes par Poincaré expliquent donc les propriétés extrinsèques de situation qu'exprimait le théorème de Jordan. L'interprétation de Lautman est d'une pertinence philosophique certaine, mais elle ne laisse pas d'ouvrir sur d'autres analyses. Il est vrai que le théorème de Jordan peut se déduire du théorème de Poincaré et que dans son cadre, celui que la topologie algébrique a établi il peut être vu comme un phénomène de dualité et que ce phénomène à son tour peut se formuler en termes de passage d'une propriété de situation à une propriété de structure et donc de l'extrinsèque à l'intrinsèque en ce sens. Si nous étendons cette explication au cadre de la philosophie de Leibniz, et donc si nous la

voyons comme une propriété monadique et même monadologique quelle portée pouvons-nous accorder à cette montée dans le pays des monades ?
L'espace désigné par la topologie algébrique et le théorème de Poincaré et d'Alexander est celui qui conditionne le réel physique lorsqu'il est concerné par la mathématisation. Il est difficile d'admettre qu'il porte sur la réalité physique elle-même. Il est donc difficile de l'interpréter pleinement comme une réalité monadologique, vu que la monade est réelle et exacte comme le dit Leibniz.
Mais dira-t-on les contraintes sont désignées comme leibniziennes à juste titre, n'en sont pas moins objectives et portent pourtant sur l'espace physique et réel. Les propriétés de dualité que nous font découvrir les théorèmes de topologie algébrique constituent des éléments de l'espace physique. Même si les analyses et leur résultat ne se retrouvent que partiellement dans les théorèmes de la physique.

On peut également proposer une autre sorte d'analyse leibnizienne. Partir de la métaphysique leibnizienne et donc du système monadologique et considérer qu'il se ré exprime à sa manière dans le cadre de la topologie algébrique. Cette réexpression le pourvoit d'un degré de réalité, qui est suffisant pour valider l'interprétation en termes d'extrinsèque et intrinsèque en termes monadologiques. La monade= la structure du polyèdre exprime de son point de vue la structure de tout l'espace où elle n'est pas. Ce qui évidemment induit une espace conçu comme pur système de relations explicitées par les nombres de Betti.

Un certain complexe est introduit dans l'espace, ici par exemple $\mathbf{R}^n$ et sa structure qui lui est propre détermine celle de son complémentaire. On peut dire comme Lautman qu'il s'agit là d'une expression au sens de Leibniz de "tout " l'espace complémentaire par le complexe qui y a été introduit (ou dont il a été soustrait). Il faudrait insister sur le fait que cette expression se fait par l'intermédiaire du concept complexe, lui-même ensemble de simplexes. Et le théorème de dualité reflète en quelque sorte les conditions de cette construction.
Mais précisément, cette structure détermine celle d'objets géométriques autres que ce complexe.
Ce théorème de dualité signifie également que l'action d'un complexe n'est pas locale mais globale vu qu'elle exprime une propriété du complémentaire. Le complexe jouit donc sous cet angle de propriétés de la monade leibnizienne dans la mesure où il permet de réduire des propriétés de situation à des propriétés de structure interne ou intrinsèques. La monade leibnizienne est un point de vue, celui de sa situation, mais ce point de vue est déterminé par son être même.
Il est également certain que l'espace conceptualisé est réduit entièrement à une structure d'ordre (l'ordre des coexistants selon Leibniz) et qu' à première vue rien ne résiste de sa forme à l'investissement algébrique. Et donc à cette structure monadologique. En passant : vous avez la même chez Milne, cosmologue du XXe siècle.
De plus, nous pouvons alors considérer que l'autre caractéristique importante du système de Leibniz qui consiste à donner de l'espace une analyse réductible entièrement à des termes structuraux et donc conceptuels est valide.

10-Limitations de la réduction

Lautman après la présentation leibnizienne de ces théorèmes de dualité considère les limitations du processus qu'il a mis en évidence.
Considérons les restrictions qu'il met à son analyse.
Les théorèmes de dualité permettent de déterminer les propriétés de structure de l'espace complémentaire d'un polyèdre plongé dans l'espace euclidien par la connaissance de la

structure du polyèdre en question « pour autant que ces propriétés se laissent exprimer par des nombres de Betti et les groupes de torsion »
Cette restriction est essentielle, car dit Lautman, des faits sont venus montrer que la réduction des propriétés de situation aux propriétés de structure ne pourrait jamais être achevée. Et les faits en question viennent de la découverte de Louis Antoine que Lautman expose brièvement. Il s'agit de la première thèse de ce dernier [LA]

a) Les résultats de Louis Antoine
Je cite l'introduction de Louis Antoine.
« Du point de vue de l'*Analysis Situs* on ne considère pas comme distinctes deux figures F et f s'il est possible d'établir entre ces deux figures une correspondance ponctuelle qui soit univoque et continue dans les eux sens. On dit alors que ces deux figures sont homéomorphes. Mais l'identité de ces deux figures F et f apparaît comme plus parfaite lorsqu' il est possible d'étendre la correspondance entre ces figures à des points qui n'en font pas partie » Louis Antoine indique qu'un homéomorphisme doit être examiné du point de vue de son prolongement possible. On cherche par là précisément si une détermination d'abord local de l'espace liée à des figures géométriques nous donne prise au-delà de sa localisation sur l'espace tout entier ou moins sur des voisinages de la figure.

Je poursuis la citation

« Dans cet ordre d'idées en supposant que F est située dans un espace E et f dans un espace e nous chercherons à déterminer deux nouvelles figures F_1 et f_1 situées respectivement dans E et e et ayant les propriétés suivantes:

a- F_1 contient F, f_1 contient f, F_1 et f_1 sont homéomorphes et la correspondance entre F et f est un cas particulier de la correspondance entre entre F_1 et f_1

b- Tout point de F est centre d'une hypersphère de rayon non nul dont tout l'intérieur appartient à F_1 et tout point de f est centre d'une hypersphère dont tout l'intérieur appartient à f_1 »

Antoine précise que le problème n'a de sens que si les espaces E et e ont le même nombre de dimensions (sinon l'homéomorphisme est impossible en raison du théorème de l'invariance du nombre de dimensions) Une conséquence importante du théorème de l'invariance du domaine est que $\mathbf{R}^n$ ne peut être homéomorphe à $\mathbf{R}^m$ si $m \neq n$.
Il explique que trois cas sont alors possibles.

« 1° On peut prendre pour F_1 tout l'espace E et pour f_1 tout l'espace e. Nous dirons alors que la correspondance entre F et f s'étend à la totalité de leurs espaces

2° On peut déterminer F_1 et f_1 mais on ne peut pas prendre pour ces figures tout E et tout e. Nous dirons que la correspondance entre F et f s'étend à leurs voisinages mais pas à tout l'espace

3° Il est impossible de déterminer deux figures F_1et f_1 satisfaisant aux conditions 1° et 2° ci-dessus. Nous dirons que la correspondance entre F et f ne peut s'étendre à aucun voisinage, ou encore que ces figures sont homéomorphes seulement en elles-mêmes. »
Etant données deux figures homéomorphes situées dans des espaces ayant le même nombre de dimensions le problème posé par Antoine consiste à chercher dans lequel de ces trois cas se trouvent les deux figures. Antoine se restreint à l'espace à deux et trois dimensions et aux figures formées de courbe de Jordan sans point multiple.
On appelle courbe de Jordan dans l'espace à n dimensions l'ensemble des points dont les coordonnées x_1, x_2, ..., x_n s'expriment en fonction continue d'un paramètre qui prend toutes ses valeurs dans un certain intervalle(a, b), extrémités comprises, qu'ont peut toujours supposer être l'intervalle [0, 1]. Une courbe de Jordan est dite ouverte et sans point multiple ou encore est dite un arc de Jordan si quels que soient t' et t" distincts dans l'intervalle [0, 1] les deux points de la courbe correspondants sont distincts. La courbe est dite fermée et sans point multiple si les mêmes conditions sont réalisées sauf pour les points de paramètre 0 et 1 qui sont confondus »
Dans le chapitre I de son travail L. Antoine montre que deux courbes planes de Jordan (toutes deux ouvertes ou toutes deux fermées) sont dans le cas 1°. Leur correspondance peut s'étendre à tout le plan. L'auteur renvoie à plusieurs travaux qui ont fait cette démonstration; Carathéodory, R. Tietze. L'auteur utilise la méthode des chaînes définie par la Vallée Poussin. La démonstration est assez longue mais pas très difficile.
C'est le chapitre II qui est le plus important pour ce qui nous concerne. Il est consacré aux courbes de l'espace à trois dimensions. Comme il le dit « Ici, chacun des trois cas prévus peut effectivement se produire ». Si l'on considère des courbes ouvertes tracées sur plan, une sphère ou un tore on est toujours dans le cas 1°. Il en est de même si l'on considère des courbes fermées planes ou sphériques. Si l'on considère une courbe C tracée sur un tore et une courbe tracée sur un plan, une sphère ou un tore on se trouve au moins dans le cas 2°, mais on n'est pas toujours dans le premier cas.

Si nous prenons pour *c* une circonférence, et que nous cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que la correspondance entre *C* et *c* s'étende à tout l'espace nous devons faire intervenir les coefficients d'enlacement a et b de C avec l'axe et le lieu des centres des méridiens du tore qui porte C. L'auteur explique alors que la condition cherchée est que l'un au moins des nombres a et b soit égal à 0 ou à 1. Quand les nombres a et b sont différents de 1 ou 0, ils sont premiers entre eux.

De la considération des courbes tracées sur le tore, Louis Antoine déduit un arc de Jordan G (une courbe g est une application g : I $\rightarrow X$ où X est un espace topologique.

- La courbe g est dit être **simple,** ou un **arc de Jordan,** si elle est injective, i. e. si pour tout x, y dans I, nous avons $\gamma(x) = \gamma(y)$ implique x=y. Si I est un intervalle fermé borné [a,], nous permettons également la possibilité $\gamma(a) = \gamma(b)$.(Cette convention, il est possible de parler de courbes simples «fermés»).

dont la correspondance avec un segment de droite ne s'étend à aucun voisinage. Cette propriété est due à la forme de G au voisinage d'un point remarquable et Louis Antoine montre que tout arc de Jordan G ayant ce point comme point intérieur (au sens strict) ne peut être tracé sur une surface sans point multiple
Selon Lautman il s'agit là d'une limitation de la possibilité pour une partie ou pour une courbe plongée dans l'espace de refléter par sa structure le complémentaire de cette courbe. Les cas

que Louis Antoine détermine dans montrent qu'il n'est pas possible d'étendre dans $\mathbf{R}^3$ ces situations un homéomorphisme entre deux courbes au-delà de ces courbes elles-mêmes.
Les deux courbes F et f étant homéomorphes leurs invariants de structure déterminent d'après le théorème d'Alexander des invariants de structure identiques pour leurs espaces complémentaires
F_1 -F et f_1 -f. Mais l'identité de ces invariants n'est pas suffisante pour que F_1-F et f_1 -f soient homéomorphes. Ils ne sont pas déterminés de façon univoque par leur nombre de Betti, donc par les courbes qui peuvent y être insérées et leurs différences de structure sont irréductibles.
Lautman conclut alors que « alors que les deux espaces euclidiens à trois dimensions F_1et f_1 sont identiques et que c'est l'introduction des courbes homéomorphes F et f dans chacun d'eux qui les rend profondément dissemblables on se rend compte de tout ce que les invariants de structure de courbes laissent échapper de relations entre la courbe et l'espace »[LA p.

Cela voudrait dire que dans l'exploration des propriétés de l'espace on parviendrait à des situations où la position leibnizienne monadologique ne vaudrait plus et Kant et la thèse d'une irréductibilité de l'espace à une structure relationnelle entièrement constituée de situations elles-mêmes réductibles à des propriétés de structure prendrait alors le relai.

b) La sphère en cornes

Je vais présenter une limitation du même genre issue directement de considérations de topologie algébrique non élémentaires. Il s'agit de la Sphère cornue d'Alexander dont une exposé bref se trouve sur *Wikipedia*. Une courbe fermée simple et qui ne se recoupe pas, le découpe en deux régions (l'intérieur et l'extérieur) et qu'on peut déformer la courbe pour la transformer en un cercle. Ce résultat est celui que nous avons cité de Jordan et plus précisément concernant la possibilité de déformation est un théorème dû à Jordan et Schoenflies. La démonstration en est très délicate. On peut penser qu'un résultat analogue concernant les surfaces fermées de l'espace est vrai. Mais il existe un contre exemple fameux celui de la sphère cornue due à Alexander. La construction en a été obtenue en 1923.
La construction d'Alexander consiste à rajouter à la sphère usuelle des « cornes » se ramifiant et s'entrelaçant indéfiniment.
La sphère cornue est un plongement topologique de la sphère dans l'espace euclidien à 3 dimensions. La construction en est la suivante :
On part du tore,

i) On retire une tranche radiale du tore
ii) Connecter deux nouveaux tores percés d'un trou de chaque côté de la coupe
iii) Recommencer les opérations i) et ii) sur les tores rajoutés et ce indéfiniment
La taille des tores étant divisée par deux à chaque étape.

En ne considérant que les points ajoutés à l'étape 2 et qui ne sont jamais retirés lors des étapes 1 ultérieures, on obtient un plongement de la sphère à laquelle a été retiré un ensemble de Cantor. Ce plongement peut être prolongé à la sphère entière, car des suites de points s'approchant de deux points distincts de l'ensemble de Cantor, distants de *d*, restent toujours séparés d'une distance supérieure à *d/2*. La sphère cornue définit un intérieur (la composante bornée) et un extérieur (les composantes connexes de son complémentaire dans l'espace euclidien. La réunion de la sphère cornue et de son intérieur, la boule cornue d'Alexander est homéomorphe à la boule unité et est donc simplement connexe, tout lacet de cette boule peut être contracté en un point sans sortir de la boule. En revanche, l'extérieur n'est pas simplement connexe (contrairement à l'extérieur de la boule unité), car un lacet entourant un des tores de la construction précédente ne peut ne peut être contracté sans toucher la sphère cornue. La sphère cornue ne peut être déformée continument en la sphère ordinaire : on dit qu'elle constitue un nœud de celle-ci et que ce nœud est sauvage. Un homéomorphisme entre la boule en cornes et la boule unité de $\mathbf{R}^3$ne se prolonge pas en un homéomorphisme de $\mathbf{R}^3$

vers $\mathbf{R}^3$. Voilà donc une spécificité de la dimension 3 qui fait que la vision leibnizienne de cet espace en 3 dimensions devient difficile à maintenir.

Les propriétés de situation réductibles aux propriétés de structure dans le cas de la dimension deux ne le sont plus dans le cas de la dimension trois.

12-Conclusion.

Plusieurs thèmes d'analyse demandent un travail supplémentaire. Il semble philosophiquement intéressant de poser la question de savoir si les concepts d'espace que nous utilisons présente un caractère monadologique, c'est-à-dire relationnel d'une part et d'autre part font des relations des propriétés internes aux objets géométriques introduits dans l'espace. Cela reste vrai dans l'espace en dimension 2 mais des propriétés propres à la dimension 3 empêchent de prolonger cette analyse comme nous venons de le voir.

Lorsque l'analyse leibnizienne est valide un mouvement d'analyse qui réduit l'externe ou la situation ou de l'interne ou des propriétés de structure ou intrinsèque est un mouvement important qui donne une structure conceptuelle à l'analyse de l'espace.

Le mouvement qui passe de l'extérieur (situation) à l'intérieur (structural) est corrélatif de la production de dualité qui rende possible ce passage. Nous avons là un mouvement mathématique dans lequel la dualité fournit une sorte d'unité substitutive qui synthétise une forme de contrôle de l'espace extérieur à l'objet géométrique que l'on y introduit et la pure structure interne de cet objet.

La dualité n'est pas le seul moyen d'installer un espace monadologique. Elle n'en a été qu'un exemple. Si l'on devait passer à une analyse de différents types d'introduction d'objet dans l'espace il faudrait étendre la notion de dualité. C'est un autre type de théorie topologique qui pourrait engager ce problème.

Enfin le fait que la catégorie philosophique d'intrinsèque vaille autant en topologie algébrique qu'en géométrie différentielle et sans doute dans d'autre domaines des mathématiques nous indique qu'il s'agit là d'un mouvement conceptuelle sans doute animant de l'intérieur la production mathématique. C'est dans une autre analyse que cette question devra être traitée.

Enfin Lautman a posé le problème dans un cadre qui oppose comme c'est la tradition, la théorie kantienne de l'espace à celle de Leibniz qui la précède. Kant a réussi à spécifier le concept d'espace en le rendant irréductible à des propriétés conceptuelles que Leibniz lui avait mises en avant. La forme de l'espace selon Kant en fait précède toutes les analyses conceptuelles que nous pouvons ensuite ne produire. La dualité que nous exhibons présuppose la forme d'extériorité et c'est en elle en quelque sorte que l'extériorité est réduite à l'intrinsèque d'une propriété structurale. Ce n'est pas au même niveau que la position kantienne voudrait s'opposer à celle de Leibniz.

Si comme le dit Lautman les faits géométriques découverts en dimension 3 donnent raison à Kant rendant la distinction entre une analytique et une esthétique ineffaçable, la question est cependant plus fondamentale. Il s'agit de savoir si à ce niveau les propriétés que développent la topologie algébrique ou la topologie différentielle bien qu'elles soient des structures conceptuelles construites peuvent rendre compte des spécificités de l'intuition kantienne.

Bibliographie

[A H] Paul .Alexandroff et Heinz Hopf *Topologie* Berlin Springer 1935

[Ca] Elie Cartan, « Les récentes généralisation de la notion d'espace » Bi ull. Des Sc. Math t, 48 année 1934 p. 297

[K1 et 2] Emmanuel Kant *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raum* 1768 et *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis* 1770 [K II, p. 396]

[K3] Emmanuel Kant, *Œuvres philosophiques* Trad. Pierre Jalabert La Pléiade 11, p. 531-532 Gallimard 1985
[L] Albert Lautman, *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, chap. 2 « Propriétés intrinsèques et propriétés induites » Vrin 2006
[LA]Louis Antoine « Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinage » *Journ. Math. pures et appliquées* (1921)
[Le1]Gottfried Wilhelm Leibniz *Lettre à Arnauld* septembre 1697. [Gerhard, II p. 112] cité in [L]
[Le2]Gottfried Wilhelm Leibniz *Système nouveau de la Nature et de la communication des substances aussi bien que de l'union qu'il y a entre l'âme et le corps* 1695.[Gerhard, IV p. 484] in [L]
[Po] Lev Pondrjagin « Über den algebraischen Inhalt topologischenDualitätssätze » *Math. Ann*. t. 105 (1931)
[R] Bertrand Russell, *Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz* 2d edition 1937 Allen and Unwin London 1958
[S T] Seifert et Thresfall, *Lehrbuch der Topologie* Leipzig Teubner 1934
[W] *Hermann Weyl's Raum Zeit Materie and a general Introduction to His Scientific Work* Ehrard Scholz Editor DMV Birkhäuser 2001