Chapitre ?

QUAND LEIBNIZ JOUE AUX DÉS

Renaud Chorlay
IREM de Paris

L'apparence se peut estimer (Leibniz, 1678)

Je présente ici une séance d'introduction aux probabilités, en classe de première, utilisant un texte historique et une simulation informatique. D'un niveau technique assez élémentaire, la séance a pour premier objectif de faire rencontrer les notions de probabilité, d'espérance, de jeu équitable et d'équiprobabilité. Le texte de Leibniz a, en outre, l'intérêt de contenir une erreur de raisonnement classique, utile à signaler aux élèves.

Le dispositif permet aussi d'aborder dans un contexte assez naturel deux aspects plus problématiques : d'une part l'idée de la multiplicité des modèles d'une même expérience aléatoire ; d'autre part la question du lien entre statistiques et probabilités, avec un énoncé informel de la loi des grands nombres. Ce type de séance non routinière semble un bon cadre pour aborder, si l'enseignant le souhaite, les questions épistémologiques réelles qui disparaissent bien vite dans les allers-retours réglés entre cours et exercices … disparition provisoire pour ceux des lycéens qui étudieront les mathématiques dans le supérieur.

ORIGINE ET CONSTRUCTION DE CETTE SÉANCE

On dispose de quelques textes bien classiques pour travailler sur des aspects élémentaires de calcul des probabilités : les textes sur le « problème des partis » (« parti », sans « e », signifie ici « partage ») permettent d'aborder la notion de probabilité et les descriptions combinatoires d'expériences de lancers successifs sous formes de *n*-uplets ou d'arbres (M : ATH 1990); on connaît le texte de Galilée sur le problème du grand duc de Toscane : Galilée explique avec toute la clarté nécessaire pourquoi, lorsqu'on lance trois dés honnêtes, certaines sommes apparaissent plus souvent que d'autres. Ces textes présentent le double intérêt d'être exploitables en classe et d'être des documents importants dans l'histoire de la théorie des probabilités. Ce n'est pas le cas du texte de Leibniz que j'utilise ici : quoique Leibniz ait toute sa vie écrit de petits textes sur les jeux de hasard et entretenu des correspondances sur ces questions, il n'est pas d'habitude retenu aux côtés de Pascal, Fermat, Huygens et Jacques Bernoulli parmi les grands fondateurs du calcul des probabilités. En classe de première, l'occasion de glisser le nom de Leibniz est plus souvent – et plus légitimement – fournie par les chapitres consacrés à la dérivation ou, en terminale, à l'intégration.

Le texte présenté ici est extrait d'un manuscrit inédit daté de 1678, intitulé *Du jeu de Quinquenove* et édité en 1992 par l'historienne Maria-Sol de Mora-Charles. Je tombai dessus par hasard (comme il se doit !) en 2002, en feuilletant la revue *Historia Mathematica* ; le texte est devenu plus aisément accessible depuis la parution de (Leibniz, 1995). Pour n'être pas l'un des monuments de l'histoire du calcul des probabilités, ce texte de Leibniz m'a d'emblée frappé par le travail qu'il me semblait permettre sur les liens entre statistiques et probabilités. Ces aspects sont moins clairement présents dans les textes classiques.

Partant de cette intuition, j'ai conçu une séance qui a sensiblement évolué au fil du temps. Je présenterai plus loin une variante ainsi que des maladresses que j'ai pu commettre. Voici pour l'instant deux éléments qui sont restés à peu près stables dans l'organisation du travail. Premièrement, j'ai dû choisir quel passage extraire du texte publié par Madame Mora-Charles. Le mini-traité que Leibniz rédige en 1678, en français, sur le jeu de *Quinquenove*, fait plus de vingt pages ; c'est clairement la première partie qui m'intéressait. Le jeu de *quinquenove* ou de *cinq-neuf* est un jeu de dé à la règle assez compliquée : deux joueurs jouent l'un contre l'autre, avec deux dés ; le premier joueur lance les dés et gagne du premier coup s'il fait un « doublet » (deux fois le même résultat), ou s'il obtient une somme de 3 ou de 11 ; il perd s'il fait 5 ou 9, que ce soit au premier coup ou plus tard ; si le premier lancer n'a pas été décisif (ni doublet, ni 3,5,9,11), le même joueur relance jusqu'à ce que, soit il fasse un 5 ou un 9 (auquel cas il perd), soit il refasse le nombre de points qu'il avait obtenu au premier lancer (auquel cas il gagne) ; en cas de résultat indifférent, il rejoue. Leibniz cherche à savoir si la règle est favorable au joueur qui lance ou à son compère. Ce type de jeu de hasard peut être intéressant à étudier en classe de Terminale mais semble tout à fait inapproprié pour une séance d'introduction. L'intérêt réside dans la question posée par Leibniz (déterminer si la règle d'un jeu de hasard est favorable à l'un ou à l'autre) et à sa démarche la première partie du traité. En effet, Leibniz reconnaît d'emblée que le jeu de *quinquenove* présente déjà un cas bien compliqué (c'est bien en cela que réside le défi intellectuel que Leibniz souhaite relever) . Pour se faire mieux comprendre de son lecteur, ol commence par étudier un autre jeu de hasard, beaucoup plus simple, dans le but d'expliciter le mode général de raisonnement adapté à ce type de question. C'est cette *démarche heuristique* classique et l'exemple élémentaire qui m'intéressaient pour des élèves de Première ; je sélectionnai donc la première page du texte, en masquant tout ce qui a trait au jeu de *cinq-neuf* lui-même.

Il restait à concevoir le mode d'utilisation du document. Au fil des ans, j'ai de moins en moins tendance à utiliser les documents historiques pour des séances d'introduction d'une notion nouvelle. Je préfère les utiliser en fin de chapitre ou plus tard dans l'année, de manière décontextualisée. Cela présente souvent deux avantages. Le premier est d'éviter la double difficulté que constitue l'étude d'une notion nouvelle sous une forme qui présente un coût d'accès certain : texte rédigé dans une langue inhabituelle et utilisant un formalisme peu familier, texte rédigé le plus souvent pour des mathématiciens et non pour des élèves. L'autre intérêt de l'utilisation d'*après-coup* est qu'elle permet de revenir d'une manière non routinière sur une notion que le travail en classe a cherché – c'est son objectif – à rendre routinière. Ce travail permet de faire revivre la notion riche derrière la notion bien connue, de prendre du recul sur ce que l'on sait – ou croît savoir –, d'apprendre à reconnaître ce que l'on est censé connaître. En reprenant les termes de didactique, ce travail d'après-coup cherche à faire passer la notion du côté des connaissances disponibles (plutôt que seulement mobilisables) et permet de mener un travail de second niveau (niveau *méta*) : discuter de l'identité de deux notions présentées différemment, discuter du degré de rigueur, discuter du contexte d'emploi pertinent etc. Ce n'est toutefois pas le choix que j'ai fait pour ce texte de Leibniz. La simplicité du contenu technique, la richesse du contenu conceptuel et le lien possible entre probabilités et statistiques m'ont conduit à choisir de l'utiliser pour une séance d'explication de texte en classe (2 heures), entre le chapitre consacré aux statistiques descriptives et celui consacré à l'introduction au calcul des probabilités. La séance s'appuie sur les outils issus du chapitre de statistique : notion de fréquence (conçue comme un nombre réel compris entre 0 et 1, éventuellement exprimé en pourcentage), tableau de fréquences (la somme des fréquences valant, alors, 1) et calcul de la moyenne à partir du tableau de fréquences (plutôt que du tableau d'effectifs) ; ces notions constituent le seul pré-requis.

DESCRIPTION DE LA SÉANCE

TRAVAIL PRÉPARATOIRE

Les élèves ont à lire à la maison le texte de Leibniz : ils sont prévenus qu'une séance de deux heures sera consacrée à son commentaire, qu'il est donc bien naturel qu'ils ne comprennent pas tout à la première lecture. Je leur demande aussi de chercher dans un dictionnaire la définition des termes suivants, termes dont j'ai besoin lors de la séance en classe : heuristique, *a priori*, *a posteriori*, empirique, aléatoire, hasard. Pour les deux derniers termes, je demande aussi de chercher l'étymologie ; les élèves découvrent alors qu'ils viennent tous deux du mot « dé », en latin ou en arabe, respectivement. J'ai renoncé à demander la recherche d'éléments biographiques sur Leibniz, pour des raisons que j'explique plus loin. Voici l'extrait que je donne (orthographe originale conservée) :

> *Mais à fin de rendre cette matière plus intelligible, je dis premièrement que l'apparence se peut estimer, et même qu'elle peut se vendre ou acheter.*
>
> (…) *Prenons un example. Deux personnes jouent aux dés : l'un gagnera s'il a encore huit points, l'autre s'il en a cinq. Il s'agit de savoir pour le quel des deux il faudroit plutost parier. Je dis qu'il faut plutost parier pour celui qui a besoin de huit points, et même que son avantage comparé avec l'espérance que l'autre doit avoir, est comme de trois à deux. C'est à dire que je pourrois parier trois écus contre deux pour celui qui demande huit points contre l'autre, sans me faire tort. Et si je parie un contre un, j'ay un grand avantage. Il est vray que non obstant l'apparence je puis perdre ; d'autant que l'apparence de perdre est comme deux et celle de gagner comme trois. Mais dans la suite du temps observant ces règles de l'apparence, et jouant ou pariant souvent, il est constant qu'il se trouvera à la fin, que j'auray gagné plutost que perdu.*
>
> *Mais pour faire voir qu'il y a plus d'apparence pour celui qui a besoin de huit points, en voicy la démonstration. Je suppose qu'on joue à deux dés, et que ces deux dés sont bien faits, sans qu'il y a de la tricherie, cela étant il est visible qu'il n'y a que deux manières de rencontrer cinq points, l'une est 1 et 4. l'autre 2 et 3. au lieu qu'il y a trois manières pour avoir huit points, sçavoir 2 et 6, item 3 et 5, et enfin 4 et 4. Or chacune de ces manières a en elle-même autant d'apparence que l'autre car par exemple il n'y a point de raison pour laquelle on puisse dire qu'il y a plus d'apparence de rencontrer 1 et 4 que 3 et 5. Par conséquent il y a autant d'apparences (égales entre elles), qu'il y a de manières. Donc cinq points se pouvant faire seulement de deux manières, mais huit points se pouvant faire de trois façons, il est manifeste qu'il y a deux apparences pour cinq et trois apparences toutes semblables pour huit.*
>
> (…) *Cela étant posé, il est visible qu'il faudra suivre l'estime que je viens de faire. C'est à dire que cette maxime fondamentale aura lieu :*
>
> *L'apparence ou probabilité de l'effect A, garde la même proportion à l'apparence ou probabilité de l'effect B, que le nombre de toutes les manières*

capables de produire l'effect A garde au nombre de toutes les manières de produire l'effect B, supposant toutes ces manières également faisables.

G.W. Leibniz, *Du jeu de Quinquenove* (1678), extraits.

L'EXPLICATION DE TEXTE EN CLASSE

La séance commence par la correction de la recherche de vocabulaire et d'étymologie. Je donne ensuite quelques éléments biographiques sur Leibniz, en soulignant son rôle dans la mise au point des règles du calcul différentiel et intégral. Les élèves de Première connaissent souvent Leibniz parce qu'ils étudient *Candide* de Voltaire en cours de lettres. Ils sont en général assez surpris d'apprendre que le même était, outre le philosophe fumeux caricaturé par Voltaire, un mathématicien important. Je présente la règle du jeu de *cinq-neuf* et explique que Leibniz utilise ici une *démarche heuristique* classique : remplacer un problème complexe par un problème plus simple mais du même type pour essayer de dégager une règle générale de traitement . Je fais identifier aux élèves les indices de cette démarche dans le texte : « prenons un exemple » et, enfin, énoncé de la « maxime fondamentale ». Enfin, j'explique l'*incipit* : Leibniz nomme « apparence » ce que nous nommerons « probabilité », il annonce que ces probabilités, bien que relatives aux événements futurs et incertains, peuvent être déterminées numériquement avec exactitude. Ces valeurs numériques peuvent, par exemple, donner lieu à des échanges marchands. Ainsi, l'expression d'« estime des apparences » employée par Leibniz est l'analogue de l'expression actuelle « calcul des probabilités ».

La situation est en réalité plus complexe : le vocabulaire n'est pas fixé à la fin du XVII^e siècle. On voit Leibniz utiliser indifféremment « apparence », « probabilité » ou même « espérance » et « avantage ». De plus, l'« apparence » n'est pas nécessairement un nombre compris entre 0 et 1. Leibniz décrit la loi de probabilité sur un univers à deux issues soit en donnant le rapport des deux probabilités, soit en donnant l'analogue d'une répartition d'effectifs (en comptant les « manières de faire ») plutôt que de fréquences.

Après cette introduction, le travail en classe consiste en une explication de texte sous forme de questions-réponses. Ce type de séance est inhabituel et on ne peut pas, me semble-t-il, demander aux élèves de prendre des notes ou de savoir distinguer seuls ce qui est important de ce qui l'est moins. L'explication est donc très guidée, et j'impose un plan. J'ai distingué quatre parties dans le texte : du début jusqu'à « j'ay un grand avantage » ; jusqu'à « plutost que perdu », jusqu'à « pour huit », puis la « maxime fondamentale ». L'explication ne se fait pas dans l'ordre du texte et se décompose en quatre temps :

1^er TEMPS : ce que Leibniz prévoit.

On reformule l'expérience aléatoire : on lance simultanément deux dés non truqués (Leibniz est très explicite sur ce point). Deux joueurs, disons A et B, parient sur le résultat : A parie sur une somme de 8, B parie sur une somme de 5. Implicitement, on rejoue jusqu'à ce que l'un des joueurs gagne. Reformulons ce que Leibniz écrit dans la première partie du texte sous forme de tableau :

	A gagne	B gagne
« apparence » ou probabilité	p_A	p_B

Leibniz affirme que l'« avantage » de A est à celui de B comme 3 est à 2, autrement dit, que $p_A/p_B = 3/2$. Pour déterminer ces deux nombres, on peut utiliser la relation $p_A + p_B = 1$ (ou 100% si l'on travaille en pourcentage). On trouve :

	A gagne	B gagne
« apparence » ou probabilité	$p_A = \frac{3}{5} = 0{,}6$ soit 60%	$p_B = \frac{2}{5} = 0{,}4$ soit 40%

Pour rendre les choses plus concrètes, Leibniz imagine différents paris. Il affirme tout d'abord que je peux parier deux écus sur A contre 3 sur B sans pour autant me faire tort ; vérifions par le calcul :

	Je gagne +2	Je perds 3, (je « gagne » −3)
« apparence » ou probabilité	0,6	0,4

En moyenne je gagne $2 \times 0{,}6 + (-3) \times 0{,}4 = 0$, je ne perds ni ne gagne d'argent ; on dit que le jeu est équitable (car qui parierait contre moi n'est ni avantagé ni désavantagé par rapport à moi). Leibniz considère ensuite le pari de 1 contre 1 :

	Je gagne +1	Je « gagne » −1
« apparence » ou probabilité	0,6	0,4

Mon gain moyen est $1 \times 0{,}6 + (-1) \times 0{,}4 = 0{,}2$, le jeu m'est structurellement favorable, et défavorable à qui accepte de parier contre moi selon cette règle.

Dans cette partie on voit que je joue sur l'ambiguïté des concepts, entre statistiques et probabilités. Je m'appuie essentiellement sur le dispositif graphique qu'est le tableau de fréquences et les règles d'utilisation associées. Les élèves sont assez contents de voir que leurs connaissances en statistiques leurs permettent de comprendre un texte qui semblait, de prime abord, assez obscur. Je demande ensuite si Leibniz nous a pour l'instant dit d'où sortait le rapport 3/2 sur lequel repose tout son raisonnement. La classe convient que non, et l'on repère que la justification est donnée dans le paragraphe suivant.

2ème TEMPS: la justification donnée par Leibniz

La lecture du paragraphe qui commence par « Mais pour faire voir » ne pose pas de problème et les élèves semblent convaincus par l'argument de comptage : 2 manières pour le 5 contre 3 manières pour le 8, ce qui explique les valeurs utilisées par Leibniz dans le début du texte. Quelques élèves, peut-être adeptes des jeux de sociétés, expriment un doute sur le cas du 8 réalisé avec deux quatre, sans pouvoir toutefois argumenter. Pour comparaison future, je fais reformuler sous forme de tableaux l'argument des « cinq cas également faisables » : la probabilité de chacun est donc, d'après Leibniz, de 1/5 = 0,2 :

Cas	2 + 6 = 8	3 + 5 = 8	4 + 4 = 8	1 + 4 = 5	2 + 3 = 6
Probabilité	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

En additionnant les probabilités des différentes issues composant les événements « somme de 8 » et « somme de 5 », on retrouve bien les fréquences 0,6 et 0,4. Tout semble aller pour le mieux dans le meilleur des mondes possibles … Pangloss avait raison !

Je demande ensuite si les valeurs obtenues par Leibniz sont des valeurs *a priori* ou *a posteriori*, si elles résultent d'une démarche *théorique* ou d'une démarche *empirique*. On s'accorde aisément sur le fait que Leibniz obtient ces valeurs par pur raisonnement. C'est l'occasion de montrer que, bien que les tableaux et les calculs ressemblent à ceux que l'on faisait dans le chapitre de statistiques, ils n'ont pas le même sens : les notions de population ou de caractère, la collecte d'information et la construction d'indicateurs permettant de résumer certaines caractéristiques (de position ou de dispersion) d'un caractère quantitatif ne sont pas ici présent ; la démarche de statistique descriptive s'appuie sur les données observées ou relevées, des données empiriques qu'on décrit *après-coup*. Les « apparences ou probabilités » seraient des sortes de fréquences *a priori*, de fréquences théoriques.

Le moment est venu d'instiller le doute sur la portée de ce type de prévision sur un événement aléatoire. En général ces doutes ont été formulés par les élèves en cours d'explication : ces calculs sur des résultats de lancers de dé c'est bien gentil, mais c'est quand même bizarre ! On peut alors se demander s'il n'y aurait pas un moyen d'obtenir ces valeurs par une autre démarche que celle du pur raisonnement, si des observations statistiques ne permettraient pas d'établir la même chose. Il y a consensus sur le fait que, faute de raisonnement, on aurait pu chercher à observer beaucoup de parties : la démarche aurait alors plus ressemblé à celle des statistiques descriptives. Plusieurs perplexités se font toutefois jour. Premièrement, des élèves affirment haut et fort leur soutien à Leibniz : lui propose une démonstration, c'est une forme de savoir supérieure par nature à l'observation et elle seule est porteuse de certitude absolue et d'exactitude numérique ; se lancer dans des observations alors qu'on a déjà la démonstration c'est lâcher la proie pour l'ombre ; de toute façon, les observations ne pourront pas donner les valeurs exactes 0,6 et 0,4. Deuxième perplexité : on sent bien que les valeurs théoriques issues du raisonnement ne vont pas décrire exactement ce qui va se passer si on joue réellement, même plusieurs fois.

3ème TEMPS : lien avec les statistiques et invalidité empirique des valeurs données par Leibniz

Je fais remarquer que Leibniz n'a jamais dit qu'il prédisait ce qui se passerait pour le *prochain* lancer, il le dit lui-même : « nonobstant l'apparence, je puis perdre » ; autrement dit, si je parie sur le 8, j'ai 2 chances sur 5 de perdre et 3 de gagner. La phrase « Mais dans la suite du temps… » appelle un long commentaire. Pour rendre les choses plus claires, je propose de réfléchir sur une expérience encore plus simple : je propose le lancer d'un dé non truqué. Le raisonnement théorique *à la* Leibniz conduit à attribuer une probabilité de 1/6 à chaque face. Cela signifie-t-il que pour *un* lancer, chaque face apparaît 1/6 de fois ? Non (cela ne veut rien dire). Cela signifie-t-il que si je lance 6 fois le dé, je verrai chaque face une fois exactement ? Non plus (c'est possible, mais pas certain). Et si je lance 60 fois le dé, ou 600 fois ? On convient que si l'on répète un grand nombre de fois le lancer, on observera chaque face environ une fois sur 6, d'où une fréquence observée approximativement égale à 1/6. Y a-t-il un moyen d'augmenter la précision des valeurs observées ? On convient que la seule solution est d'augmenter le nombre de lancers. Le texte de Leibniz donne ici le moyen de dépasser cet énoncé naïf en terme de « beaucoup » (de lancers) et de « approximativement » (les valeurs théoriques) : Leibniz évoque ce qu'on observe à la fin des temps ! Non seulement la seule manière de diminuer l'écart entre les fréquences théoriques (probabilités) et les fréquences observées sur une grande population de répétitions de la même expérience aléatoire est d'augmenter le nombre de répétitions. On conjecture en outre que les valeurs théoriques et empiriques devraient coïncider exactement si l'on pouvait répéter l'expérience indéfiniment jusqu'à la fin des temps et, ensuite (après la fin des temps !), calculer la fréquence observée. On reformule en termes de suite de fréquences observées (indicée par le nombre de répétitions) et de valeur limite : cette formulation semble assez satisfaisante pour sa capacité à reprendre l'idée intuitive formulée par Leibniz tout en évitant les aspects paradoxaux et métaphysiques de sa formulation. Conformément aux demandes du programme (de Première S), on note un énoncé informel (et signalé comme tel) de la loi des grands nombres. On peut mentionner en passant que Leibniz ne démontre pas le moins du monde de résultat mathématique sur les limites de suites aléatoires de fréquences empiriques. Jacques Bernoulli le fera, en 1713, dans son *Ars Conjectandi* (l'art de conjecturer), dans le cas binomial.

Leibniz nous donne donc un moyen de contrôler empiriquement les fréquences théoriques, dans le cas moyennement compliqué du jeu « somme de 5 contre somme de 8 ». On convient que, si l'on voulait contrôler en lançant réellement des dés, cela prendrait longtemps, d'autant plus qu'on tomberait souvent sur des sommes qui ne sont ni 5 ni 8. Je propose une simulation informatique. On trouvera en annexe le petit programme écrit sous SCILAB : la fonction *Leibniztable* (n,m) donne un tableau dont chacune des n lignes présente les fréquences (en %) pour m répétitions du jeu « 5 contre 8 ». Je commence par simuler 100 parties en lançant *Leibniztable* (1,100). On obtient (par exemple)

$$(45 \qquad 55)$$

soit une somme de 8 dans 55% des cas. Leibniz prévoyait (40,60), il n'était pas trop loin. On retente plusieurs simulations, chacune sur 100 répétitions de l'expérience. On observe toujours des valeurs de l'ordre de 40-50 et 50-60. Je fais remarquer aux élèves que le phénomène que nous observons porte un nom et qu'ils l'ont rencontré en Seconde : peine perdue, je n'ai jamais réussi à obtenir le terme de « fluctuation d'échantillonnage » pour décrire l'inévitable variabilité des fréquences observées sur des populations de même tailles. Assez vite on convient que des échantillons de taille 100, ce n'est pas assez. On passe à des échantillons de taille 100000, par exemple avec *Leibniztable*(10,100000). On observe deux choses intéressantes. Premièrement, d'un échantillon à l'autre les fréquences observées varient très peu. C'est une autre facette du phénomène rencontré à l'occasion de l'énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres ; on peut, si on le souhaite, évoquer la notion d'indicateur de dispersion. Deuxième observation : les valeurs observées sur plusieurs échantillons de grande taille se stabilisent avec obstination autour de (44.5 55.5) et pas du tout autour de (40 60). Perplexité.

4$^{\text{ème}}$ TEMPS : changement de modèle et bilan

Je propose que l'on remplace l'expérience aléatoire en supposant que l'on lance les deux dés successivement et non plus simultanément :

Somme de 8	Somme de 5
2 puis 6	1 puis 4
3 puis 5	2 puis 3
4 puis 4	3 puis 2
5 puis 3	4 puis 1
6 puis 2	

On convient que ces 9 manières sont, comme le dit Leibniz, « également faisables » et l'on trouve alors, par pur raisonnement, les fréquences théoriques suivantes :

	Somme de 8	Somme de 5
« apparence » ou probabilité	$p_A = \dfrac{5}{9}$ soit environ 55,5%	$p_B = \dfrac{4}{9}$ soit environ 44,5%

Ces valeurs coïncident autant que faire se peut avec les valeurs empiriques. Leibniz a donc eu raison quant aux principes (compter le nombre de « manières également faisables » et utiliser la « maxime fondamentale ») mais a mal compté les « manières ». C'est l'occasion, si on le souhaite, de montrer que la description de l'expérience aléatoire au moyen d'issues toutes *équiprobables* n'était pas la seule conduisant aux bonnes valeurs. On aurait pu refuser de distinguer artificiellement les deux dés, mais on aurait alors dû renoncer à l'équiprobabilité des issues ; le cas où les dés sont distingués permet de calculer les valeurs suivantes pour l'autre modèle :

Cas	2+6 = 8	3+5 = 8	4+4 = 8	1+4 = 5	2+3 = 5
Probabilité	2/9	2/9	1/9	2/9	2/9

L'idée que l'on calcule la probabilité d'un événement en additionnant la probabilité des issues qui le réalisent semble tenir la route : elle est une propriété générale des probabilités qui n'est en rien restreinte aux cas d'équiprobabilité des issues. On voit aussi qu'une même expérience aléatoire peut être décrite de deux manières. Imaginer que les deux dés sont distinguables – qu'ils soient lancés successivement ou qu'on les suppose de couleurs différentes – peut sembler artificiel mais conduit à des calculs plus simples : c'est mathématiquement licite et scolairement recommandé. Il y a une réelle marge de choix entre l'expérience aléatoire et le modèle mathématique de l'expérience aléatoire.

VARIANTES ET RÉACTIONS

UNE VARIANTE RICHE

Avant de présenter trois variantes auxquelles j'ai renoncé, en voici une que je continue à utiliser. Après le 3$^{\text{ème}}$ temps, il peut sembler peu naturel que ce soit l'enseignant qui propose de lancer les dés l'un après l'autre ou de les peindre de couleurs différentes. Il m'est arrivé d'arrêter la séance d'explication de texte à la fin du 3$^{\text{ème}}$ temps, lorsqu'on s'accorde sur le fait que les valeurs théoriques que Leibniz obtient par pur raisonnement sont incompatibles avec les valeurs empiriques obtenues de manière stable sur de larges échantillons de répétitions indépendantes. Je donne alors à lire, en devoir à la maison pour la séance suivante, le texte de Galilée sur le problème du grand duc de Toscane (M:ATH 1990) : Galilée y explique en toute clarté où réside l'erreur de raisonnement classique dans ce type de problèmes – celle que Leibniz commet – et pourquoi les sommes obtenues avec des dés identiques se présentent moins souvent que les sommes obtenues avec des dés différents. Galilée expliquant la situation pour trois dés, on peut aisément demander aux élèves, comme travail accompagnant la lecture de ce texte très clair, d'adapter le raisonnement de Galilée au jeu du « 5 contre 8 avec deux dés » de Leibniz pour voir s'ils trouvent des valeurs théoriques plus proches des valeurs empiriques. Cette organisation autour de deux textes prend un peu plus de temps mais est extrêmement satisfaisante, à la fois du point de vue de la culture générale et du point de vue pédagogique : le travail d'adaptation du raisonnement de Galilée est bien mené par les élèves et ses enjeux sont bien saisis. Le fait de trouver par raisonnement les « bonnes » valeurs (c'est-à-dire compatibles avec les fréquences empiriques) procure une grande satisfaction.

REPENTIRS

J'ai par contre renoncé à donner de plus larges extraits du texte de Leibniz, quelqu'intérêt que je puisse trouver à d'autres passages. La première fois que j'ai construit un travail autour de ce texte, j'avais coupé un peu plus large. J'avais en particulier laissé une première partie dans laquelle Leibniz présente les règles du jeu de *cinq-neuf* ; je voulais que les élèves repèrent eux-mêmes la démarche heuristique consistant à remplacer un problème complexe par un problème simple du même type. Les réponses des élèves – à ce qui était alors un devoir-maison – m'ont montré qu'ils voyaient mal qu'on parlait de deux jeux … j'ai coupé.

Dans l'extrait que je donne, j'ai coupé entre « comme deux est à trois » et le passage sur la « maxime fondamentale » tout un paragraphe très intéressant pour la culture générale :

> *Cette décision pourroit même avoir lieu en justice. Car posons le cas que celuy qui a du désavantage renverse le jeu par quelque imprudence. Je ne croy pas qu'il soit juste de le faire perdre tout en ce cas là : cela auroit peut estre lieu, s'il l'avoit fait par malice ou emportement : et je croy qu'il suffira que l'argent qui est au jeu, soit partagé suivant l'avantage que chacun avoit, c'est à dire il sera en ce cas présent partagé en cinq parties égales, et l'un en aura trois, l'autre n'en aura que deux. Tout cela se doit entendre en cas que la coustume ou convention n'est pas contraire, car souvent elle condemne celuy qui a fait une telle faute (de renverser le jeu, sans qu'on le puisse achever), à perdre tout ; à fin qu'on ne soit pas obligé de se mettre en peine des scrupulosités d'une estime si subtile ; ce qui ne seroit pas commode dans les companies. Mais une autre chose est ce qui est commode, ou conforme à la practique et à la convention, et ce qui est de l'exactitude du droit même, faisant abstraction de ce dont on est convenu.*

Plusieurs fils s'entremêlent dans ce beau passage. Leibniz reprend tout d'abord la figure du « problème des partis », commune à Pascal, Fermat et Huygens : comment répartir équitablement les mises si une partie d'un jeu est interrompue en cours de route ? On connaît l'état d'arrêt du jeu mais la fin de la partie demeure dans l'aléatoire, des probabilités conditionnelles sont – pour nous – en jeu. Le lien entre le petit jeu de dé de Leibniz et le problème des partis est assez artificiel, mais il permet à ce dernier de se placer sur le terrain juridique. On sait que, juriste de formation, Leibniz avait dans sa jeunesse inventé un système rudimentaire de calcul des probabilités en matières juridiques, avant même de faire le voyage à Paris qui l'initierait aux théories de son époque (voir (Hacking 2002), chapitre 10). Dans ce passage, Leibniz oppose très clairement les règles conventionnelles (le droit positif) aux règles exactes du droit naturel. La « maxime fondamentale » est en fait présentée par Leibniz non pas comme un *théorème de mathématiques* mais comme une *maxime du droit naturel*. La formulation juridique de la règle idéale de partage a aussi l'avantage pédagogique de faire apparaître les « trois cinquième » contre « deux cinquième » plutôt que la proportion 3/2.

Sur un dernier point, enfin, j'ai renoncé à mon idée initiale. Les deux premières années, j'avais ajouté aux questions préalables (recherche de vocabulaire et d'étymologie) la recherche de quelques éléments biographiques sur Leibniz. La grande variabilité des résultats m'a convaincu de prendre en charge moi-même la présentation biographique. Lorsqu'elle était à la charge des élèves, plusieurs problèmes se présentaient. Premièrement, dans beaucoup d'encyclopédies ou dictionnaires des noms propres, l'article « Leibniz » fait plusieurs colonnes, or je demandais aux élèves une biographie d'environ dix lignes. Le nécessaire travail de synthèse que cela demande est d'une grande difficulté : certains élèves l'esquivaient en copiant *in extenso* les dix premières lignes de l'encyclopédie et en ajoutant la date de mort… le résultat est troublant et comique, le décès intervenant alors que Leibniz commence à peine ses études ! Deuxième problème : selon les dictionnaires, on peut trouver un portrait de Leibniz se concentrant essentiellement (voir uniquement) sur son œuvre philosophique. Les élèves ont alors à résumer un contenu auquel ils ne peuvent rien entendre, et, pour ma part, je n'ai aucune intention de me lancer dans un cours sur la *monadologie* ou l'*harmonie préétablie*. Bien entendu, ce travail de synthèse biographique serait dans l'idéal intéressant, mais il demande beaucoup plus de préparation que je ne l'imaginais. Il faudrait sans doute sélectionner la source et travailler avec le professeur de lettres sur la technique de contraction de texte.

Quelques réactions d'élèves

J'ai, en une occasion, distribué un petit questionnaire (anonyme) aux élèves en fin de séance. À la question « Ce travail sur des textes historiques vous a-t-il semblé plutôt facile ou difficile » j'obtiens : « difficulté moyenne » 7, « assez facile » 9, « facile » 4. Ce n'est pas surprenant en classe de Première ; ce texte pourrait sans doute servir en classe de troisième ou de seconde, selon l'évolution des programmes. À la question « Ce travail sur des textes historiques vous a-t-il personnellement semblé intéressant ? » j'obtiens : « Sans intérêt » 1, « de peu d'intérêt » 0, « pas d'avis » 1, « assez intéressant » 18, « très intéressant » 0. À la question fermée « Souhaiteriez-vous étudier d'autres textes historiques à l'occasion d'autres chapitres cette année (Oui / Non) », j'obtiens 18 Oui et 1 Non.

Une activité plutôt facile et assez intéressante, sans plus. Je laissais sur la fiche de réponse une case pour des commentaires personnels. Seuls huit élèves ont laissés des commentaires, mais certains me semblent fort instructifs. Un seul est négatif : « je n'ai pas beaucoup aimé ces séances ». Je passe quelques commentaires positifs généraux (du type « c'était intéressant », « très instructif ») et vous laisse méditer les trois réponses suivantes (orthographe d'origine) :

> *Pourquoi a-t-on étudié le texte de Leibniz, en sachant que Leibniz avait fait une erreur ?*
>
> *Elle nous ont permit de comprendre d'ou venait tous ces théorèmes que l'on nous fait avaler en cours.*
>
> *J'ai trouvé ces séance mieux que les autres car on a un peu oublié le cours et on a fait que des exercice. Je trouve que c'est plus facile de comprendre le cours a l'aide d'exemple ou d'exercice concrait c'est a dire avec de vrai valeur.*

ELEMENTS BIBLIOGRAPHIQUES

SOURCES

MORA-CHARLES Maria Sol. « Quelques jeux de hazard selon Leibniz ». *Historia Mathematica*, 1992, n°19, p.125-157.

Reproduit trois manuscrits inédits de Leibniz, avec une présentation rapide de Madame Mora-Charles (Université de San Sebastian)

LEIBNIZ Gottfried Whilhelm. *L'estime des apparences : 21 manuscrits de Leibniz sur les probabilités, la théorie des jeux, l'espérance de vie*. Textes édités et présentés par Marc Parmentier. Paris : Vrin, 1995.

DOCUMENTATION

BARBIN Evelyne, LAMARCHE Jean-Pierre (eds.). *Histoire de probabilités et de statistiques*. Paris : Ellipses, 2004.

Issus d'un colloque de la commission inter-IREM *Histoire et Épistémologie*, cet ouvrage collectif est destiné aux enseignants et au « grand public cultivé ». La plupart des contributions s'appuient sur des textes primaires largement cités. Signalons, par exemple, l'article de B. Parzysz sur la correspondance des frères Huygens sur l'espérance de vie, utilisable en classe de Seconde ou de Première (notions de moyenne et de médiane, regroupement en classes, estimation

graphique de la médiane, étude sur des sous-populations). Les probabilités conditionnelles et les aspects bayesiens sont abordés dans deux articles.

IREM de Basse-Normandie. *L'espérance du hollandais, ou le premier traité de calcul du hasard.* Paris : Ellipses, 2006 .

Paru dans la collection « comprendre les mathématiques par les textes historiques » cet ouvrage s'adresse aux enseignants du secondaire et du supérieur. Il présente l'intégralité du traité premier traité de calcul des probabilités, le *Du calcul dans les jeux de hasard* du mathématicien (et physicien) hollandais Christian Huygens (1654). Huygens y traite du problème des partis et de problèmes de dés. Le recueil comprend de nombreux textes complémentaires (Montmort, Jacques Bernoulli, de Moivre, Euler). Nos collègues de l'IREM de Basse-Normandie présentent ces textes et donnent de nombreux exercices (corrigés), de niveaux différents (du Lycée au 1^er^ cycle universitaire).

M : ATH. *Brochure n°19*. Paris : IREM Paris 7, 1990.

Le groupe « Mathématiques : Approche par les Textes Historiques » rassemble ici des activités pour la classe s'appuyant sur des textes historiques. Les thèmes sont divers et concernent le collège comme le lycée. Du côté des probabilités, on y trouve le texte de Galilée sur le problème du grand duc de Toscane ainsi que des extraits du *Traité du triangle arithmétique* de Pascal ; un exemple (un peu ancien) d'utilisation en classe de première S est donné.

Site MacTutor : www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html
Ce site universitaire regroupe, entre autres, des notices biographiques complètes et fiables, accompagnées d'une abondante iconographie. Un *must* pour s'informer sur la vie et contempler le portrait des mathématiciens rencontrés dans ce travail : Leibniz, Galilée, Pascal, Fermat, Huygens. Il faut lire l'anglais, toutefois.

POUR ALLER PLUS LOIN

HACKING Ian. *L'émergence des probabilités*. Paris : Seuil, 2002.

Cette traduction (due à M. Dufour) du grand classique de Ian Hacking *The Emergence of Probability* (1975) aborde d'un point de vue historique et épistémologique l'émergence des probabilités sur une période allant de la fin de la Renaissance au début du XVIII^e^ siècle. Dans un style vif et agréable, l'auteur étudie plus la question des conditions historiques de possibilité de l'émergence d'un nouveau style de pensée que le contenu mathématique précis des textes ; on n'y trouvera guère d'extraits originaux. Mentionnons particulièrement le deuxième chapitre, consacré à la double nature épistémologique du concept de probabilité. Hacking expose avec beaucoup de clarté la classique dualité de points de vue : selon la conception *subjective* (ou *épistémique*) des probabilités, ces dernières mesurent des degrés de confiance accordé à un énoncé (une prévision, un témoignage etc.) ; selon la conception *objective* (ou *fréquentiste*), la probabilité rend compte de la stabilité de fréquences statistiques relatives à des phénomènes aléatoires. Les chapitres consacrés au « pari de Pascal » ou au « problème de l'induction » selon Hume peuvent fournir des pistes de travail avec les collègues de lettres ou de philosophie.

DASTON Lorraine. « L'interprétation classique du calcul des probabilités ». *Annales E.S.C.*, 1989 (3), p.715-731.

Le travail pionnier de Ian Hacking a conduit à la formation, au début des années 1980, d'un groupe de travail sur l'histoire des probabilités et des statistiques. En sont issus plusieurs travaux devenus des classiques, malheureusement en Anglais : *The Probabilistic Revolution* (L. Krüger *et al.*, Cambridge (Mas.), 1986), *Classical Probability in the Enlightenment* (L. Daston, Princeton, 1988), *The Rise of Statistical Thinking 1820-1900* (T. Porter, Princeton, 1986). L. Daston a eu la bonne idée de publier dans la grande revue française d'Histoire un condensé de ses travaux. Ce texte très riche (et un peu dense) reprend les thèses classiques d'Ernest Coumet sur le rôle des contrats aléatoires dans l'émergence des raisonnements probabilistes, ainsi que la distinction entre points de vue épistémiques et fréquentistes. Daston y défend la thèse selon laquelle, jusqu'au début du XIX^e^ siècle, le calcul des probabilités relève moins d'une théorie mathématique autonome que d'une démarche de modélisation d'une série de domaines : jeux de hasard, fiabilité des témoignages et calculs de rentes viagères au XVII^e^ siècle ; décisions rationnelles de l'*homo oeconomicus* à partir du XVIII^e^ siècle. Elle inscrit l'émergence des probabilités au XVII^e^ siècle dans le cadre d'une crise plus générale de la rationalité : face au double écueil du scepticisme intégral et d'un rationalisme absolue virant au dogmatisme, une génération de « sceptiques constructifs » promeut la légitimité d'un nouveau type de raisonnement – probabiliste – susceptible de guider rationnellement dans l'action (sinon d'atteindre aux parfaites certitudes et autres vérités éternelles). Un texte à partager, lui aussi, avec ses collègues de Lettres et de Philosophie.

Journal Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique
www.jehps.net

Depuis 2005, ce journal en ligne propose gratuitement des articles lisibles par des enseignants de mathématiques. Au delà de la culture générale sur l'histoire de ces disciplines (et de leur enseignement), on peut y trouver de nombreux exemples de problèmes historiques.

ANNEXE

Le logiciel SCILAB est disponible sur le site de l'INRIA, dans la partie « calcul ». http://www.inria.fr/valorisation/logiciels/index.fr.html

```
"la fonction dicematrix renvoie une matrice ligne de s lancers d'un dé équilibré"
    function d = dicematrix(s)
        for i=1:s;
        d(1,i)=1+int(6*rand(1,1));
        end;
    endfunction
"La fonction Leibniz renvoie les couples (nombre de sommes de 5, nombre de
sommes de 8) pour une répétition de n lancers de deux dés donnant l'un des deux
résultats"
    function l = Leibniz(n)
        i=0
        nb5 = 0
        nb8 = 0
        while i < n
            d = sum(dicematrix(2))
            if d == 5 then nb5 = nb5 + 1 ; i = i+1; end
            if d == 8 then nb8 = nb8 + 1 ; i = i+1; end
        end
        l(1,1)=nb5
        l(1,2)= nb8
    endfunction
"La fonction suivante donne les fréquences relatives (en %)"
    function l = relLeibniz(n)
        tirage = Leibniz(n)
        l(1,1)=100*tirage(1,1)/n
        l(1,2)=100*tirage(1,2)/n
    endfunction
"La fonction suivante liste n répartitions de fréquences relatives sur des tirages de
taille m"
    function l = Leibniztable(n,m)
        for i = 1:n
            a=relLeibniz(m)
            l(i,1)=a(1,1)
            l(i,2)=a(1,2)
        end
    endfunction
```