

## Chapitre V

# LA MULTIPLICITE DES POINTS DE VUE EN ANALYSE ELEMENTAIRE COMME CONSTRUIT HISTORIQUE

*Renaud Chorlay*

Le groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Paris 7<sup>1</sup> est engagé depuis 4 ans, sous l'égide de l'INRP, dans un travail sur la notion de « multiplicité des points de vue » en mathématiques. Nous avons choisi plus particulièrement la multiplicité des points de vue en Analyse, cherchant à croiser un travail d'histoire portant sur le XIX<sup>e</sup> siècle et une interrogation didactique sur l'enseignement de l'analyse de l'entrée en Seconde au premier cycle du Supérieur.

Les didacticiens ont attiré l'attention sur la multiplicité des points de vue intervenant en Analyse élémentaire : points de vue ponctuel, infinitésimal, local, global. Leurs travaux ont porté soit sur les questions de flexibilité cognitive – changement de point de vue, cadre ou registre – soit sur le rôle des ruptures curriculaires – découverte des points de vue ponctuels et globaux en classe de Seconde, infinitésimaux et locaux en classe de Première, changement de niveau de conceptualisation lors du passage dans le Supérieur. Notre travail d'Histoire a porté sur une série de *points chauds* conceptuels, où ces points de vue se différencient et s'explicitent au cours du XIX<sup>e</sup> siècle : démonstrations de l'égalité des accroissements finis, liens entre signe de  $f'$  et variations de  $f$ ; distinction entre maximum, maximum local et borne supérieure ; évolution des caractérisations de la croissance ; émergence de la notion de domaine de définition. Ces études

---

<sup>1</sup> Cet exposé présente une partie des travaux menés par Philippe BRIN, Renaud CHORLAY et Anne MICHEL-PAJUS, du groupe M : ATH (Mathématiques : Approche par les Textes Historiques) de l'IREM de Paris 7. Mèl collectif : [iremmath@yahoo.fr](mailto:iremmath@yahoo.fr) , mèl personnel : [renaud-chorlay@noos.fr](mailto:renaud-chorlay@noos.fr)

historiques nous ont conduits à clarifier les éléments d'un réseau conceptuel formant la trame sous-jacente à ce jeu de la multiplicité des points de vue.

*Nous voudrions présenter quelques exemples élémentaires mais fondamentaux. En cherchant à caractériser ce qui distingue, disons, Cauchy de Weierstrass, nous chercherons à éclairer la mise en place de modes de raisonnements spécifiques à une Analyse ensembliste, et à montrer l'interaction entre la mise en place des quatre points de vue – ponctuel, infinitésimal, local, global – en Analyse et l'évolution du regard sur la fonction.*

La présentation de la problématique, puis l'étude de deux concepts : croissance et maximum, nous amènerons à envisager la multiplicité des points de vue en Analyse et sur les fonctions, puis à développer les perspectives pédagogiques que cela peut offrir.

### Présentation de la problématique.

Le thème de ce colloque invitait à une réflexion sur la rigueur et l'erreur, et cet axe de lecture est aussi l'axe classique pour qui se penche sur l'évolution des cadres fondamentaux de l'Analyse mathématique au XIX<sup>e</sup> siècle<sup>2</sup>. On peut lire des études sur l'attention nouvelle portée, au début du XIX<sup>e</sup> siècle, aux problèmes de convergence des séries manipulées jusqu'alors formellement ; sur la lente distinction de la continuité et de la dérivabilité, en signalant que, d'Ampère en 1806 à Gilbert dans les années 1870, plusieurs mathématiciens ont « démontré » que toute fonction continue est dérivable (par morceaux) ; sur l'explicitation progressive de la quantification des variables, en particulier à l'occasion de la distinction entre l'uniforme et le « point par point » (*pointwise*) pour la continuité d'une fonction ou la convergence des séries de fonctions. Cette lecture d'un mouvement de construction d'une Analyse enfin rigoureuse, enfin débarrassée de certaines « naïvetés », est loin d'être récent : c'est une lecture proposée par les acteurs eux-mêmes, depuis Cauchy dans la célèbre préface à son *Analyse Algébrique* en 1821<sup>3</sup> jusqu'au bilan mathématico-historique dressé au début du XX<sup>e</sup> siècle par Pringsheim en ouverture du deuxième tome de l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques de Félix Klein, sur un siècle, une analyse qui ne cesse de devenir rigoureuse ! Cette lecture convoque les catégories de « la rigueur », dénonce les « erreurs » des pères (ou des contemporains), met en avant le rôle des contre-exemples et la mise en place de conventions sur ce rôle. Cette lecture, enfin, invite à porter le regard presque exclusivement sur les questions de fondements de l'Analyse, en faisant culminer le mouvement de « rigorisation »

<sup>2</sup> Par exemple : Dugac P. *Histoire de l'Analyse*. Paris : Vuibert, 2003 ; Gispert H. « Sur les Fondements de l'Analyse en France ». *Archive for History of Exact Sciences*, 1983, vol.28, p.37-106 ; Jahnke H-N. (ed.) *A History of Analysis*. New-York : AMS, 2003 ; Volkert K. « Die Geschichte der pathologischen Funktionen ». *Archive for History of Exact Sciences*, 1987, vol.37(1), p.193-232.

<sup>3</sup> Cauchy A-L. *Analyse Algébrique*. Paris : Jacques Gabay, 1989.

dans les constructions de l'ensemble des réels et la mise en place d'un exposé de l'Analyse partant de la fonction arbitraire, à laquelle les propriétés particulières – intégrabilité (en différents sens), continuité, dérivabilité, analyticité etc. – sont explicitement et progressivement ajoutées.

Nous avons souhaité aborder la question sous un autre angle, pour retrouver certes les questions d'erreurs et de rigueur, mais après un détour par une autre problématique, d'ailleurs importante par elle-même. L'attaque de front sous l'angle de la rigueur ne nous semblait pas nécessairement la plus riche d'enseignement pour le pédagogue, par son caractère trop tranché (vrai/faux, noir/blanc) qui n'invite guère à d'autres « réflexions » didactiques qu'un constat de la grande difficulté de l'Analyse et la (relative) consolation que peut procurer la lecture de raisonnements erronés sous la plume des plus grands mathématiciens et non seulement dans les copies d'élèves, d'étudiants, ou de candidats aux concours de recrutements d'enseignants. Du point de vue curriculaire, l'étude des niveaux de rigueurs distingue difficilement d'autres phénomènes saillants qu'une rupture dans le passage du Secondaire au Supérieur, avec son passage d'une Analyse dans laquelle les tâches confiées aux élèves sont très calculatoires et procédurales, dans laquelle certaines notions fondamentales sont esquiv  es et les grands théorèmes admis, à une Analyse démontrée à des étudiants dont on attend qu'ils puissent réaliser des tâches de nature plus abstraite, par exemple établir une propriété d'une fonction dont on connait certaines propriétés mais pas de « formule ». Notre questionnement initial portait sur la flexibilité cognitive et la multiplicité des points de vue, questions travaillées entre autres par les didacticiens spécialistes de l'*advanced mathematical thinking*<sup>4</sup>, soit, pour le dire vite, des mathématiques enseignées dans le Supérieur. Plus précisément, nous avons emprunté – avant de les tordre à notre façon – aux didacticiens de l'Analyse la distinction entre quatre points de vue dont la bonne maîtrise semble nécessaire à une maîtrise convenable de l'univers des fonctions, quatre points de vue qui sont :

Ponctuel

Infinitesimal

Local

Global

Ainsi « la fonction  $f$  est positive en  $2$  » énonce une propriété ponctuelle de la fonction. « La fonction  $f$  est dérivable en  $2$  » énonce une propriété infinitésimale ; on note déjà une première complexité : cette propriété infinitésimale est aussi locale, et son énoncé est ponctuel (« en  $2$  »). « La fonction  $f$  admet un maximum local (ou relatif) en  $2$  » est une propriété locale, non infinitésimale. « La fonction  $f$  est bornée » est une propriété globale, qui nécessite qu'un domaine de définition (ou, au moins, un domaine d'étude) ait été préalablement fixé, ce qui n'était pas le cas pour les trois énoncés précédents, dans lequel le domaine pouvait n'être qu'un

---

<sup>4</sup> Tall D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Boston : Kluwer, 1991.

horizon (pour peu qu'il contienne un voisinage de 2). La distinction et l'articulation de ces quatre points de vue se fait sur fond d'une structure syntaxique fondamentale :

La fonction est [*propriété*] sur [*domaine*].

Ainsi la propriété est-elle ponctuelle si on peut l'explicitier en n'utilisant qu'un domaine réduit à un point ; locale s'il faut évoquer des voisinages de points pour l'explicitier ; globale s'il faut qu'un domaine d'étude ait été fixé sur lequel porte la propriété. Il ne s'agit ici que d'indiquer par des exemples simples les idées générales relatives à ces quatre points de vue et non de rechercher une définition précise ou d'explorer l'arborescence des sous-cas et des cas mixtes. Signalons toutefois trois premières pistes de complexification : premièrement, l'infinitésimal se présente comme un cas particulier en ceci que, contrairement aux trois autres points de vue, il n'est pas naturellement associé à un type de domaine (point / voisinage / domaine d'étude) ; deuxièmement, on peut introduire des quantificateurs universels pour caractériser des propriétés faisant jouer deux points de vue en même temps, par exemple dans « la fonction est positive sur  $[0 ; 1]$  », articulant points de vue ponctuels et globaux ; enfin une propriété locale peut nécessiter le filtre de tous les voisinages d'un point – par exemple la continuité en un point –, quand d'autres peuvent se contenter d'un seul voisinage – par exemple la notion de maximum local. Un petit travail d'exploration de cette complexité a été fait par le groupe et donnera lieu à publication ; pour l'heure, l'idée générale suffit à suivre les problématiques historiques et didactiques. Il suffit de noter que cette structure syntaxique fondamentale présente trois traits qui la mettent au centre de notre problématique : elle est enseignée aujourd'hui très tôt, dès la découverte du monde des fonctions en classe de Seconde, et demeure un socle invariable au cours d'un cursus qui voit évoluer le nombre des points de vue et les niveaux de conceptualisation ; le lien étroit entre les quatre points de vue et les types de domaines rend difficilement imaginable un travail qui dissocierait les deux ordres de problèmes ; historique, ce type de formulation est typique du XX<sup>e</sup> siècle, d'où l'intérêt d'un travail d'Histoire portant sur la différenciation et l'explicitation des quatre points de vue au cours du XIX<sup>e</sup> siècle, et sur l'émergence de cette structure syntaxique comme structure obligatoire dans des mathématiques bien écrites.

Pour clore cette partie de position du problème, donnons quelques exemples d'énoncés sur lesquels bâtir un travail en classe. Pour chaque énoncé, on peut demander à des élèves ou des étudiants s'il leur semble vrai ou faux et, dans le second cas, s'ils peuvent fournir un contre-exemple, par exemple graphique.

Enoncé 1 : Si  $f$  est continue en 2 et strictement positive en 2, alors  $f$  est strictement positive au voisinage de 2.

Enoncé 2 : si  $f$  est continue en 2 et strictement positive en 2, alors  $f$  est strictement positive en 2,0001.

Ces énoncés sont bien sûr vrai et faux, respectivement, le premier présentant un jeu déjà subtil entre des hypothèses, l'une locale (continuité) l'autre ponctuelle (positivité en 2), et une conclusion locale ; de plus, l'hypothèse locale nécessite, pour être énoncée, le filtre des voisinages de 2, alors que la conclusion porte sur l'un d'entre eux, dont on peut affirmer l'existence sans connaître en rien sa taille. L'énoncé 2 permet de travailler sur cette insaisissabilité de la « taille » du voisinage. Une variante intéressante consiste à remplacer dans le premier énoncé le « au voisinage » par « sur un voisinage ».

Enoncé 3 : Si  $f(2) = g(2)$  alors  $f'(2) = g'(2)$

Enoncé 4 : Si  $f'(2) = g'(2)$  alors  $f(2) = g(2)$

La nature de l'erreur est assez simple à identifier dans le cas de l'énoncé 3 : cet énoncé peut être lu comme un passage abusif du ponctuel à l'infinitésimal, ou comme une confusion entre les deux lectures possibles de «  $f'(2)$  », propriété ponctuelle de la fonction  $f'$  mais propriété infinitésimale (donc aussi locale) de la fonction  $f$ . La fausseté de l'énoncé 4 est moins aisée à caractériser, mais un contre-exemple graphique est aisé à trouver. On peut se demander le sens que peut prendre un énoncé relatif à l'unicité de la primitive d'une fonction continue, sur un intervalle et moyennant une condition initiale arbitraire, pour un étudiant incapable de saisir la fausseté de l'énoncé 4.

Enoncé 5 : une fonction continue est bornée

Enoncé 6 : une fonction localement croissante est croissante.

Ici les deux énoncés sont globaux, plus précisément des énoncés de passage du local au global. Ils sont faux, mais tous deux peuvent être rendus vrais si l'on ajoute certaines hypothèses topologiques sur le domaine d'étude : l'énoncé 5 est vrai sur les intervalles fermés bornés ; l'énoncé 6 est vrai sous hypothèse de connexité, le cas de l'opposé de la fonction inverse montrant la nécessité de cette hypothèse.

Deux exemples : croissance et maximum.

La partie principale du travail du groupe a consisté en une série de petites monographies, en partie originales, sur l'évolution au cours du XIX<sup>e</sup> siècle d'un certain nombre de notions ou théorèmes dans lesquels on voit clairement, aujourd'hui, s'articuler les différents points de vue. Un premier travail a porté sur

le théorème des fonctions implicites qui, sous sa forme logiquement équivalente de théorème d'inversion locale, nous semblait paradigmatique du passage de l'infinésimal au local. Nous n'entrerons ici dans aucun détail – le texte de cet exposé est déjà paru<sup>5</sup> – mais quelques remarques nous serviront dans la suite de cet exposé. La notion de fonction implicite et le théorème d'existence associé ne sont pas dans l'enseignement français actuel considérés comme élémentaires : ils ne sont abordés que dans le supérieur, parfois sans démonstration. Sur ce point, le contraste est frappant avec la situation prévalant depuis la moitié du XVIII<sup>e</sup> siècle et tout au long du XIX<sup>e</sup> siècle : la notion de fonction implicite fait partie des premières notions sur les fonctions, et la formule de dérivation des fonctions implicites apparaît dans la liste des formules usuelles, juste après la formule de dérivation des « fonctions de fonctions » (nous dirions des « fonctions composées »). Jusqu'aux années 1870 cette formule est le seul résultat associé à la notion, il n'y a pas de théorème d'existence. Cette perte du statut élémentaire de la notion de fonction implicite est révélatrice, on y reviendra plus loin, d'une évolution fondamentale de la notion de fonction, en partie liée à l'évolution de la notion de fonction multivoque, point peu commenté par les historiens de l'Analyse mais, selon nous, très significatif. Rappelons que jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle on distingue les fonctions univoques, qui ne prennent qu'une seule valeur pour chaque valeur de la variable, des multivoques. Ainsi la fonction racine carrée est-elle multivoque, plus précisément bi-voque : 4 a deux racines carrées, 2 et -2 ; de même l'arc tangente est-elle infiniment multivoque, toutes ses déterminations étant de la forme  $\arctan x + k\pi$  où  $k$  est un entier relatif.

a. Lien entre signe de  $f'$  et variations de  $f$  chez Cauchy.

Entrons dans un peu plus de détail sur deux exemples plus élémentaires. La notion de croissance d'une fonction nous semblait riche à travailler sous l'angle de la multiplicité des points de vue. Elle est aujourd'hui enseignée très tôt, dès la découverte des fonctions en classe de Seconde, et sa présentation ne combine que les points de vue ponctuels (seuls des images isolées sont à comparer) et globaux (quantificateur universel sur les couples de points du domaine). En classe de Première apparaît l'un des outils fondamentaux au Lycée sous la forme d'un théorème reliant, sur un intervalle (donc sous une hypothèse topologique révélatrice d'un caractère global plus profond), le signe de la fonction dérivée  $f'$  et le sens de variation de la fonction  $f$ . Ce théorème est admis au Lycée et constitue, dans le Supérieur, l'une des premières démonstrations d'Analyse articulant les niveaux infinitésimaux, locaux et globaux. Un petit travail sur l'histoire des démonstrations, plus ou moins rigoureuses, de ce théorème est extrêmement

---

<sup>5</sup> Chorlay R. « Fonctions Implicites : de la Notion au Théorème ». *Mnemosyne*, 2003, n° 18, p.15-58.

révélateur de l'évolution du langage de l'Analyse. Nous ne donnons ici qu'un exemple tiré des *Leçons sur le calcul différentiel et intégral* de Cauchy<sup>6</sup> rédigées en 1823 :

Problème. La fonction  $y = f(x)$  étant supposée continue par rapport à  $x$  dans le voisinage de la valeur particulière  $x = x_0$ , on demande si, à partir de cette valeur, la fonction croît ou diminue, tandis que l'on fait croître ou diminuer la variable elle-même.

*Solution. Soient  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  les accroissements infiniment petits et simultanés des variables  $x$  et  $y$ . Le rapport  $\Delta y/\Delta x$  aura pour limite  $dy/dx = y'$ . On doit en conclure que, pour de très petites valeurs numériques de  $\Delta x$  et pour une valeur particulière  $x_0$  de la variable  $x$ , le rapport  $\Delta y/\Delta x$  sera positif si la valeur correspondante de  $y'$  est une quantité positive et finie (...). (...) les différences infiniment petites  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  étant de même signe, la fonction croîtra ou diminuera, à partir de  $x = x_0$ , en même temps que la variable  $x$  (...).*

*Ces principes étant admis, concevons que la fonction  $y = f(x)$  demeure continue entre deux limites données  $x = x_0$ ,  $x = X$ . Si l'on fait croître la variable  $x$  par degrés insensibles depuis la première limite jusqu'à la seconde la fonction  $y$  ira en croissant toutes les fois que sa dérivée étant finie aura une valeur positive (...).*

L'architecture de la démonstration articule clairement les points de vue : un lemme de passage de l'infinitésimal (stricte positivité de  $f'(x_0)$ ) au local, puis passage du local au global sur un intervalle. La conception du nombre dérivé n'utilise aucune métaphore cinématique, aucune analogie géométrique : le nombre dérivé est limite du taux de variation, et le passage de la positivité de la limite à la positivité de  $\Delta y/\Delta x$ , pour  $\Delta x$  suffisamment petit, autrement dit sur un voisinage de  $x_0$ , est d'une parfaite rigueur. Cette démonstration n'est toutefois pas celle que nous donnons aujourd'hui, pourquoi ? Peut-être, premièrement, parce que ce qui semble un lemme de croissance locale n'en est pas un : il est faux de déduire la croissance de  $f$  au voisinage de  $x_0$  de la stricte positivité de  $f'(x_0)$ , comme le montre le contre-exemple de  $x + 10x^2 \sin \frac{1}{x}$  en 0. Cauchy commet-il donc une erreur ? Non, car on ne peut trouver de contradiction qu'en utilisant notre définition de la croissance, or Cauchy ne donne pas de définition de la croissance. Son lemme de comparaison locale des accroissements de  $x$  et  $y$  n'établit pas la croissance telle que nous l'entendons, mais il peut servir de résultat local permettant un passage à la croissance en notre sens. Mais ce passage du local au global, de la comparaison locale à la croissance globale, sans doute ne l'écrivions

<sup>6</sup> Cauchy A-L. *Œuvres Complètes*, tome 16. Paris : Gauthiers-Villars, 1882-1974, p. 37.

nous pas non plus comme Cauchy le fait. Là où nous mettrions bout à bout des inégalités, car c'est ainsi que nous exprimons la croissance dans notre vision ponctuelle, Cauchy fait parcourir continûment à la variable un intervalle, la notion de parcours continu étant ici une notion primitive. Le lemme local décrit le *comportement* de la fonction en chaque point de l'intervalle, la persistance de ce comportement n'est autre que la croissance : la croissance est ainsi explicitée plus que définie. On voit qu'une telle conception de la croissance n'a au fond de sens que sur un domaine connexe ; elle n'est pas notre conception ponctuelle, mais elle est aussi une conception de la croissance, peut-être plus proche de celle des élèves qu'une définition ponctuelle brisant toutes les solidarités locales.

Il est intéressant d'insérer en quelques mots cette démonstration de Cauchy dans le projet général de réécriture de l'Analyse que cet auteur formule et met en œuvre dans ses cours à l'Ecole Polytechnique depuis les années 1810. On pourrait le qualifier de projet de *numérisation* de l'Analyse, par opposition à une Analyse fondée sur la généralité de l'Algèbre, ainsi que l'explique Cauchy dans la célèbre préface à l'*Analyse Algébrique* ; ce projet de numérisation le rapproche de nous. On peut en souligner trois aspects.

Premièrement, exiger que le symbole d'égalité ait un sens numérique et non procédural : deux expressions sont égales non parce qu'on peut dériver l'une de l'autre par une procédure admissible, mais parce qu'en substituant des valeurs numériques dans les deux membres, on obtient des égalités entre nombres. Cette numérisation de l'égalité fonctionnelle invite à préciser des domaines de validité, instaure donc un premier jeu du type « être [*propriété*] sur [*domaine*] ».

Deuxième aspect de cette numérisation de l'Analyse : la nature numérique de l'existence fonctionnelle. Ainsi la convergence de la série de terme général  $x^n/n!$  *démontre-t-elle* pour Cauchy l'existence de la fonction exponentielle. Cet aspect de numérisation est particulièrement frappant lorsqu'on se penche sur la notion d'intégrale. Si l'on regarde le traité de Lacroix<sup>7</sup>, dont les premières versions datent des dernières années du XVIII<sup>e</sup> siècle, il n'y est pas question de démontrer des existences de fonction, en particulier pas l'existence des primitives : Lacroix explique que rechercher les primitives (il parle d'« intégrale indéfinie ») c'est le contraire de dériver, qu'on passe de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie en fixant deux bornes numériques, et qu'il existe des méthodes numériques de calcul d'intégrales définies, utilisant des sommes d'aires de rectangles ou de trapèzes. Cauchy renverse la démarche et résout un problème d'existence que Lacroix ne posait pas : il établit la convergence des suites de nombres obtenues par les méthodes numériques d'intégration, puis fait varier une des bornes de l'intégrale définie pour obtenir une fonction primitive.

---

<sup>7</sup> Lacroix S-F. *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et Intégral* (tome I). Paris : Gauthiers-Villars, 1867 (7<sup>ème</sup> édition).



Troisième aspect, la notion de limite devient, on le voit, fondement de l'Analyse. On aurait toutefois tort de voir dans l'Analyse à la Cauchy notre Analyse. Ainsi il n'y a pas chez Cauchy de travail de construction ou de caractérisation des nombres réels : le continu (numérique) est une notion primitive ; sa notion de limite semble, lorsqu'on lit la définition, être la nôtre : Cauchy écrit toutefois que  $\sin(1/x)$  a pour limite, lorsque  $x$  tend vers 0, tout l'intervalle  $[-1 ; 1]$  ; il ne distingue pas continuité et dérivabilité ; la différence entre le ponctuel et l'uniforme lui échappe, par exemple lorsqu'il démontre que la limite d'une suite convergente de fonctions continues est continue ; il « démontre » en quelques lignes qu'on peut dériver sous le signe intégral, sans aucune hypothèse, etc.

b. Maximum, maximum local, borne supérieure.

Nous prenons comme deuxième exemple la notion de maximum. Dans le cursus actuel elle est, tout comme la croissance, une notion globale présentée dès la classe de Seconde, avant que son pendant local ne soit introduit en classe de Première (scientifique) ; cette notion de maximum local est peut-être pour les élèves la première occasion de rencontre explicite avec le point de vue local et, souvent, les termes « local » et (éventuellement) « voisinage ». Nous souhaitons voir comment ce partage entre maximum (sous-entendu « global ») et maximum local s'opérait au XIX<sup>e</sup> siècle. Dans les premières années de ce siècle, le manuel de Lacroix définit ainsi

*La valeur qui a lieu dans le passage de l'accroissement au décroissement, étant plus grande que celles qui la précèdent et la suivent immédiatement, s'appelle un maximum (Lacroix, 1867, p.96).*

Quelque soixante-dix ans plus tard, on trouve dans le cours de Weierstrass sur le calcul des variations<sup>8</sup> :

*On dit d'une fonction  $f(x)$  que sa valeur au point  $x = a$  est un Minimum si elle est plus petite pour  $x = a$  que pour toutes les valeurs voisines de  $x$ , i.e. si l'on peut déterminer une grandeur positive  $\delta$  telle que*

$$f(a+h) - f(a) > 0$$

*dès que  $|h| < \delta$ .*

Le style a bien changé : style « cursif » chez Lacroix, dont on sent le regard suivre la courbe, style purement statique chez Weierstrass, utilisant des implications entre inégalités quantifiées. Dans les deux cas, toutefois, les termes

---

<sup>8</sup> Weierstrass Karl. *Mathematische Werke Bd. 7 : Vorlesungen über Variationsrechnung*. Leipzig : Akademische Verlag, 1927, p.4. Traduction libre R. Chorlay.

« maximum » et « minimum » renvoient à ce que nous nommons « maximum local » et « minimum local ». Le phénomène n'a rien d'isolé, et l'on a du mal à trouver dans les textes autre chose que la notion locale, ce qui est lié au fait que les fonctions ne sont pas données avec un domaine de définition : sur un domaine indéterminé, impossible de parler de maximum global ! Nous avons donc concentré notre regard sur un théorème particulier, démontré semble-t-il pour la première fois dans les cours de Weierstrass<sup>9</sup> : une fonction numérique univoque et continue sur un intervalle fermé borné admet un maximum (et un minimum). Nous cherchions à savoir si ce théorème fournissait l'occasion de distinguer les sens locaux et globaux de la notion de maximum. Si l'on se penche rapidement sur la réception de ce théorème de Weierstrass, on se rend compte qu'il n'en est rien : le contexte est celui de la distinction entre maximum et borne supérieure, pas entre maximum local et global. Un cas particulièrement intéressant est celui de Cantor, alors jeune disciple de Weierstrass. Après avoir démontré en 1870 un théorème relatif à l'unicité du développement en série trigonométrique dans lequel il utilisait le théorème de Weierstrass sur le maximum, Cantor publie en 1871 une note relative à sa démonstration, dans laquelle il revient sur trois points, dont un de pure formulation<sup>10</sup> :

*Qu'on me permette enfin de modifier une expression du travail cité.*

*J'y introduisais dans une note la proposition :*

*“ Une fonction continue donnée dans un intervalle  $(a...b)$  (les limites incluses) de la variable réelle  $x$  atteint le maximum  $g$  des valeurs qu'elle peut prendre, pour au moins une valeur  $x_0$  de la variable, de sorte que  $\varphi(x_0) = g$ . ”*

*De la notion d'ensemble de valeurs donné (défini) dans un domaine fini on déduit qu'il possède toujours une limite supérieure, c'est-à-dire une grandeur  $g$  entretenant avec l'ensemble de valeurs la relation suivante : (...)*

*Prenons à titre d'exemple l'ensemble des valeurs [Wertmenge] consistant en la totalité des valeurs prises par une fonction finie, univoque  $\varphi(x)$  donnée dans un intervalle  $(a...b)$  (en incluant les limites), cet ensemble de valeurs a donc une limite supérieure. (...)*

*Si l'on ajoute l'hypothèse de continuité de  $\varphi(x)$  tout du long, on déduit de plus que la limite supérieure  $g$  est aussi atteinte par la fonction, c'est-à-dire qu'il existe une valeur  $x_0$  de  $x$  pour laquelle  $\varphi(x_0) = g$ . C'est là*

<sup>9</sup> Weierstrass K. *Einleitung in die Theorie des analytischen Funktionen. Vorlesungen, Berlin 1878.* Braunschweig : D.M.-V. / Vieweg, 198, p.91.

<sup>10</sup> Cantor G. « Notiz zu dem Aufsatz : Beweis, dass eine für jeden reellen Wert von  $x$  durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion  $f(x)$  sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1871, vol. 73, p.84-86. Traduction libre R. Chorlay de la p. 85.

*le sens de la proposition mentionnée, conformément aux sources citées.*

Remarquons tout d'abord qu'il n'existe pas en 1871 de convention graphique pour distinguer les intervalles avec ou sans leurs bornes, l'auteur doit le préciser dans le texte. Plus profondément, on observe dans ce passage une façon complètement nouvelle de faire de l'Analyse, de *parler des fonctions* : Cantor, à la suite de Weierstrass, y propose un découplage entre aspects fonctionnels et aspects purement ensemblistes, découplage qui permet de préciser ensuite l'articulation des deux plans. Ainsi toute partie bornée de la droite numérique admet-elle une borne supérieure : voilà un résultat ensembliste, établi par Weierstrass après construction de l'ensemble des réels à partir des rationnels (on est au plus loin de la notion primitive de *continu* sur laquelle Cauchy, Riemann encore, s'appuyaient). Par ailleurs, à une fonction et un domaine d'étude on peut associer une partie de la droite numérique, l'*ensemble des valeurs*, que nous nommerions l'ensemble image. Enfin, dans le cas des fonctions continues et des intervalles fermés bornés, la borne supérieure de l'ensemble des images appartient à cet ensemble, et constitue donc un maximum pour la fonction.

On voit combien ce petit questionnement sur l'émergence des notions de maximum local et global nous amène à étudier l'évolution de la notion de fonction elle-même. Des notions locales et globales de maximum, laquelle est primitive et laquelle seconde ? Dans l'univers fonctionnel tel que celui qu'on lit chez Lacroix, la notion locale est première (Fig. 1) : en l'absence de domaine de définition ou d'étude fixé, la courbe présente des points singuliers parmi lesquels les *extrema* ; le *cours* de la fonction (associée au parcours de l'intervalle par la variable, et au parcours de la courbe par l'œil) connaît des accidents, et de ces accidents ou singularités il y a quelque chose à dire – en l'occurrence, que la dérivée s'y annule ... le style cursif est aussi un style narratif. Dans ce cadre, on peut bien dans un second temps se fixer librement un domaine d'étude et comparer les maximums pour déterminer le plus grand d'entre eux : cette notion est secondaire, moins intrinsèque que la notion de maximum (local) comme point singulier ; le plus grand des maximums est parfois appelé maximum absolu (c'est le cas chez Weierstrass), mais dans le cours de Serret, il est au contraire appelé maximum relatif, car relatif à une limitation du domaine de variation de la variable dicté au mathématicien par les circonstances plus que par la nature des mathématiques.

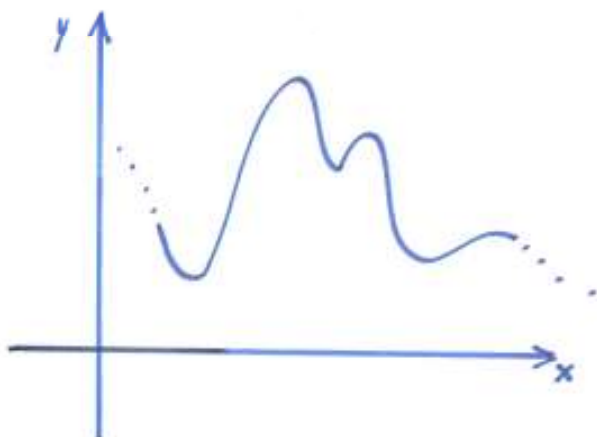


Fig. 1

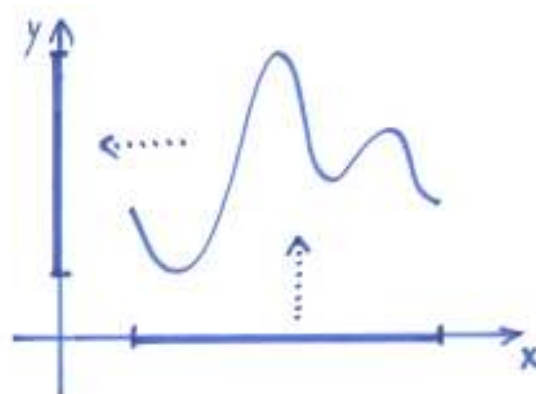


Fig. 2

Dans la seconde conception, présente chez Weierstrass et Cantor, la fonction met en correspondance des parties de la droite réelle ; de la partie image, on peut se demander si elle est ou non bornée, si elle contient ou non sa borne supérieure. Les maximums locaux n'ont aucune existence au sens de l'ensemble image, contrairement à l'éventuel maximum global. On peut retrouver les maximums locaux à titre de notion dérivée, en restreignant le domaine d'étude : un maximum (local) est un maximum (global) de la restriction de la fonction à des domaines d'un type particulier, les voisinages d'un point.

#### Points de vue en Analyse et point de vue sur les fonctions

Ces deux petites analyses, sur la croissance et le maximum, dont nous ne donnons ici que des extraits, montrent non seulement des articulations entre niveaux, différentes des nôtres, mais aussi combien la différenciation et l'explicitation des différents points de vue sont liées aux modes globaux d'appréhension de l'univers fonctionnel. Nous voudrions changer d'échelle d'analyse et quitter les exemples pour tenter une description globale de l'univers fonctionnel dans lequel ont travaillé les mathématiciens avant la mise en place d'un cadre ensembliste par, disons, Weierstrass et ses disciples. Il s'agit de décrire un *type-idéal* aux articulations les plus explicites possible, sans prétendre le retrouver spécifiquement chez tel auteur ou tel autre. L'objectif est de saisir le cadre pré-weierstrassien sous une forme *positive* et non par le recensement de ses manques, hypothèses implicites, erreurs systématiques ou difficultés à dire avec précision.

a. Un point de vue *universellement local*

Nous entendons par *point de vue universellement local* la conjonction de deux éléments : un point de *vue universellement distributif*, une saisie en chaque point d'un *comportement* ; on considère, selon ce point de vue, qu'on dit tout ce qu'il y a à dire d'une fonction lorsqu'on décrit son comportement en chaque point, cette notion de comportement étant locale et non ponctuelle. On peut en effet considérer en chaque point qu'une fonction possède une valeur (point de vue ponctuel) ou un comportement, cette dernière notion, locale, renvoyant à ce que la fonction « est en train de faire » au point donné, d'où une association de nature entre point de vue universellement local et styles cursif et narratif ; la narration est le mode de dépassement de la description locale. Aucun domaine d'étude, encore moins de définition, n'est donné d'avance : le domaine se donne comme horizon, éventuellement à décrire mais cela reste facultatif et *a priori*, non pertinent pour la compréhension de la fonction<sup>11</sup>. Les fonctions se différencient moins par leurs propriétés ou la nature de leur domaine (connexe, compact...) que par le partage, propre à chacune, entre points réguliers et singuliers, et par la nature des singularités.

Pour mieux saisir cette appréhension universellement locale des fonctions, on peut avoir recours à des notions mathématiques formalisées au XX<sup>e</sup> siècle mais qui, nous semble-t-il, en rendent bien compte. Nous semble fondamentale la notion de germe : on dit que deux fonctions d'un type donné (arbitraire, continue, différentiable,  $C^\infty$ , analytique, rationnelle...) définies au voisinage d'un point  $x_0$  définissent le même germe en  $x_0$  s'il existe un voisinage de  $x_0$  sur lequel elles coïncident ; formellement, on passe au quotient dans l'ensemble des fonctions définies quelque part au voisinage de  $x_0$  par la relation « coïncider au voisinage de  $x_0$  ». Par définition, les propriétés locales en  $x_0$  sont les propriétés compatibles avec cette relation d'équivalence, ce sont donc les propriétés des germes en  $x_0$ . Ainsi, en chaque point, le point de vue universellement local saisit non pas une valeur mais un germe de fonction ; la différence avec le point de vue moderne, celui par exemple de la théorie des faisceaux, est l'indétermination du domaine total. Notons qu'un peu d'algèbre permet de donner un sens mathématique parfaitement rigoureux non seulement à cette saisie locale, mais aux saisies ponctuelles et infinitésimales. L'ensemble des germes de fonctions numériques en un point  $x_0$  est en effet naturellement muni d'une structure d'anneau, d'unique idéal principal l'ensemble  $m$  des fonctions s'annulant en  $x_0$ . Associer à chaque germe la valeur que la fonction prend en  $x_0$  c'est passer au quotient modulo l'idéal  $m$ , on retrouve le point de vue ponctuel. Passer au quotient modulo l'idéal  $m^2$ ,

<sup>11</sup> Il est inutile de souligner combien le développement de l'analyse complexe remet fondamentalement ce point de vue en cause : théorème des résidus, rationalité des fonctions méromorphes sur la sphère etc.

c'est, en un sens, identifier les germes coïncidant jusqu'aux infiniment petits du premier ordre : prise en compte infinitésimale. Nous ne pouvons ici dépasser le stade de l'allusion : ces aspects mathématiques seront développés dans un autre texte. On pourra s'en faire une première idée en lisant l'introduction à l'*Algèbre Commutative* de Bourbaki<sup>12</sup>, dans lequel sont présentés les points de vue locaux et infinitésimaux en algèbre commutative, issus de la géométrie algébrique et de la théorie des nombres.

Si l'on revient à l'Histoire, on peut signaler un autre trait de ce cadre pré-weierstrassien : l'indistinction entre le local et l'infinitésimal. Ainsi, si l'on trouve sous la plume de nos auteurs le terme de « voisinage », on aurait tort d'y lire ce que nous y mettons aujourd'hui. On le voit en constatant que souvent les termes « voisins » et « infiniment voisins » sont le plus souvent employés indifféremment, de même que « voisinage » et « voisinage immédiat ». La frontière entre le « suffisamment petit » du voisinage et l'« infiniment petit » typique du point de vue infinitésimal, frontière que les formalismes algébriques modernes, par exemple, permettent de saisir en toute clarté, est invisible. Ainsi dans le cours de Carl Neumann sur la théorie riemannienne des fonctions abéliennes<sup>13</sup> peut-on lire qu'un point voisin du point  $z$  est  $z+dz$  ... on imagine mal comment, dans ce cadre, distinguer la continuité de la dérivabilité ! Si le partage est fait en Analyse à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle entre le local et l'infinitésimal, l'ancien mode d'écriture perdue dans d'autres secteurs des mathématiques ou en physique : il suffit de lire les travaux d'Elie Cartan dans les années 1920 pour s'en convaincre. En un sens, le rabattement du local sur l'infinitésimal est une réponse à la difficulté qu'il y a d'assigner une taille, une extension définie, à la notion de voisinage : le voisinage d'un point, ça n'a pas de taille définie, on sait simplement que c'est « petit ». A cette difficulté, Weierstrass répond autrement, en remplaçant « au voisinage » par « sur un voisinage » : là où « au voisinage » désignait un type d'étude et non un type de domaine, « sur un voisinage » désigne un *type* de domaine, type dont l'infinité des représentants particuliers rend compte de l'inassignabilité *du* voisinage.

#### b. La fin du monde de la grandeur.

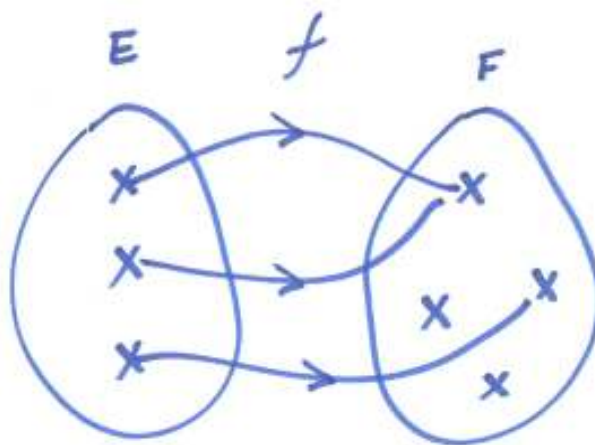
Nous reprenons ici le beau titre de M. Epple<sup>14</sup>, sans toutefois mettre la même chose dessous. On saisira peut-être mieux cette insertion du monde pré-

<sup>12</sup> Bourbaki N. *Algèbre Commutative* (chapitres 1 à 4). Paris : Masson, 1985.

<sup>13</sup> Neumann C. *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelschen Integrale*. Leipzig : Teubner, 1865, p.16.

<sup>14</sup> "Die Ende der Grössenlehre" cf. Epple M. « *The End of the Science of Quantity* : Foundations of Analysis, 1860-1910 », in H-N. Jahnke (ed.), 2003, p.291-324.

weierstrassien en Analyse dans le monde de la grandeur en l'opposant à un modèle purement ensembliste (Fig. 3) :



Ici interviennent deux types d'entités : d'une part des ensembles, l'un source, l'autre but, dont la déclaration est obligatoire (par opposition au domaine comme horizon) ; d'autre part une fonction qui est un objet de deuxième niveau, un objet-relation : la fonction, c'est le système des flèches. A ce niveau de généralité, les saisies ponctuelles et globales sont à la fois obligatoires pour constituer une fonction, et seules possibles (en l'absence, par exemple, de structure topologique) : point de vue universellement ponctuel, sur un domaine déclaré. La fonction est définie par l'image de chaque point du domaine source, ce qui permet aussi de transporter des parties du domaine source (d'où, par exemple, la notion d'ensemble image), ou bien des couples de points du domaine source (comme dans la définition de la croissance, lorsque E et F sont ordonnés). Historiquement, ce mode de description de l'univers fonctionnel se met en place dans les années 1870 autour de Weierstrass (bien sûr pas sa description graphique par patates et flèches !), fruit d'un mouvement séculaire que nous ne pouvons décrire ici, et dans lequel la notion de fonction *arbitraire* et les exemples de fonctions *pathologiques* jouent un rôle essentiel. Notons que la fonction n'est pas ici si arbitraire qu'elle ne soit soumise à aucun axiome : chaque élément de l'ensemble source doit avoir une image et une seule ; cet axiome, qui distingue les applications parmi les relations, instaure d'emblée une dissymétrie entre E et F qu'on ne retrouve pas dans le monde de la grandeur.

Si, par contraste, on lit ce qu'écrivent des auteurs tels que Euler, Lagrange, Lacroix, Cauchy, Serret, Neumann ou d'autres lorsqu'ils introduisent le terme de fonction, on se fait une image bien différente. La notion primitive n'est bien sûr pas celle d'ensemble mais celle de grandeur, dont il existe deux sortes, les grandeurs constantes et les grandeurs variables ; les grandeurs variables n'ont pas

un domaine (un intervalle de la droite réelle, une partie du plan complexe), mais un type (réel ou complexe), le domaine demeurant un horizon. Par sa nature même, une grandeur variable est susceptible (1) de prendre une valeur particulière, mais elle n'est pas elle-même la collection des valeurs particulières, elle est de nature générique ; (2) de croître ou de décroître (ou, dans le plan complexe, de parcourir un chemin) ; (3) de tendre vers une valeur particulière ou vers un état limite – tel l'infini. On voit que les notions de variation et de limite qui, pour nous, nécessitent deux séries de grandeurs – elles expriment un type de lien entre les valeurs de la variable et les valeurs de la fonction – ne nécessitent ici qu'une unique grandeur, elles sont de nature pré-fonctionnelle. Elles sont, en un certain sens, primitives, inexprimables mathématiquement bien que fondamentales dans les mathématiques.

Dans ce cadre, les fonctions s'invitent lorsqu'on considère plusieurs grandeurs variables, disons deux. Deux grandeurs variables sont soit indépendantes (et l'histoire s'arrête là), soit liées : la situation fondamentale est  $f(x,y) = 0$ , où  $x$  et  $y$  sont des grandeurs variables et  $f$  une fonction de ces deux variables ; dans cette situation, on peut considérer que  $x$  est la variable libre et  $y$  la variable liée, autrement dit considérer  $y$  comme *fonction de  $x$* . Une série de remarques s'impose. Premièrement on voit que le cas général est celui de la fonction implicite, les fonctions étant parfois explicites lorsque dans la relation  $f(x,y) = 0$  on peut isoler l'une des deux grandeurs variables dans un membre de l'égalité. Deuxièmement, les rôles de  $x$  et  $y$  sont *a priori* symétriques. Troisièmement, il n'y a pas d'objet-fonction, il n'y a qu'un *point de vue fonctionnel* sur une situation de dépendance entre grandeurs variables. D'où l'absence de démonstration d'existence fonctionnelle : on ne démontre pas l'existence d'un point de vue, on ne peut que discuter de sa pertinence. De plus, en l'absence de condition d'univocité, un grand nombre des résultats que nous regardons comme des théorèmes d'existence fonctionnels sont vus comme des résultats d'unicité. Quatrièmement, on ne pourra parler de la « fonction  $y$  », on ne pourra parler que de la « fonction  $y(x)$  »,  $y$  seul renvoyant à une grandeur variable, qui ne devient fonction que lorsqu'on la considère comme fonction d'une grandeur qui lui est liée. Enfin la relation de dépendance entre deux grandeurs variables peut contenir des grandeurs constantes, on peut ainsi parler de *la primitive* : si  $y'$  est connue comme fonction de  $x$ , sa fonction primitive est fonction de la grandeur variable  $x$  et d'une grandeur constante additive arbitraire. On parlera de même de *la solution* d'une équation différentielle. Dans ce cadre, deux types de *tâches* se présentent : (1) représenter  $y$  au moyen de  $x$  (2) étudier le cours de  $y$ . C'est sur ce deuxième point que nous voulons insister, le premier étant un héritage du XVII<sup>e</sup> siècle. Au XIX<sup>e</sup> siècle revient systématique sous la plume des auteurs la notion de *cours*, de *marche* de la fonction, *Verlauf* en Allemand. Étudier la dépendance de deux grandeurs variables sous l'angle fonctionnel, c'est étudier en quoi leurs *variations* sont dépendantes,



c'est mener l'étude des co-variations. On retrouve ainsi deux des voies d'entrée fondamentales dans le monde des fonctions : (1) passer de la relation  $f(x,y) = 0$  entre les grandeurs, à la relation  $f'_x dx + f'_y dy = 0$  liant de nouvelles grandeurs variables, les accroissements  $dx$  et  $dy$  ; (2) étudier, dans le plan complexe, le chemin parcouru par  $y$  connaissant le chemin parcouru par  $x$  (problème de la monodromie). On peut montrer, mais ici n'est pas le lieu, tout ce qui sépare une approche ensembliste entre domaine donné comme ensemble et auquel est associé un ensemble image, et domaine vu comme un horizon dont la saisie totale demande qu'il soit parcouru indéfiniment par la grandeur variable.

### Perspectives pédagogiques.

#### a. Trois pistes.

Pour ce dernier temps de l'exposé, tournons le regard vers l'avenir. Autant ce que nous venons de présenter, parfois plus rapidement qu'il ne le faudrait, résume un travail déjà fait et qui donnera lieu à publication, autant nous voudrions à présent évoquer des travaux en cours et des pistes de prolongement. Mentionnons des pistes d'ingénierie et de dialogue avec la Didactique.

- Recherche de contre-exemples graphiques : nous en donnions une série d'exemples dans la première partie. Le travail sur le lien entre  $f'(2)$  et  $f(2)$  (énoncés 3 et 4) a fait l'objet d'une première expérimentation en classe de Premières S et ES spécialité maths, à une échelle ne permettant toutefois pas encore de tirer des conclusions. Notons que cette liste d'énoncés fournit un noyau autour duquel différents types de séances peuvent être mises en œuvre, à plusieurs niveaux d'enseignement. Ainsi la recherche de contre-exemples graphiques peut-elle être l'objectif final en classe de Première. Les énoncés 1, 2, 5 et 6 peuvent donner lieu à un débat scientifique, les premiers pour mettre en place la notion de voisinage et la dialectique entre « au voisinage » et « sur un voisinage », les derniers pour conjecturer la nature des domaines sur lesquels ils semblent valides. En cycle terminal de Lycée on peut s'arrêter au niveau de la conjecture, alors que la recherche d'une démonstration (ou d'éléments de démonstration) peut être un moyen d'entrer dans une Analyse plus ensembliste et formelle dans le Supérieur. En réfléchissant à ce type de séances, nous rencontrons le concept de « niveau *méta* » proposé par les didacticiens<sup>15</sup> : les adjectifs tels que « ponctuel », « local », « global » servent à classer les propriétés et les énoncés mathématiques en catégories de haut niveau, permettent de se repérer dans un univers de connaissances mathématiques dont la croissance finit par nécessiter des éléments

---

<sup>15</sup> Baron M. & Robert A. (eds.), *Métaconnaissances en IA, en ELAO et en Didactique des Mathématiques*, Cahier DIDIREM spécial. Paris : IREM Paris 7, 1993 ; Praslon F. *Analyse de l'aspect Meta dans un enseignement de Deug A concernant le concept de dérivée. Etude des effets sur l'apprentissage* (Mémoire de D.E.A.). Paris : Université de Paris 7, 1994.

d'organisation explicite, signale des difficultés (du type : « attention, il y a ici passage du local au global et c'est en général hautement non trivial »), suggère des pistes de raisonnement (du type : « ce problème est de même nature que cet autre pour lequel je connais une démonstration astucieuse ... »). Nous retrouvons les questions abordées par les didacticiens, en particulier : les éléments *méta* doivent-ils être explicités pour l'enseignant afin d'éclairer ses choix pédagogiques ou doivent-ils aussi être explicités pour les élèves (la réponse peut bien sûr varier selon qu'on s'adresse à des Lycéens ou à des étudiants) ? S'ils sont à expliciter pour les élèves, l'usage systématique et contextualisé de termes relevant du niveau *méta* suffit-il pour en faire comprendre le sens et le rôle, ou ces termes doivent-ils, pour un temps au moins, devenir explicitement *objets* de l'enseignement ?

- Travail sur la notion de croissance et de décroissance des fonctions : la lecture, entre autres, du texte de Cauchy, nous a permis de proposer un série de formulations de la notion de croissance. Bien que toutes équivalentes en dernière analyse, ces formulations font jouer différemment les points de vue ponctuels, locaux et globaux ; elles font aussi alterner les formulations dans un registre cursif et dans un registre ensembliste ; elles jouent enfin sur la formulation de la quantification, pour contourner la difficulté que représentent pour les élèves les formulations avec double quantification universelle suivie d'une hypothèse d'ordre : « quels que soient  $a$  et  $b$  dans l'intervalle  $I$ , si  $a \leq b$  ... ». Des études empiriques montreraient sans doute combien cette définition de la croissance est non seulement peu comprise par les élèves mais, de fait, ne devient que très rarement une connaissance ne serait-ce que mobilisable. La distinction proposée par D. Tall et S.Vinner entre *concept image* et *concept definition*<sup>16</sup> nous semble ici utile : au cours de leur formation au Lycée les élèves se forment un *concept image* de la croissance, articulant différents registres sémiotiques (allure de courbe, tableau de variation et ses flèches, intuition cinématique) et différentes techniques/technologies (essentiellement le lien entre signe de  $f'$  et variations de  $f$ ) ; malheureusement, cette image du concept ne semble que rarement recouvrir, ne serait-ce qu'à titre d'élément parmi d'autres, la définition donnée dans un cadre purement numérique et ponctuel. Cet écart entre *concept image* et *concept definition* est aussi essentiel dans le cas de la continuité, et on trouve de nombreux éléments pour approfondir ce point dans notre travail d'Histoire.
- Mise en place de la structure syntaxique « la fonction est [*propriété*] sur [*domaine*] », distinction entre deux mondes fonctionnels, un monde de la grandeur variable dans lequel on parle de « fonction *de* », un monde ensembliste dans lequel on parle de « fonction *sur* ». Le travail d'Histoire nous a permis de prendre un peu de recul permettant de mettre en évidence certaines ambiguïtés de l'introduction de la notion de fonction en classe de Seconde, introduction qui joue, sans peut-être s'en rendre compte, sur deux tableaux aux structurations sémiotiques et conceptuelles sensiblement différentes. Cette

<sup>16</sup> Tall D.& Vinner S. « Concept Image and Concept Definition in mathematics, with particular Reference to Limits and Continuity ». *Educational Studies in Mathematics*, 1981, vol.12 (2), p. 151-169.

mise en perspective historique permet, par exemple, de revenir sur la question délicate du « domaine de définition ». En classe de Seconde est introduite une notion *composite* de fonction combinant des éléments qu'on peut considérer comme étrangers, à savoir une fonction *arbitraire* donnée sur un *domaine de définition* dont la déclaration est obligatoire. On pourrait envisager de distinguer les notions de domaine de définition et de domaine d'étude : les domaines d'études sont ceux qui apparaissent dans les formulations du type « la fonction est [*propriété*] sur [*domaine*] », tout domaine inclus dans un domaine d'étude étant un domaine d'étude possible. On peut convenir de nommer domaine de définition un domaine d'étude fixé au départ, et auquel renvoient implicitement les énoncés tronqués de la forme « la fonction est [*propriété*] ». Historiquement, la notion de domaine de définition est associée non pas à la fonction arbitraire mais, bien au contraire, à la fonction analytique : cette dernière possède un domaine *naturel* et maximal, son domaine d'holomorphic dans le cas complexe ; de Dirichlet<sup>17</sup> à Weierstrass<sup>18</sup>, l'association entre fonction analytique et domaine défini est omniprésente, alors que pour les fonctions arbitraires le domaine d'étude est librement choisi. Un autre point mis utilement en perspective par le travail d'Histoire sur les mondes ensemblistes vs des grandeurs est celui de la persistance d'éléments du monde des grandeurs dans le monde ensembliste, sous forme de *métaphores* :  $x$  croît ...,  $y$  tend vers ... . Les travaux d'Histoire de l'enseignement de l'Analyse<sup>19</sup> permettent de voir l'évolution du statut épistémologique d'un même énoncé, depuis l'énoncé théorique de plein droit jusqu'à la simple métaphore qu'on ne s'autorise qu'à l'oral. Le travail actuellement mené par le groupe IREM / INRP des Pays de Loire<sup>20</sup> sur l'enseignement de l'Analyse en France au XX<sup>e</sup> siècle apportera certainement de grandes lumières sur ces points.

#### b. Remarques conclusives

Nous finirons sur quelques remarques générales sur la mise en perspective historique et le thème de la multiplicité des points de vue.

Nous partions d'une intuition un peu brute, fondée sur nos expériences personnelles, de l'importance de la multiplicité des points de vue sur un même objet ; en particulier, du plaisir qu'il y a à découvrir un nouveau point de vue sur un objet usuel que l'habitude a peu à peu privé de toute couleur. Il est inutile de

---

<sup>17</sup> Lejeune-Dirichlet G. « Sur la Convergence des Séries trigonométriques qui servent à représenter des Fonctions arbitraires entre des Limites données ». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1829, vol.4, p. 157-169.

<sup>18</sup> Weierstrass K. *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesungen gehalten in Berlin, 1888*. Leipzig : Teubner, 1988.

<sup>19</sup> Par exemple : Belhoste B., Gispert H., Hulin N. (eds.) *Les Sciences au Lycée, un Siècle de Réformes des Mathématiques et de la Physique en France et à l'Étranger*. Paris : Vuibert, 1996.

<sup>20</sup> Anne Boyé et Hélène Grenapin.

souligner ici combien notre fréquentation, comme historiens amateurs ou professionnels, des textes légués par les plus grands mathématiciens est pour nous une source essentielle de cette multiplication revivifiante des points de vue. Dans un premier temps, nous avons vu notre intuition confirmée par des travaux de didactiques abordant cette question de la diversité des points de vue sous l'angle spécifique de la *flexibilité cognitive*, montrant en particulier combien le manque de flexibilité cognitive est un obstacle fondamental à l'entrée dans l'Analyse telle qu'enseignée dans le Supérieur (Tall (ed.), 1991). Notre travail nous a depuis conduit à mieux distinguer deux moments : un moment de clarification par *distinction*, un moment de *mise en relation*. Les points de vue ponctuel, infinitésimal, local et global sont distinguables, on peut même chercher des structures mathématiques qui leurs sont associées ; il est arrivé que des mathématiciens rédigent des textes dans lesquels, sans démontrer de nouveaux résultats, ils explicitent ce qui différencie chaque niveau des autres<sup>21</sup> (Hadamard, 1921, Osgood, 1912) ; ces distinctions mathématiquement fondées peuvent faire ou non, choix didactique, l'objet d'explicitations *méta*. Mais cette possibilité abstraite de distinguer les niveaux renvoie au fait que, fondamentalement, la mathématique est saturée de relations les faisant communiquer : théorèmes de passage de l'infinitésimal au local – ainsi le théorème d'inversion locale –, théorèmes de passage de l'infinitésimal au global – ainsi le théorème reliant, sur un intervalle, le signe de  $f'$  aux variations de  $f$  –, théorèmes de passage du local au global – par exemple lorsqu'on démontre qu'une fonction continue (donc localement bornée) est bornée sur un intervalle fermé borné. On ne peut faire l'économie ni du moment de distinction abstraite ni du moment de mise en relation par des énoncés qui présentent la double difficulté pédagogique d'être souvent parfaitement évidents intuitivement et de nécessiter pourtant des démonstrations formelles difficiles à suivre pour l'étudiant. Pour que le théorème *et* sa démonstration prennent sens, il faut dépasser le constat d'évidence – qui constitue toutefois un premier moment autonome – en montrant que l'énoncé met en relation des niveaux distincts ; qu'il y a donc là quelque chose de non trivial à établir. L'étude de démonstrations fausses données par les plus grands mathématiciens peut servir à prendre la mesure de cette non trivialité.

La mise en perspective par l'Histoire permet aussi d'éclairer les choix didactiques en faisant mieux sentir le partage du nécessaire et du conventionnel. Le travail particulier que nous menons permet, nous semble-t-il, de souligner combien des notions « élémentaires » et « naturelles » comme celle de fonction (comme correspondance univoque arbitraire), de domaine de définition, de croissance, de maximum, etc. ont de *conventionnel*, ce qui ne signifie pas, loin de là, *arbitraire* : leur caractère élémentaire et naturel est le fruit d'une Histoire, dont

---

<sup>21</sup> Hadamard J. « L'Oeuvre Mathématique de Poincaré ». *Acta Mathematica*, 1921, vol. 38, p.203-287 ; Osgood W.F. *Lehrbuch der Funktionentheorie* (2<sup>ème</sup> édition). Leipzig : Teubner, 1912.

les transpositions didactiques ne sont qu'un élément tardif. En amont, des réorganisations massives de la façon dont les mathématiciens font et écrivent les mathématiques font émerger des points de vue au premier plan, relèguent d'anciennes formulations légitimes au rang de métaphores, sans toutefois les faire disparaître ni même chercher à les faire disparaître ... changement de statut n'est pas disparition, réorganisation structurelle n'est pas *tabula rasa*. En deçà des transpositions, les mathématiciens nous livrent un monde mathématique feuilleté en concepts et points de vue, au sein duquel ils savent naviguer : flexibilité cognitive comme geste professionnel. L'explicitation de quelques-uns de ces feuillets, et du mouvement historique qui les fait jouer les uns contre les autres, permet de formuler peut être plus clairement des choix d'enseignement. Ainsi il n'est mathématiquement pas nécessaire d'exiger des fonctions qu'elles soient univoques, ou qu'un domaine de définition leur soit systématiquement associé : on peut faire un autre choix, mais les enchaînements démonstratifs, les priorités entre notions, les registres de formulation, etc. en seront modifiés. Le caractère partiellement conventionnel de ces définitions interdit, par exemple, qu'elles émergent d'une situation a-didactique : elles sont des réponses qui ont été jugées, provisoirement, les meilleures, à un problème posé aux mathématiciens par l'ensemble des mathématiques ; elles ne sont pas une connaissance fournissant la meilleure réponse à un problème particulier. La convention peut être pertinente, elle n'est ni vraie ni fausse. La distinction, par contre, en propriété ponctuelle, infinitésimale, locale et globale, n'est pas conventionnelle ; à ce titre, elle peut émerger d'une situation a-didactique de formulation.

Plus généralement, nous souhaitons souligner l'intérêt d'une démarche macro-historique procédant par idéaux-types. Il nous semble par exemple important de comprendre que l'approche par les grandeurs, tout en étant radicalement distinguable d'une approche statique et ensembliste, est elle aussi compatible avec un projet de numérisation de l'analyse au sens que nous donnions à ce terme dans la deuxième partie de la conférence ; numérisation qui s'oppose elle-même à une analyse symbolique, procédurale et formelle, une analyse fondée sur le signe, et trouvant son fondement épistémologique dans l'idée d'une liaison entre signes reflétant les liaisons entre concepts (par exemple (Panza & Ferraro, 2003)). Des types-idéaux sémiotiquement et rationnellement fortement structurés ne sont pas, au contraire, des types clos : la mise au jour d'une structuration forte permet d'identifier à la fois les solidarités qui nouent les éléments d'un système et les points de tension porteurs de dépassement.

## BIBLIOGRAPHIE

Les travaux du groupe IREM/INRP de Paris 7 sont à paraître en 2006-2007.

BARON Monique & ROBERT Aline (eds.). *Métaconnaissances en IA, en EIAO et en Didactique des Mathématiques*, Cahier DIDIREM spécial. Paris : IREM Paris 7, 1993.

BELHOSTE Bruno, GISPERT Hélène, HULIN Nicole (eds.). *Les Sciences au Lycée, un Siècle de Réformes des Mathématiques et de la Physique en France et à l'Étranger*. Paris : Vuibert, 1996.

BOURBAKI Nicolas. *Algèbre Commutative* (chapitres 1 à 4). Paris : Masson, 1985.

CANTOR Georg. « Notiz zu dem Aufsatz : Beweis, dass eine für jeden reellen Wert von  $x$  durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion  $f(x)$  sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1871, vol. 73, p.84-86.

CAUCHY Augustin-Louis. *Analyse Algébrique*. Paris : Jacques Gabay, 1989.

CAUCHY Augustin-Louis. *Œuvres Complètes* tome 16. Paris : Gauthiers-Villars, 1882-1974.

CHORLAY Renaud. « Fonctions Implicites : de la Notion au Théorème » , *Mnémosyne*, 2003, n° 18, p.15-58 .

DARBOUX Gaston. « Sur un Théorème relatif à la Continuité des Fonctions », *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, 1872, vol.3, p.307-313.

DIDIREM *Actes de la Journée en Hommage à Régine Douady* (14 juin 2001). Paris : IREM Paris 7, 2002.

DUGAC Pierre. *Histoire de l'Analyse*. Paris : Vuibert, 2003.

EPPLE Morritz. « The End of the Science of Quantity : Foundations of Analysis, 1860-1910 ». in H-N. Jahnke (ed.) *A History of Analysis*. New-York : AMS, 2003, p.291-324.

GISPERT Hélène. « Sur les Fondements de l'Analyse en France ». *Archive for History of Exact Sciences*, 1983, vol.28, p.37-106.

HADAMARD Jacques. « L'Oeuvre Mathématique de Poincaré ». *Acta Mathematica*, 1921, vol. 38, p.203-287.

JAHNKE Hans-Niels (ed.). *A History of Analysis*. New-York : AMS, 2003.

LACROIX Silvestre-François. *Traité Élémentaire de Calcul Différentiel et Intégral* (tome I). Paris : Gauthiers-Villars, 1867.

LEJEUNE-DIRICHLET Gustav. « Sur la Convergence des Séries trigonométriques qui servent à représenter des Fonctions arbitraires entre des Limites données ». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1829, vol.4, p. 157-169.

MASCHIETTO Michela. *L'Enseignement de l'Analyse au Lycée : les Débuts du Jeu Global/Local dans l'Environnement des Calculatrices* (Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle). Paris : Université Paris 7, 2002.

NEUMANN Carl. *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelschen Integrale*. Leipzig : Teubner, 1865.

OSGOOD William Fogg. *Lehrbuch der Funktionentheorie* (2<sup>ème</sup> édition). Leipzig : Teubner, 1912.

PANZA Marco & FERRARO Giovanni. « Developing into Series and returning from Series : A note on the Foundations of 18<sup>th</sup> century Mathematics ». *Historia Mathematica*, 2003, vol.30, p.17-46.

PRASLON Frédéric. *Analyse de l'aspect Meta dans un enseignement de Deug A concernant le concept de dérivée. Etude des effets sur l'apprentissage* (Mémoire de D.E.A.). Paris : Université Paris 7, 1994.

TALL David (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Boston : Kluwer, 1991.

TALL David.& VINNER Shlomo. « Concept Image and Concept Definition in mathematics, with particular Reference to Limits and Continuity ». *Educational Studies in Mathematics*, 1981, vol.12(2), p. 151-169.

VOLKERT Klaus. « Die Geschichte der pathologischen Funktionen ». *Archive for History of Exact Sciences*, 1987, vol.37(1), p.193-232.

WEIERSTRASS Karl. *Mathematische Werke Bd. 7: Vorlesungen über Variationsrechnung*. Leipzig : Akademische Verlag, 1927.

WEIERSTRASS Karl. *Einleitung in die Theorie des analytischen Funktionen. Vorlesungen, Berlin 1878*. Braunschweig : D.M-V. / Vieweg, 1988.

WEIERSTRASS Karl. *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre. Vorlesungen gehalten in Berlin, 1888*. Leipzig : Teubner, 1988.