Le principe de position dans les textes mathématiques cunéiformes

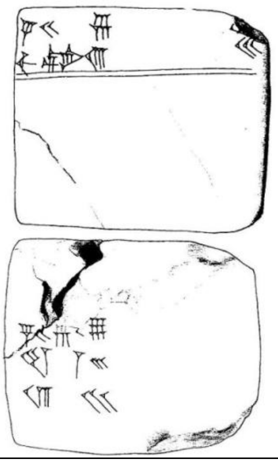
Epoque paléo-babylonienne (env. 2000-1700)

Christine Proust – Séminaire SAW 6 janvier 2012

Disposition des nombres sur la surface écrite

- Style texte : écriture justifiée. Les espaces entre nombres ou entre chiffres n’ont pas de signification mathématique. Exemple : Ist Ni 10241 face
- Style algorithme : écriture en colonnes. Les espaces entre nombres ont une signification mathématique (apparition de sous-colonnes qui montrent les principes sur lesquels repose l’algorithme). Exemple : Ist Ni 10241 revers. revers.

Ist Ni 10241

	**Obverse** 4.26.40 its reciprocal 13.30 **Reverse** 4.26.40 9 41[sic] 1.30 13.30

D’une façon générale, le principe de position dans la numération ne se traduit pas par des dispositions particulières sur la surface écrite. La seule exception à ma connaissance est la tablette néo-sumérienne YBC 1793, où les chiffres sexagésimaux occupant la même position sont placés les uns sous les autres. Même dans les cas où une position intermédiaire est vide, il est rare à l’époque OB que cette absence soit représentée par un espace (une des exceptions est la tablette Plimpton 322).
L’exploitation du principe de position dans le calcul effectif a laissé peu de trace écrite. Le calcul proprement dit (multiplications essentiellement) était probablement effectué en dehors du texte écrit. Il faut donc imaginer une sorte d’abaque. On a des indices forts de son existence (les plus importants viennent des erreurs de calcul, par exemple le fait qu’une erreur intervenant dans une liste ou une table ne se propage pas), mais on n’a aucune indication sur son fonctionnement.

Principe de position dans la numération

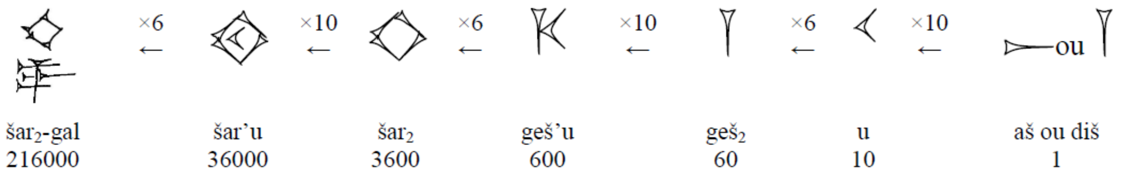
Deux points importants :

1) L'usage du principe de position dans la numération ne se trouve que dans les textes mathématiques (ou presque – je laisse de côté les exceptions telles que YBC 1793 cité plus haut – voir le programme de recherche sur les « nombres marginaux » dans les textes administratifs).

2) Dans les textes mathématiques, on ne trouve pas que des nombres positionnels. On trouve aussi d'autres systèmes numériques de principe non positionnel, par ailleurs très largement utilisés dans les textes administratifs, commerciaux et autres.

Nombres non positionnels :

Plusieurs systèmes différents sont utilisés en fonction de la nature de ce qui est décompté (capacités, surfaces, dénombrements, etc.). Cependant, l'un d'entre eux est très largement dominant : c'est un système de principe additif et de structure sexagésimale, dit « système S » :



Le système S est utilisé pour :

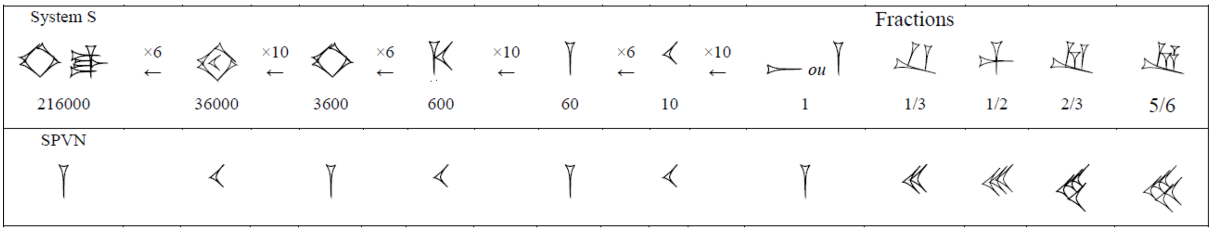
- Le compte de presque toutes les unités de mesure (sauf quelques unités de capacité et une unité de surface)
- Les dénombrements (compte des années, des briques, des tablettes, des problèmes, etc.)

Exemples : nombre d'années (SKL) ; capacité en gur (liste métrologique)
Format
nombre + unité de mesure
ou
nombre + items
ou
item + nombre

Nombres positionnels

Exemple : la table de 9
- Base 60
- Principe de position
- Notation flottante

Les deux graphèmes du système positionnel (et) sont empruntés du système S.



Le système S et la notation positionnelle coïncident pour les nombres entre 1 et 600. En conséquence, il est souvent impossible de distinguer les deux systèmes par la seule graphie. Il faut alors examiner au cas par cas pour savoir dans quel système on se trouve. La présence de fractions ou du signe gesh'u dans des contextes analogues permet souvent de trancher. En fait, les règles d'usage de l'un ou l'autre système étant très précises, comme on le verra, il est rare qu'il y ait vraiment ambigüité.

Problèmes

Neugebauer (MCT: 2) pense que la notation flottante (« flexibilité de la notation ») est un avantage pour les multiplications et l'inversion :

> *It is perhaps no out of place to emphasize that the ambiguity in the Babylonian writing of numbers is by no means a disadvantage. Just as we multiply 0.0325 by 73.20, or 3.25 by 0.732, or 325 by 732 in exactly the same way, a sexagesimal computation can be carried out regardless of the place-value, which can be determined at the end in the same way as we determine the place of the decimal point. A reciprocal table*
>
> 2 30
> 3 20
> 4 15
>
> *etc. can be used for all possible orders of magnitude: the reciprocal of 2 is 0;30, but 0;2 is the reciprocal of 30, and 0;0,2 the reciprocal of 30,0, etc. There would be no point in assigning a definite order of magnitude to these numbers. The flexibility of the numerical notation is one of the most significant features of Babylonian mathematics and perhaps constituted the most important element for further development.*

Néanmoins, il pense, quoique avec précaution, que la restitution des ordres de grandeur peut être souhaitable. Cette restitution intervient par la notation d'une séparation (un « ; ») entre les entiers et les fractions sexagésimales. Neugebauer (*ibid*) insiste sur le fait qu'il s'agit d'un acte d'interprétation, qui ne peut intervenir que dans les traductions et les commentaires.

> *Only when we explicitly wish to separate integer from fractions do we introduce the symbol ";" as a mark of separation; thus, we write 1;20 for 1 1/3. The use of this sign always implies an interpretation of the text and therefore will be found only in our translations and commentaries, never in the transcriptions.*

Quoiqu'il en soit, Neugebauer ne se demande pas comment, concrètement, les ordres de grandeurs qui lui paraissent souhaitables de restituer, étaient gérés par les anciens scribes. A mon sens, et c'est ce que je vais essayer de démontrer, une partie des réponses aux questions concernant le calcul ancien se trouve dans les tables métrologiques. En conséquence, je vois un lien entre le fait que Neugebauer ait évacué la question des pratiques anciennes en matière de gestion des O de G, et le fait qu'il ait écarté les tables métrologiques de son champs d'études (MKT : 4-5) :

> *Dans ce qui suit les textes purement métrologiques ne sont pas inclus en dépit du fait qu'historiquement ils forment un tout avec les tables numériques. Cela a sa raison dans le fait que il aurait alors été nécessaire* […] *de prendre en compte* ***un matériel textuel*** *très vaste* ***qui*** *cependant****, pour l'histoire de la mathématique au sens étroit, n'apporte aucune sorte de résultat.***
>
> *(Im Folgenden sind trotz dieser geschichtlich bedingten engsten Zusammengehörigkeit die rein metrologischen Texte nicht aufgenommen. Dies hat seinen Grund darin, daß es sich dann als notwendig erwiesen hätte* [...] *ein ganz ungeheuer umfangreiches Textmaterial mit aufzunehmen das aber für die Geschichte der Mathematik im engeren Sinne keinerlei Ergebnis abwirft.)*

La position de Neugebauer sur la nécessité de restituer les O de G dans les interprétations a été largement suivie par les spécialistes qui lui on succédé, mais sa prudence n'a pas toujours été partagée (on voit parfois intervenir des O de G dans les translittérations). Une subtilité est introduite par Hoyrup : les O de G ne sont pas notés, mais ils constituent une sorte de « savoir silencieux » qui doit rester présent à l'esprit (du lecteur moderne, en écho au lecteur ancien).

Hoyrup (LWS: 12)

> ***In translations it is convenient to indicate the order of magnitude*** *(or, if this cannot be determined with certainty, to choose a coherent, plausible order of magnitude).*
>
> […]
>
> *In the following I shall follow Thureau-Dangin's notation, omitting, however, the sign 0 when it is not needed as a separator. 1`40 thus stands for 100, 1``40` for 6000, 1°40 for 1 2/3 , and 1'40" for 1/36. In order to keep as close as possible to the situation of the Babylonian calculator, the reader should pronounce it in all cases as "one-forty",* ***keeping the order of magnitude as silent knowledge.***

Le principal problème soulevé par ces citations est qu'elles mélangent deux problèmes : celui des ordres de grandeur, et celui du calcul positionnel. Je vais montrer dans cet exposé que ces deux problèmes sont distincts, et correspondent à deux moments différents du calcul ancien. Le premier problème est lié à celui de l'interprétation des tables métrologiques ; le second problème est lié au fonctionnement de l'abaque.

Des questions sur l’ordre de grandeur des “nombres flottants” (oxymore ?)

1) La « Restitution des O de G » est-elle toujours « souhaitable », et même « pratique », dans les traductions et commentaires ?
2) Dans les cas où la restitution des O de G apparaît comme nécessaire au lecteur moderne, de quelle façon les O de G étaient-ils gérés par les scribes anciens ? Les O de G étaient-ils toujours présents à l’esprit des scribes, en particulier pendant les phases de calcul sur les nombres positionnels ?
3) Comment les notations induisent-elles implicitement des réponses aux questions précédentes ? Dans quelle mesure les évacuent-elles ?

Des nombres flottants pour des calculs flottants

Ma thèse est la suivante

1) Non, la restitution des O de G n’est pas toujours nécessaire dans les traductions et les interprétations. Les textes et contextes doivent être examinés au cas par cas.
2) Dans la plupart des cas, la restitution des O de G n’est pas souhaitable car elle fausse la compréhension du calcul ancien (et rend le calcul beaucoup plus compliqué).
3) Dans les cas où la restitution des O de G est nécessaire, l’usage des notations modernes (zéro, point-virgule, ou système degré – minute – secondes généralisé) évacue la question 2) ci-dessus, qui me paraît importante : de quelle façon les O de G étaient-ils gérés par les scribes anciens ?

Pour traiter ces problèmes, je vais me placer dans quelques contextes mathématiques particuliers :

- Les textes scolaires de Nippur, avec un focus sur les tables métrologiques
- Un texte de procédure de provenance inconnue (probablement du sud) : des situations de proportionnalité et des problèmes quadratiques.
- Un texte de séries de provenance inconnue (probablement du centre, fin OB) : ajouter des longueurs et des surfaces.

Un monde idéal, celui de l’école

Les maths des écoles constituent un monde cohérent, limité au champ multiplicatif et aux nombres réguliers, où les O de G n’interviennent pas dans la manipulation des nombres positionnels. L’addition et les « igi nu » ont été bannis.

Le curriculum à Nippur

(travaux de Veldhuis, Robson, Proust)
Niveau élémentaire = Suite ordonnée de listes et tables = listes et tables métrologiques, tables numériques.
Niveau intermédiaire : exercices de calcul (multiplications et inversions), calculs de surface et probablement de volume.
Niveau avancé : peu documenté. Dans les autres villes du sud, problèmes linéaires et quadratiques (voir texte de procédure un peu plus loin).

Probablement le même type de curriculum dans les autres villes du sud et du centre (Kish et Sippar). Le cas des villes du nord (Mari et le royaume d’Eshnunna) et de l’est (Suse) reste à examiner de plus près.

Conclusion : à l'école, tout tourne autour de

- La transformation des mesures en nombres positionnels et vice versa
- La multiplication / inversion des nombres positionnels réguliers
- L'utilisation des tables élémentaires pour le calcul des surfaces et des volumes.

Tables métrologiques

Friberg 1990-RlA, Mathematik: 543

> *A « metrological table » is a metrological list which contains not only the standard notations for the selected measures, but also* ***their values as multiples of a certain « basic unit ».*** (je souligne)

Cette idée d'unité de base dans les tables métrologiques en implique une autre, plus générale, à savoir que l'unité de compte pour les longueurs est le nindan, y compris dans les cas où le nom de l'unité n'est pas noté dans le texte cunéiforme:

> *The basic measure of horizontal distance is the nindan ("rod"), equal to c. 6 m. Mostly, this unit is not written* ***but remains implicit****.* [LWS: 17]

Les tables métrologiques sont-elles des tables de conversion? A mon sens, non, les tables métrologiques ne sont pas des tables de conversion d'une unité à une autre, mais des tables de transformation des mesures en nombres positionnels (abstraits).
Mes arguments sont basés sur la **notation** des nombres et leur **disposition** dans les tablettes scolaires.

- **Les** unités de mesure (ou les fractions) ne sont jamais notées dans la sous-colonne de droite.
- Les authentiques tables de conversion existent, exemple à Mari. Mais dans ces cas**, les nouvelles unités sont notées** !!!
- **D**ans les exercices scolaires, la nature des nombres notés dans la sous-colonne de droite des tables métrologiques apparaît clairement car elle est liée à une opération particulière, la multiplication (voir plus loin les exercices de calcul de surface).

Ni 18

2.10
2.10
4.26^{sic}.40

1/3 kuš$_{3}$ 3 šu-si ib$_{2}$-si$_{8}$
----
a-ša$_{3}$-bi [en-nam]
----
a-ša$_{3}$-bi 13 še
igi-4^{sic} gal$_{2}$ še-kam
==============

2.10
2.10
4.26^{sic}.40

1/3 kuš$_3$ 3 šu-si le côté (du carré).
Quelle est sa surface ?

Sa surface est 13 še 1/4^{sic} še.

2.10 × 2.10 = 4.41.40

1/3 kuš 3 šu-si → 2.10

calcul correct :
2.10 × 2.10 = 4.41.40
4.40 → 14 še
1.40 → 1/12 še

calcul du scribe :
2.10 × 2.10 = 4.26^{sic}.40
4.20 → 13 še
6.40 → 1/3 še

Les nombres sont répartis en deux zones :

Coin inférieur droit : mesures (données et résultat)
Coin supérieur gauche : nombres positionnels (multiplication).

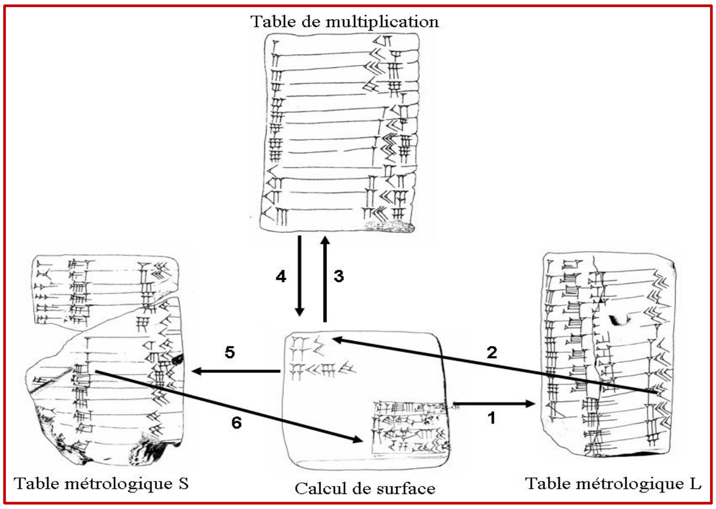
La structure du texte (répartition des nombres dans ces deux zones, et la correspondance entre ces zones), reproduit la structure des tables métrologiques.

SPVN multiplication

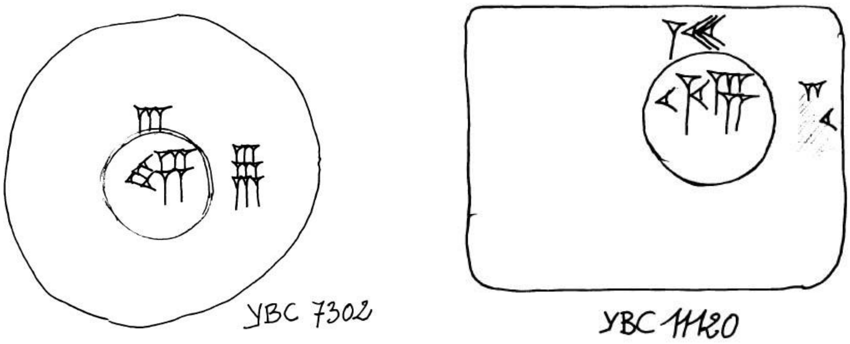
Data: measures of length

Answer: measure of surface

Ce type d'exercice arrive dans le curriculum juste après l'apprentissage des tables numériques et métrologiques. La disposition des nombres (mesures et SPVN) met en évidence la cohérence de l'ensemble des textes mathématiques élémentaires trouvés à Nippur.



Aire du disque



D’autres exercices de calcul de surface, noté sur des tablettes carrées ou ronde caractéristiques des exercices scolaires, ont été trouvés à Nippur et ailleurs. Ces exercices de géométrie se présentent souvent sous la forme de diagrammes accompagnés de nombres qui représentent les mesures linéaires (généralement notées à l’extérieur de la figure) et la surface correspondante (généralement notée à l’intérieur de la figure).
Ces deux exemples, de provenance inconnue, concernent le cercle. Sur ces diagrammes sont notés des nombres positionnels correspondant au périmètre (en haut), au carré du périmètre (à droite) et à la surface (dans le cercle). En général, dans les mathématiques cunéiformes, la surface du disque est obtenue en multipliant le carré du périmètre par 5.

(Explication entre nous) La relation entre le périmètre du cercle et la surface du disque est la suivante : (a = aire ; p = périmètre)

$$a = p^2 / 4\,\pi$$

Les scribes utilisaient généralement l’approximation $\pi \approx 3$:

$$a \approx p^2 / 12$$

Comme l’inverse de 12 est 5, on obtient :

$$a \sim p^2 \times 5$$

Il est notable ici qu’aucune unité de mesure n’est précisée. Doit-on interpréter le nombre 3 comme représentant un périmètre de 3 ninda ? Il n’y a aucun raison de le faire. Comme dans le cas des tables d’inverses souligné par Neugebauer, l’indétermination des nombres écrits sur la tablette donne une grande flexibilité au texte. La citation de Neugebauer au sujet des tables d'inverses donnée plus haut (MCT : 2) est ici parfaitement applicable : *"A reciprocal table* […] ***can be used for all possible orders of magnitude****: the reciprocal of 2 is 0;30, but 0;2 is the reciprocal of 30, and 0;0,2 the reciprocal of 30,0, etc. There would be no point in assigning a definite order of magnitude to these numbers."*

Par exemple, le texte YBC 7302 peut représenter **en même temps** toutes les situations suivantes, qui sont fournies par les tables métrologiques de longueur et de surface :

SPVN	3	45
Une tablette	½ kuš$_3$ 3 šu-si	2 ¼ še
Un petit jardin	3 ninda	2/3 sar 5 gin$_2$
Un palais	3 uš	1 (bur$_3$) 1 (eše$_3$) 3 (iku) gan$_2$
Un district	6 danna	1 (šar$_2$) 3 (bur'u) gan$_2$

Notons que, à partir d'une des lignes, les autres s'en déduisent facilement en remontant (resp. descendant) un cycle de 60 dans la table métrologique des longueurs, et en remontant (resp. descendant) deux cycles de 60 dans la table métrologique des surfaces.

Du monde idéal au monde mixte : YBC 4663

Il est probable que, très rapidement après le niveau intermédiaire, étaient abordés la résolution des problèmes linéaires et quadratiques. Rester dans le domaine de l'enseignement permet de continuer à profiter du caractère progressif et pédagogique des méthodes d'enseignement des mathématiques en Mésopotamie. Malheureusement, le niveau avancé de l'enseignement des mathématiques est peu documenté à Nippur, aussi faut-il se tourner vers d'autres sources et se résoudre à perdre le bénéfice de la grande cohérence du curriculum de Nippur.

A cause de sa forme et de son contenu, on peut penser que la tablette YBC 4663 a très probablement été utilisée pour l'enseignement des mathématiques à un niveau juste supérieur au niveau intermédiaire abordé ci-dessus. C'est un texte de procédures, contenant une liste de 8 problèmes résolus. Sa provenance est inconnue (probablement Mésopotamie du sud), et elle est conservée à Yale.

Cette tablette sert notre propos car on y voit apparaître une suite de 6 problèmes traitant de situations de proportionnalité, ne nécessitant pour les résoudre qu'une suite de multiplications et d'inversions, suivis de 2 problèmes quadratiques qui posent concrètement la question du repérage des positions sexagésimales.

Nous allons regarder de plus près les problèmes 4 et 7.

Problème multiplicatif : YBC 4663 #4

YBC 4663 #4

4 20. 9 gin$_2$ ku$_3$ ki-la$_2$ 5 ninda uš 1 1/2 ninda sag 10 <gin$_2$> sahar eš$_2$-gar$_3$ 6 še a$_2$-bi$^{!}$
21. bur$_3$-bi- en-nam za-e in-da-zu-de$_3$
22. uš sag gu$_7$-gu$_7$-ta 7.30 *i-na-di-ku* igi eš$_2$-gar$_3$ *pu-ṭu-ur*
23. *a-na* 7.30 *i-ši* 45 *i-na di-ku* 45 *a-na i-di i-ši*
24. 1.30 *i-na-di-ku* igi 1.30 *pu-ṭu-ur* 40 *i-na-di-ku*

25. 40 *a-na* 9 ku$_3$ *i-ši* 6 bur$_3$-bi *i-na-di-ku* 1/2 ninda bur$_3$-bi <*ki-a-am ne*$_2$*-pe-šu*>

20. 9 gin$_2$ l'argent (total) pour une tranchée. 5 ninda sa longueur, 1 1/2 ninda sa largeur. 10 gin$_2$ le volume assigné. 6 še (d'argent) le **salaire** (d'un ouvrier).
21. Sa profondeur combien ? Toi, pour le savoir :
22. la longueur et la largeur croise. 7.30 *te donnera*. L'inverse du volume assigné *dénoue*,
23. *à* 7.30 *élève*. 45 *te donnera*. 45 *au* ***salaire*** *élève*.
24. 1.30 *te donnera*. L'inverse de 1.30 *dénoue*. 40 *te donnera*.
25. 40 à 9, l'argent (total), *élève*. 6, la profondeur, *te donnera*. 1/2 ninda sa profondeur. *<Telle est la procédure.>*

#4

20. 9 gin$_2$ the (total expences in) silver for a trench. 5 ninda the length, 1 1/2 ninda the width. 10 (gin$_2$) the assigned volume. 6 še (silver) **the wage** (per worker).
21. Its depth how much ? In your procedure :
22. The length and the width cross. 7.30 *will be given to you. The reciprocal of the assigned volume detach*,
23. *to* 7.30 *raise*. 45 *will be given to you*. 45 *to the* ***wage*** *raise*.
24. 1.30 *will be given to you*. *The* reciprocal *of* 1.30 *detach*. 40 *will be given to you*.
25. 40 *to* 9, the (total expense in) silver *raise*. 6, the depth, *will be given to you*. 1/2 ninda its depth.

Données

argent	9 gin$_2$	→ 9	(table P)
longueur	5 ninda	→ 5	(table L)
largeur	1 1/2 ninda	→ 1.30	(table L)
volume assigné	10 gin$_2$	→ 10	(table S)
salaire	6 še	→ 2	(table P)

Demande : la profondeur

Procédure :

(pour nous)

argent (total) = salaire (d'un ouvrier) × nombre d'ouvriers

= salaire (d'un ouvrier) × (volume total / volume assigné (à un ouvrier))

= salaire × (longueur × largeur × profondeur) / volume assigné

donc

profondeur = argent / {[(longueur × largeur) / volume assigné] × salaire}

longueur × largeur	5 × 1.30 = 7.30	ligne 22
(longueur × largeur) / volume assigné	7.30 / 10 = 7.30 × 6 = 45	lignes 22-23
{[(longueur × largeur) / volume assigné] × salaire	45 × 2 = 1.30	ligne 23-24
argent / {[(longueur × largeur) / volume assigné] × salaire}	9 / 1.30 = 9 × 40 = 6	ligne 25

Réponse

profondeur	6	→ 1/2 ninda	(table Lh + évaluation de l'O d G)

Le schéma de calcul est le suivant :

mesures (énoncé) -> tables -> SPVN (calcul) -> tables -> mesures (réponse)

C'est-à-dire que :

1) Les données de l'énoncé (mesures des diverses grandeurs connues) sont transformées en nombres positionnels par l'usage des tables métrologiques. Il est notable que dans ces problèmes, toutes les tables interviennent (sauf celle des capacités, peu utilisée en mathématiques).
2) La procédure est une suite d'opérations sur les nombres positionnels obtenus dans l'étape 1. Le calcul consiste uniquement en multiplications et en divisions. Aucun repérage des positions sexagésimales n'est nécessaire : c'est du calcul flottant sur des nombres flottants.
3) Le résultat obtenu est une profondeur de 6. Cette profondeur est transformée en mesure par lecture inverse de la table métrologique des hauteurs (Lh). C'est là, et seulement là, que se pose la question de l'ordre de grandeur.

6	→ 1/2 ninda	(table Lh + évaluation de l'O d G)

La sélection de la mesure pertinente correspondant au nombre 6 ne présente aucune difficulté : le choix est entre 3 šu-si (env. 5 cm), ½ ninda (env. 3 m), 40 ninda (env. 240 m) et 1 danna (10,5 km) est évident.

Finalement le processus est le même que pour les calculs de surface (Ni 18) : mesure, transformation en nombres positionnels (table L), multiplications et divisions en calcul flottant, transformation du résultat en mesure (table Lh).

Le repérage des positions sexagésimales n'est pas nécessaire pour la conduite des calculs. Cependant, dans son interprétation, Neugebauer restitue les marques d'O de G (MCT: 70) et donc perd de vue l'avantage qu'il avait pourtant souligné (MCT : 2).

4 [20]9 gín is the (total expenses in) silver of a ki-lá, 5 GAR the length, 1½ GAR the width, 10 (gín) volume the assignment, 6 še (silver) the wages.
[21]What is its depth? When you perform (the operations),

[22]multiply together the length (and) the width, (and) you will get 7;30; take the reciprocal of the assignment,
[23]multiply by 7;30, (and) you will get 45; multiply 45 by the wages,
[24](and) you will get 1;30; take the reciprocal of 1;30, (and) you will get 0;40;
[25]multiply 0;40 by 9, the (total expenses in) silver, (and) you will get 6 (kùš), its depth. ½ GAR is its depth.

Intervention de l’addition : YBC 4663 #7

1. 9 gin$_2$ l’argent (total) pour la tranchée.
2. {L’argent d’une tranchée}. La longueur et la largeur j’ai ajouté : 6.30. 1/2 ninda sa profondeur.
3. 10 gin$_2$ la tâche assignée. 6 še (d’argent) le salaire (d’un ouvrier). La longueur et la largeur combien ?
4. Toi, pour le savoir : l’inverse de son salaire dénoue.
5. A 9 gin$_2$, l’argent, élève. 4.30 te donnera.
6. 4.30 à la tâche assignée élève. 45 te donnera.
7. L’inverse de la profondeur dénoue, à 45 élève. 7.30 te donnera.
8. La moitié de la longueur et la largeur que j’ai ajoutées coupe. 3.15 te donnera.
9. 3.15 avec lui-même croise. 10.33.45 te donnera.
10. 7.30 du cœur de 10.33.45 soustrais.
11. 3.3.45 te donnera. Son côté prends.
12. 1.45 te donnera. A l’un ajoute, de l’autre soustrais.
13. La longueur et la largeur te donnera. 5 ninda la longueur, 1 1/2 ninda la largeur.

7 0 9 gin$_2$ ku$_3$-babbar ki-la$_2$
1. ku$_3$ ki-la$_2$ uš *u*$_3$ sag gar-gar-ma 6.30 1/2 ninda [bur$_3$-bi]
2. 10 gin$_2$ eš$_2$-gar$_3$ 6 še a$_2$-bi uš sag-bi en-nam
3. za-e in-da-zu-de$_3$ igi a$_2$-bi *pu-ṭu-ur*
4. *a-na* 9 gin$_2$ ku$_3$-babbar *i-ši* 4.30 *i-na-di-ku-um*
5. 4.30 *a-na* eš$_2$-gar$_3$ *i-ši* 45 *i-na-di-ik-ku*
6. igi bur$_3$-bi du$_8$ *a-na* 45 *i-ši* 7.30 *i-na-di-ku*
7. 1/2 uš *u*$_3$ sag *ša* gar-gar-*ru he*$_2$*-pe* 3.15 *i-na-di-ku*
8. 3.15 gu$_7$-gu$_7$-ta 10.33.45 *i-na-di-ku*
9. 7.30 *i-na li-bi* 10.33.45 *u*$_2$*-su*$_2$*-uh*
10. 3.3.45 *i-na-ad-di-ik-ku* ib$_2$-sa$_2$-*šu le-qe*$_2$
11. 1.45 *i-na-di-ku a-na* DIŠ *ṣi*$_2$*-ib a-na* DIŠ* *hu-ru-uṣ*$_4$

12 uš sag *i-na-di-ku* 5 <ninda> uš 1 1/2 ninda sag

0. 9 gin$_2$ is the (total expenses in) silver for a trench.
1. The length and the width I added: 6.30. ½ ninda [its depth].
2. 10 gin$_2$ the assigned volume, 6 še (silver) the wage. The length and the width how much?
3. You, for knowing it. The reciprocal of the wage *detach.*
4. *To* 9 gin$_2$, the silver, *raise.* 4.30 *will be given to you.*
5. 4.30 *to* the assigned volume *raise*. 45 *will be given to you.*
6. The reciprocal of its depth detach. *To* 45 *raise.* 7.30 *will be given to you*.
7. ½ of the length *and* the sag *which I added break.* 3.15 *will be given to you.*
8. 3.15 cross itself. 10.33.45 *will be given to you.*
9. 7.30 *from* 10.33.45 *tear out*.
10. 3.3.45 *will be given to you. Its square root take.*
11. 1.45 *will be given to you. To the one append, from the other cut off.*
12. The length and the width *will be given to you*. 5 (ninda) the length, 1 ½ ninda the width.

Reverse

[1]9 (gín) is the (total expenses in) silver of a ki-lá; I added the length and the width, and (the result is) 6;30 (GAR); ½ GAR is [its depth],
[2]10 gín (volume) the assignment, 6 še (silver) the wages. What are the length (and) its width?
[3]When you perform (the operations), take the reciprocal of the wages,
[4]multiply by 9 gín, the (total expenses in) silver, (and) you will get 4,30;
[5]multiply 4,30 by the assignment, (and) you will get 45;
[6]take the reciprocal of its depth, multiply by 45, (and) you will get 7;30;
[7]halve the length and the width which I added together, (and) you will get 3;15;

Données

argent	9 gin_2	→ 9	(table P)
longueur + largeur		→ 6.30	(directement en nombre abstrait)
profondeur	1/2 ninda	→ 6	(table Lh)
tâche	10 gin_2	→ 10	(table S)
salaire	6 še	→ 2	(table P)

Inconnues

longueur ?
largeur ?

Lignes 1-1 : la procédure pour obtenir la surface de base est identique à celle des # précédents. Ligne 7, on trouve une surface de base (longueur × largeur) de 7.30. On est donc ramenés au problème de trouver la longueur et la largeur connaissant leur somme et leur produit.

Les données du problème sont alors :

longueur + largeur	→ 6.30
longueur × largeur	→ 7.30

Le problème qui se pose maintenant est le positionnement de la surface (7.30) par rapport à la somme des longueurs (6.30). En fait, tous les choix sont possibles, mais chacun des choix impose la position de l'unité de **calcul** par rapport au nombre qui représente 1 ninda.

Par exemple, choisissons la configuration suivante :

surface	→	7	30	
longueur + largeur	→		6	30

Pour positionner le nombre qui représente 1 ninda, on est obligé de supposer le problème résolu et de savoir que la longueur est 5 ninda et la largeur est 1 ½ ninda (remarque : quelle que soit l'interprétation adoptée, que ce soit celle de Neugebauer ou une autre, il y a toujours un moment où le choix du positionnement des nombres n'est possible que parce qu'on connaît la solution). On obtient les positionnements suivants :

surface	→	7	30	
longueur + largeur	→		6	30

1 ninda	→	1		
longueur	→	5		
largeur	→	1	30	

Pour que 7.30, le produit de 5 par 1.30, soit dans la position ci-dessus, il faut fixer la position des unités de compte (U) dans la colonne de droite, ce qui donne la configuration A.

A

				U
1 ninda	→		1	
longueur	→		5	
largeur	→		1	30
surface	→	7	30	
longueur + largeur	→		6	30

On peut aussi partir du positionnement suivant :

surface	→	7	30
longueur + largeur	→	6	30

Cela conduit à la configuration B :

B

		U	
1 ninda	→	1	
longueur	→	5	
largeur	→	1	30
surface	→	7	30
longueur + largeur	→	6	30

Toutes les autres combinaisons sont possibles.

C

		U			
1 ninda	→		1		
longueur	→		5		
largeur	→		1	30	
surface	→			7	30
longueur + largeur	→		6	30	

etc.

Ces différentes configurations de l'abaque représentent des situations géométriques différentes (déplacer une surface par rapport à une longueur revient en fait à affecter cette longueur d'une deuxième dimension de 1 ninda, ou 60 ninda, ou 1/60 ninda, etc.). Mais rien dans le texte ne permet de privilégier une situation par rapport à une autre. Le même texte inclut toutes ces situations.

Revenons à la procédure décrite dans le texte cunéiforme. Le calcul fonctionne aussi bien dans toutes les configurations ci-dessus. Donc la seule contrainte est le choix du positionnement relatif de 7.30, 6.30 et U. Tout le reste en découle.

Partons de la configuration A

	Texte	Opérations			U
7.	Coupe la moitié de la longueur et la largeur que j'ai ajoutées. Cela te donnera 3.15.	Moitié =		6 3	30 15
8.	Croise 3.15 avec lui-même. Cela te donnera 10.33.45.	Produit =	 10	3 3 33	15 15 45
9. 10.	Soustrais 7.30 du cœur de 10.33.45.* Cela te donnera 3.3.45.	Soustraction =	10 **7** 3	33 **30** 3	45 45
 11.	Prends son côté. Cela te donnera 1.45.	Racine carrée =	3	3 1	45 45
 12.	A l'un ajoute, de l'autre soustrais. Cela te donnera la longueur et la largeur.	Addition = Soustraction =		3 1 5 3 1 1	15 45 15 45 30

Autres solutions pour le positionnement

B

	Texte	Opérations		U		
7.	Coupe la moitié de la longueur et la largeur que j'ai ajoutées. Cela te donnera 3.15.	Moitié =		6 3	30 15	
8.	Croise 3.15 avec lui-même. Cela te donnera 10.33.45.	Produit =		3 3 10	15 15 33	 45
9. 10.	Soustrais 7.30 du cœur de 10.33.45.* Cela te donnera 3.3.45.	Soustraction =		10 **7** 3	33 **30** 3	45 45
 11.	Prends son côté. Cela te donnera 1.45.	Racine carrée =		3 1	3 45	45
 12.	A l'un ajoute, de l'autre soustrais. Cela te donnera la longueur et la largeur.	Addition = Soustraction =		3 1 5 3 1 1	15 45 15 45 30	

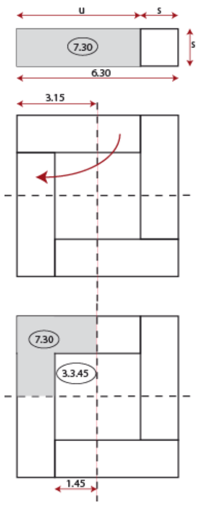
C

	Texte	Opérations	U				
7.	Coupe la moitié de la longueur et la largeur que j'ai ajoutées. Cela te donnera 3.15.	Moitié =		6 3	30 15		
8.	Croise 3.15 avec lui-même. Cela te donnera 10.33.45.	Produit =		3 3	15 15 10	 33	 45
9. 10.	Soustrais 7.30 du cœur de 10.33.45.* Cela te donnera 3.3.45.	Soustraction			10 **7**	33 **30**	45

	=			3	3	45
Prends son côté. 11. Cela te donnera 1.45.	Racine carrée =		 1	3 45	3	45
A l'un ajoute, de l'autre soustrais. 12. Cela te donnera la longueur et la largeur.	Addition = Soustraction =		3 1 5 3 1 1	15 45 15 45 30		

Conclusions :

1) **Rien n'oblige à choisir la position correspondant à 1 ninda pour unité de calcul.** On peut découpler unité de **mesure** en ninda et unité de **calcul.**
2) Exécuter le calcul ne nécessite que la détermination initiale (et contrainte) des positions sur l'abaque de quelques données minimales (ici la surface 7.30, la longueur 6.30, et l'unité de compte U).
3) Le problème de l'ordre de grandeur n'apparaît qu'à la fin du calcul, au moment où le résultat (5) doit être interprété comme une mesure de longueur (5 ninda – voir ligne 12).
4)



Remarque: on vient de voir que l'exécution du calcul ne nécessite pas un suivi mental des ordres de grandeurs des nombres posés sur l'abaque. Mais en même temps, ces nombres **représentent** des grandeurs. Les nombres et les opérations ont une signification géométrique qui permet de guider le calcul (voir l'oeuvre de Hoyrup).

Problèmes d'ordre de grandeur dans d'autres textes

Le dernier exemple montre le bénéfice qu'il y a à découpler les positions de l'unité de compte et du nombre qui représente 1 ninda.

L'exemple suivant est tiré d'un texte de série, c'est-à-dire d'une longue liste d'énoncés de problèmes écrite sur une suite de tablettes numérotées.

La solution de ces problèmes n'est pas donnée, mais tous ont la même solution : la longueur est 30 ninda et la largeur est 20 ninda.

YBC 4695 #26

26	8.	uš u_3 a-na uš ugu sag diri
	9.	15 ninda dah igi-⌈11⌉-gal_2-bi
	10.	a-$ša_3$ ⌈dah⌉-ma 15 uš dah-ma 35

Traduction

8. La longueur et ce dont la longueur excède la largeur
9. à 15 ninda j'ai jouté, son 11ème (j'ai pris)
10. (Tout cela) à la surface j'ai ajouté : c'est 15. (Tout cela) à la longueur j'ai ajouté : 35

8. The length and that by which the length exceeds the width
9. to 15 ninda I added, its 11th (I took).
10. (The result) to the surface I added: it is 15. (The result) to the length I added: 35.

Il s'agit (probablement) de ce qu'on appelle en langage moderne un système de deux équations à deux inconnues, qui pourrait être représente par (avec u = la longueur ; s = la largeur)

$[u + (u - s) + 15]1/11 + u\times s = 15$ (1)
$[u + (u - s) + 15]1/11 + u = 35$ (2)

Supposant le problème résolu, calculons l'expression $[u + (u - s) + 15]1/11$ (que dans la suite je désigne par P)

u	30	
s	20	
u – s	10	
15	15	
u + (u − s) + 15	55	
[u + (u − s) + 15]1/11	5	(P)

Supposons que le nombre représentant 1 ninda soit placé dans la position de l'unité de compte.

		U	
1 ninda		1	
u		30	
s		20	
u×s	10		
P		5	
P + u		35	(2) vérifié
P + u×s	10	5	(1) ne marche pas

Neugebauer, qui considérait que 1 ninda était bien l'unité, a été amené à des contorsions pour arriver au résultat 15 en ajoutant P et u×s.
MCT : 126 [Pour Neugebauer, *f* représente ce que j'ai appelé P, *A* la surface, *x* la longueur et *y* la largeur]

> « It follows from these equations that $f = 5$ and $A = 10$, but not $A = xy = 10,0$, as one would at first sight interpret the term "area" according to (1) [$x = 30$ $y = 20$].

> The present text is not the first to use this peculiar terminology; exactly the same usage occurs in YBC 4695. A comparison of the two texts shows, however, that the ambiguity in terminology is not at great as one would suppose. Whereas texts in which "area" (a-ša$_3$) denotes the product xy = 10,0 always start with the word "The area is 1 ešè", no such sentence occur in the present text or in YBC 4695. The reason is clear: an area measuring 1 ešè **must** be interpreted as an area of 10,0 GAR² and can never mean only 10 GAR². In omitting this metrological statement, the text paves the way for the looser interpretation of "area" as the numerical value of xy disregarding the empty sexagesimal place, and the "area" of x = 30 y = 20 is then simply 10, not 10,0. In order to keep our formulas correct, however, we must maintain a clear distinction between the exact value of a product and its sixtieth. We therefore introduce the notation
> $(xy) = 0;1\cdot xy$
> wherever the word "area" in the text means only 0;1 xy."

Supposons maintenant que le nombre représentant 1 ninda soit à droite de la position de l'unité de compte.

	U		
1 ninda		1	
u		30	
s		20	
u×s		10	
P		5	
P+u		35	(2) vérifié
P + u×s		15	(1) vérifié

Les deux égalités sont alors vérifiées, et le texte devient cohérent. Il suffit donc, une fois de plus, de fixer correctement les règles de positionnement sur l'abaque au début du calcul en renonçant à toujours considérer le ninda comme l'unité de compte.

Conclusion

Le nombre sexagésimal positionnel des mathématiques cunéiformes est fondamentalement un instrument de calcul, un nombre sans quantité. Cependant, dans le travail mathématique et pour des besoins de calcul particuliers, la position des unités a dû être fixée à des moments précis du calcul. Fixer la position des unités revient à fixer des règles d'usage de l'abaque. Ces règles laissent une beaucoup plus grande flexibilité au calcul que ne le font les notations modernes (marques telles que 0, « ; », °, ', `).

Gérer le problème des O de G par marques sur les nombres dans les textes écrits introduit un système rigide qui empêche d'analyser les pratiques de calcul des anciens scribes. En particulier, cela empêche de distinguer

- La détermination des O de G et la détermination de la position des nombres dans l'abaque
- Les unités de mesure et l'unité de compte de l'abaque.