OBSERVAÇÕES SOBRE O PAPEL DAS FIGURAS NA PRÁTICA MATEMÁTICA EUCLIDIANA

INTRODUÇÃO

É um lugar comum próprio à crítica filosófica do século XIX denunciar a falta de rigor da prática geométrica tradicional causada pelo emprego não controlado dos diagramas na produção de inferências. Assim Felix Klein denuncia abertamente certos limites da geometria de Euclides – ou da geometria costumeiramente aceita como "euclidiana": em primeiro lugar, a falta de atenção para o "desenho geométrico correto", da qual Euclides teria sido vítima, arriscando-se a apresentar "falsas conclusões" devido a falsos diagramas, e em segundo lugar a proliferação de casos particulares em que o autor dos *Elementos* fora obrigado a tratar não tendo reconhecido que implicitamente os axiomas de ordem e de continuidade:

> The significance of these axioms of betwenness must not be underestimated. They are just as important as any of the other axioms, if we wish to develop geometry as a really logical science, which, after the axioms are selected, no longer needs to have recourse to intuition and to figures for the deduction of its conclusions ... Euclid, who did not have these axioms, always had to consider different cases with the aid of figures. Since he placed so little importance on correct geometric drawing, there is a real danger that a pupil of Euclid may, because of a falsely drawn figure, come up to a false conclusion. It is in this way that the numerous so called geometric sophisms arise.

(ver Klein Felix, *Elementarmathematik von Höheren Standpunkt. Band 1*, Berlin, Springer, 1933).

O remédio necessário para neutralizar os perigos provocados pela confiança excessiva na figura seria o desvio pela explicação verbal de certas propriedades implicitamente admitidas na geometria "elementar". Observa-se esta tendência em prática no crescimento e no refinamento dos axiomas (Pasch, Hilbert), assim como na explicação das "premissas implícitas" no raciocínio geométrico (caso da intersecção de duas circunferências).

Ao contrário, por volta da primeira metade do século XX emergiu uma tendência oposta na história das matemáticas antigas, que preferia destacar o ato grau de abstração da matemática Euclidiana em relação a seus predecessores. Dessa forma observa Arpad Szabò: "many propositions were doubtless first discovered by drawing all sorts of figures and lines in them, and observing apparent relations of equality...between parts" (Voir Szabò Arpad, *The beginning of Greek mathematics (Anfänge griechischen Mathematik*., Hollad, Boston, London, Reidel Dordrecht, 1978). Em seguida: "Von Fritz concluded that the distinguishing features of Greek mathematics is the turn which took it away from the visual and towards the abstract" (*ibid.* p. 189).

Nem em um nem no outro dos casos, no entanto, o papel dos diagramas na prática geométrica foi objeto de estudo[1]. Desta maneira, consideramos que uma pesquisa deste gênero seria importante, no mínimo, por duas razões. Primeiramente, os diagramas merecem um exame em si como objetos (artefatos) que integram os textos matemáticos e, sem os quais, o texto mesmo é freqüentemente ininteligível. E, em segundo lugar, o recurso ao diagrama representa um dos raros exemplos de raciocínio matemático não verbal, que permite o estudo de uma prática matemática a partir de fontes outras, além do discurso escrito.

Na presente comunicação, gostaria de contribuir com esse estudo discutindo o emprego das figuras no contexto da geometria plana dos *Elementos* de Euclides

[1] De Young Gregg,

(*livro primeiro).*

RESULTADO E DISCUSSÃO

O papel das figuras: primeiro argumento

Os textos das obras géométricas gregas estão sempre acompanhados por figuras. É bem provável que as figuras tivessem que estar presentes nos originais também, já que sem elas é freqüentemente impossível de compreender o texto. Além disso, as referências dos filósofos e dos comentaristas antigos sobre a prática matemática de seus contemporâneos ou predecessores parecem confirmar esta hipótese[2].

En propos, W. Knorr et R. Netz dédient plusieurs pages à l'étude du terme "diagramma" auprès des mathématiciens et des philosophes anciens. Globalement, la signification du terme est plus vaste que celle que nous lui attribuons aujourd'hui, vu qu'il peut etre traduit, selon le contexte, comme "figure", "construction", "théorème". A titre d'exemple, je montrerai un fragment tiré de la *Métaphysique* d'Aristote qui cite un théorème effectivement présent au premier livre des Eléments (I. 32), et un passage tiré du commentaire de Proclus **[document 4, 5]**. Le premier qui constitue une valable référence à la mathématique pré-euclidienne, nous permet d'apprécier la conclusion de Knorr, d'après laquelle: "constructions [diagramma] were not more accessories to mathematical arguments ... their purpose was to make evident the truth of the theorem under investigation"("the evolution of euclidean elements").
Le deuxième nous offre un aperçu du procédé de la démonstration euclidienne, qui selon la schématisation donnée par Proclus, s'agence suivant un passage du "général" à l'individuel, à travers la fixation ("ekthèse") d'un certain objet, ou sa présentation concrète par le moyen d'un diagramme. A ce niveau de la preuve un objet individuel est introduit (**"la donnée sous les yeux" – Proclus),** et caractérisé plus précisement dans la suite de la démonstration à l'aide d'une figure concrète (*diorismos*) et d'une construction qui opère sur cette dernière. Rappelons que le schéma de Proclus est en effet le fruit d'une élaboration de l'auteur (qui vit néanmoins au IV siècle de notre ère) de la structure déductive de la proposition euclidienne, mais il n'est pas incohérent avec certaines régularités que l'on peut retrouver dans les Eléments eux memes, ni, probablement, avec la pratique euclidienne

C'est aussi par l'acte que les constructions géométriques sont découvertes, car c'est par une division de figures données que nous les trouvons. Si les figures étaient données divisées, les constructions sauteraient aux yeux, mais, en fait, elles ne sont présentes qu'en puissance. **Pourquoi la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits (...) Si donc on avait tiré une ligne parallèle au coté du triangle, à qui voit la figure, la raison serait immédiatement évidente (...)** il est donc clair que les constructions géométriques en puissance sont découvertes quand on les fait passer à l'acte, et la cause en est que la conception meme du géomètre est un acte.
(Aristote, *Met*, theta, 9, 1051a21- 33).

Tout problème et tout théorème, remplis de leurs parties accomplissantes, doivent posséder eN propre toutes celles-ci: la proposition, l'exposition, la détermination, la construction, la démonstration et la conclusion. Parmi ces parties, la proposition, après avoir donné une certaine chose, déclare quel

[2] Cfr Aristote, *Met*, theta, 9, 1051a21- 33).

est l'objet de la recherche; car une proposition parfaite comporte ces deux choses. **L'exposition, reprenant en particulier cette chose donnée, la dispose d'avance en vue de ce qui est cherché. La détermination explique clairement à part ce qui constitue la chose cherchée. La construction ajoute ce qui manque à la chose donnée en vue de poursuivre ce qui est cherché.** La démonstration induit savamment la proposition par suite des choses consenties. Enfin, la conclusion retourne de nouveau à la proposition en confirmant ce qui a été démontré.
(Proclus, *In Euclidem*, tr. Paul Ver Ecke*,* p.)

Passemos à um breve exame de fontes manuscritas, relativamente à disposição no primeiro livro dos *Elementos*. Apesar de sua importância, as figuras das edições modernas e contemporâneas dos *Elementos* não têm nenhuma fundação documental.
O zelo aplicado por Heiberg à crítica do texto (ele utilisou 7 manuscritos para editar o texto crítico) não foi aplicado ao estudo filológico das figuras. No que concerne às figuras, de fato, Heiberg se baseou inteiramente na edição de August (1826), onde elas foram reproduzidas por "interesse didático" (*in usum tironum*), logo, sem nenhum cuidado filológico[3].
Assim como para a edição crítica de Heiberg (1880), Peyrard (1816-1818) também não abordou em sua pesquisa a aparência das figuras no manuscrito "pré-theoniano", consultado por ele[4].
Uma das conseqüências desta ausência de rigor é o fato de que os diagramas que podemos ver nas edições parecem muito mais gerais que nos exemplares dos códigos manuscritos e nas outras edições, como a de Grynaeus de 1533, e a latina de Zamberti, de 1505, que reproduzem as figuras de modo mais fiel às fontes manuscritas consultadas.

Hiper-especificidade e incorreção

A análise dos manuscritos medievais conduzida por Ken Saito[7], revela dois fenômenos surpreendentes, relativos ao "estilo" das figuras: "hiper-especificidade" e "incorreção".

A hiper-especificidade é um fenômeno que aparece na maior parte (mas não em todos os casos) das figuras analisadas por Saito. Estas figuras provêm de quatro entre os seis manuscritos utilisados por Heiberg, além de dois manuscritos da edição latina de Gérard de Cremone[8].
Nas proposições que tratam das propriedades dos triângulos "em geral", enquanto os editores modernos reproduzem um triângulo não-retângulo e escaleno, vemos um triângulo isóscele ou retângulo na maior parte dos manuscritos (exemplos: Euclides, *Elementos,* I.4, 8, 19 – 20).
Esse fenômeno, mesmo tendo se generalizado, não é observado em todos os casos e nem sempre seguindo as mesmas modalidades.

Em I. 18, o autor enuncia a proposição seguinte: "em todo triângulo, o lado maior sub-entende o ângulo maior". O texto menciona explicitamente um "lado maior" (*méizon pleurà*), e todas as figuras dos manuscritos representam um triângulo cujo lado é maior que o outro. Na demonstração que segue, é pedido que se trace

3 Saito Ken, *A preliminary study in the critical assessment of diagrams in Greek mathematical works*, *SCIAMVS* 7(2006), 81-144. As figuras aqui citadas estão presentes nessa obra.
4 *Idem.*
7 *Idem*
8 *Idem*

um segmento igual a um outro lado do triângulo sobre o lado maior deste. Neste caso, o desenho que encontramos em Heiberg não se distancia tanto dos códigos: nenhuma “hiper-especificidade” é detectada.
Em I. 19, a hiper-especificidade age somente sobre o ângulo, que aparece reto (codex **B**, **V**)[9], enquanto que o texto não o considera nunca explicitamente como tal.

Como observa Ken Saito, em alguns momentos os diagramas que acompanham uma proposição não respeitam as propriedades exatas explicitadas no texto (tal qual a igualdade entre retas).
Para permanecer ainda no primeiro livro dos *Elementos*, observemos a **I. 22**. Aqui, ao passo que Heiberg representa as retas dadas "visivelmente” iguais aos lados do triângulo, cuja construção é efetuada na proposição, os manuscritos reproduzidos nos mostram retas “visivelmente” desiguais aos lados.

Em resumo, nós chamaremos de **"atipicalidade"** do diagrama o fato deste representar propriedades não explicitadas pelo texto, ou realizar uma configuração espacial não mencionada pelo texto, ou realisar uma única entre várias das configurações coerentes com o texto. O diagrama se apresenta, portanto, com um excesso (ou defeito) de informação que poderia (eventualmente) entravar o desenrolar da demonstração.

Em preliminar, eu indicaria “dois sentidos” nos quais a atipicalidade pode se manifestar:
1) **Uma figura pode ser atípica relativamente pela sua aparência, a saber, disposição relativa dos diferentes elementos que a constituem** (tal é o caso da falácia de “todos os triângulos são isósceles”).
2) **Por outro lado, um diagrama pode ser “atípico” naquilo que K. Manders chama de “propriedades exatas"**[10], e que são exemplificadas em certos casos de hiper-especificidade analisadas acima. Um diagrama hiper-específico, nesse sentido, é um diagrama que realiza (aproximativamente) “relações exatas” (igualdade entre segmentos de reta ou ângulos, desigualdades entre ângulos e segmentos não inclusos um no outro, o fato de um ângulo ser “reto”, perpendicularidade das retas, paralelismo...) ao passo que o texto não especifica as ditas relações.

O papel das figuras na demonstração matemática antiga

Passemos à observação de outras fontes além dos manuscritos para recolher outros indícios sobre a prática dos diagramas na geometria euclidiana plana. Infelizmente, nenhum matemático da antiguidade nos deixou reflexões metodológicas ou filosóficas aprofundadas sobre seu trabalho. Além de indicações encontradas em trabalhos dos filósofos gregos (Aristóteles, mas também Platão, os estóicos, os epicuristas e os céticos tais como Sextus), uma obra que permanece ainda como importante referência (mesmo que tardia) para tentar entender a prática geométrica são os comentários de Proclus.
Aliás, o diádoco tem um papel doxográfico precioso, relatando críticas e objeções que teriam sido perdidas sem seu trabalho. Dessa forma, ele se torna testemunha da existência de uma longa tradição de “detratores”, seja do conjunto das matemáticas, ou mais precisamente de certas áreas, ou ainda de certos modos de

---

9 *Idem*

10 Manders Ken, *The Euclidean diagram,* in Mancosu Paolo (ed) *The philosophy of mathematical Practice,* Oxford, OUP, 2008.

raciocínio. A “atipicalidade” dos diagramas não devia, provavelmente, escapar a algumas destas objeções.
Tentarei partir do comentário de Proclus para pesquisar se podemos estabelecer, pelo menos de maneira hipotética, as pistas de sensibilidade à atipicalidade nos matemáticos gregos clássicos.

A análise dos casos

Uma hipótese que poderíamos apresentar é a de que a atipicalidade seja efetivamente reconhecida e analisada, por exemplo através da enumeração de caso de figura que Proclus faz para certas proposições dos *Elementos* (por exemplo: 2, 3, 6, 9, 11, 12, 18, 24, 30, 35, 36, 38, 39, 41, 43).
Lemos no comentário que cada problema pode ser distinto do que ele admite em um único caso, embora ele tenha admitido vários casos[11].

"some problems have no cases, while others have many; and the same is true of theorems. **A proposition is said to have cases when it has the same force in a variety of diagrams, that is, can be demonstrated in the same way despite changes in position,** whereas one that succeeds only with a single position and a single construction is without cases..."
(Proclus 223, ed. Morrow, p. 174)

Em outros termos, todos os diferentes “casos” de um problema nos conduzem à mesma solução, partindo de dados iniciais diferentes, sem no entanto implicar uma mudança significativa no núcleo argumentativo matemático. Pos outro lado, o que muda é a disposição espacial dos objetos uns em relação aos outros (*diagramma*).
Consideremos Euclides, *El*. I. 2 (tr. Heath): "to place at a given point (at an extremity) a straight line equal to a given line” [12].
Em seu comentário sobre essa proposição, Proclus introduz dois critérios de distinção de caso, segundo a posição do ponto em relação à reta dada, e segundo o lado do triângulo eqüilátero cuja construção é pedida para levar a um bom fim da demonstração, seja respectivamente igual, maior ou menor à reta dada.
Restringindo-nos ao primeiro critério, distinguimos duas situações de acordo com o que o ponto seja situado sobre a linha dada ou no exterior da linha. Se o ponto é sobre a linha, então ele está situado sobre uma das duas extremidades, ou de fato entre as duas. Se o ponto está no exterior da linha, então Proclus distingue duas possibilidades: ou o ponto está de lado, de maneira em que a direita da junção levada do ponto à outra extremidade forme um ângulo; ou o ponto fica sobre o prolongamento da reta dada. A construção é, em seguida, conduzida segundo as etapas especificadas por Euclides.
A análise proposta representa um exemplo de “exercício escolar”, mas ele justifica ao mesmo tempo a escolha euclidiana e sua maneira de proceder. A validade do caso de figura explicado por Euclides em I. 2 é justificada pela enumeração dos casos e o desenvolvimento de cada um, o que permite concluir que toda situação topológica inicial alternativa leva ao mesmo resultado.
É interessante examinar, nesse nível, se a hiper-especificidade deu lugar a uma distinção de caso similar.
Tomemos o comentário de Proclus sobre a proposição I. 36, cuja figura nos

[1]1 Proclus, (G. R. Morrow, tr..) *A Commentary on the First Book of Euclid’s Elements*. Princeton, Princeton University Press, 1970.

[1] 2 Euclide, *The thirteen books of Euclid´s Elements*, (ed. Heath Thomas), New York, Dover, 1956 (second edition).

manuscrito é hiper-específica. Proclus observa que Euclides escolheu, entre vários casos que ele poderia tratar, "o caso mais difícil" e em seu comentário, ele procede analisando os outros casos, de maneira análoga ao que acabamos de ver para a a proposição I. 2. Notamos, no entanto, que entre os casos tratados, Proclus não considera nunca as diferentes possibilidades para o ângulo.
Ora, pode-se dizer que 1) a figura considerada por Proclus não era retangular, diferente daquelas transmitidas pelos copistas. 2) Proclus teria tratado o caso da hiper-especificidade em uma lacuna no fim de I. 37.
Quanto à primeira hipótese, ela não é verossímel: a figura hiper-específica (retângulo) aparece em todos os manuscritos, e também na edição moderna do *Comentário* de Proclus. A segunda, por outro lado, não se exclui: a lacuna já devia estar presente no arquétipo, e nenhum meio para corrigir está disponível para nós.
É razoável dizer, afinal, que os casos considerados por Proclus só comportam as figuras topologicamente diferentes.

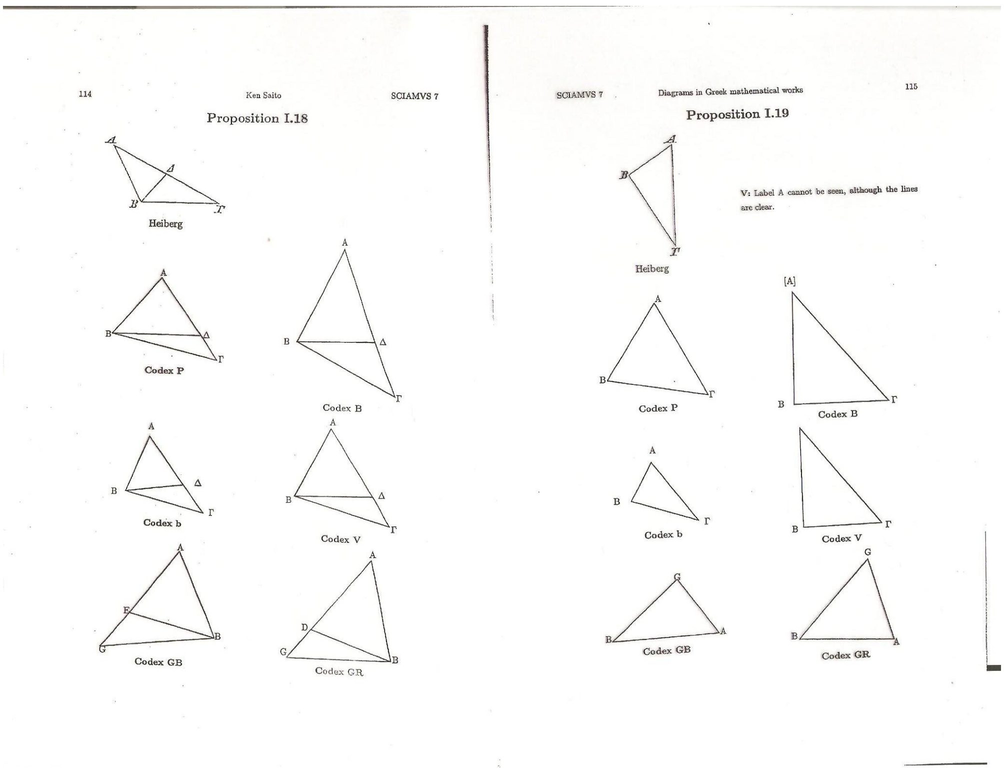
Conclusões

A discussão precedente nos permite apontar as seguintes conclusões (parciais):

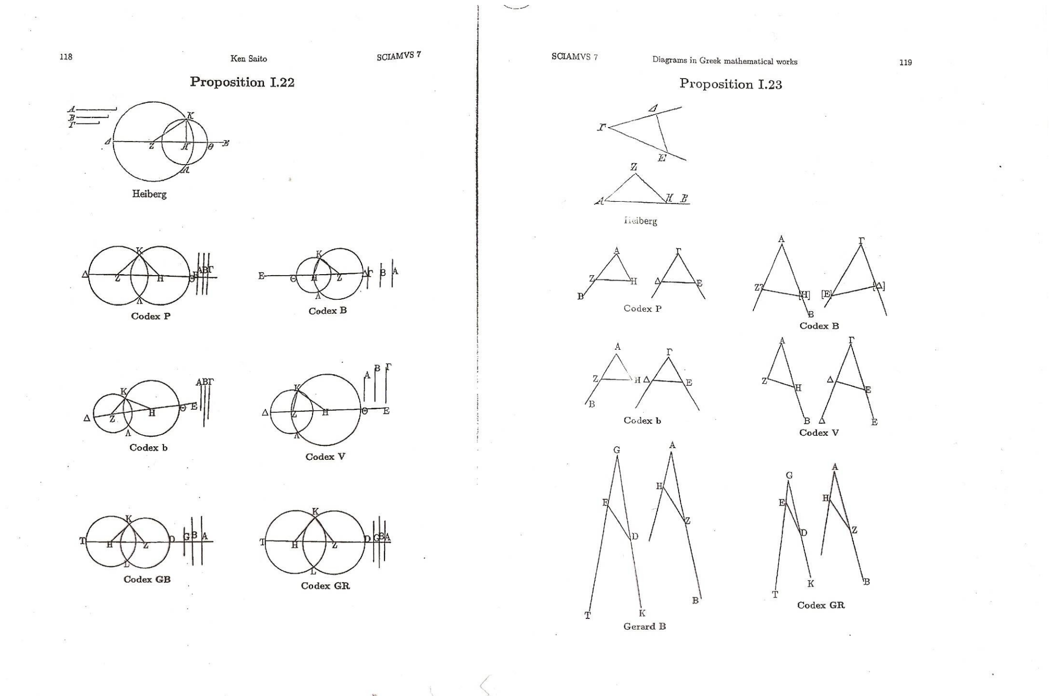
1) É possível que as figuras nos textos geométricos antigos apresentem traços de "hiper-especificidade" e "incorreção": a presença generalizada desses dois fenômenos nos manuscritos medievais (presença não restringida aos manuscritos do primeiro livro dos Elementos) é um índice a favor dessa interpretação. Se seguimos essa hipótese, nós podemos concluir que a prática da leitura e do emprego dos desenhos na geometria grega antiga difere da nossa própria prática, que opera escolhas praticamente contrárias (cfr. August, Heiberg).
2) De acordo com o testemunho de Proclus, que permanece como a fonto mais preciosa para a compreensão dos *Elementos,* podemos chegar à hipótese plausível de que o uso das figuras na prova, para os matemáticos gregos, estava submetido às práticas de controle. A discussão dos casos de figura, quando eles não estão presentes, ou não apenas vista como um "exercício escolar", poderia representar um método visando banir as atipicalidades perigosas. Quando, como na maior parte dos casos, a disposição dos pontos e das linhas na figura não especificada ou restrita pelo texto, toda a aparência inicial particular pode entravar a correção da prova. Embora a análise apresentada por Proclus justifique a cada vez o caso único adotado por Euclides, que pode ser ora aquele que "se acomoda a todas as construções", ora o mais difícil (por exemplo, I. 2, I. 12), ou ainda a sua escolha pode ser ditada pela exigência em respeitar a ordem dedutiva das proposições.
3) Nem a hiper-especificidade, nem a incorreção são objetos de uma análise de caso de figuras. A única dúvida está representada pela lacuna no fim do comentário de Proclus da proposição XXXVI. Seria até mesmo espantoso se Proclus não houvesse introduzido uma discussão de atipicalidade (e incorreção) antes, visto que a maior parte dos códigos reproduzem desenhos hiper-específicos desde as primeiras proposições (I. 4). Se colocarmos de lado a hipótese de que esse fenômeno teve origem no medievo, nós concluiremos que a "hiper-especificidade" e a "incorreção" eram dois traços das figuras na prática matemática antiga reconhecidos e aceitos como não problemáticos. Segundo uma hipótese inverossímil, o uso dos diagramas era submisso a uma "divisão de tarefas" entre texto e desenho.
4) Qual é, enfim, a razão da atipicalidade? Infelizmente, não posso avançar para além dessas conjecturas. Para além das considerações de ordem estética, a dificuldade na representação de configurações geométricas certamente mais complexas (e mais problemáticas) que aquelas que podemos encontrar na

geometria plana do primeiro livro dos *Elementos* poderia ter sugerido a adoção de representações esquemáticas nas quais certos traços hiper-específicos ficam acentuados. Estudos mais aprofundados sobre os diagramas nas *Esféricas* de Theodosius, assim como sobre a forma como Eutocius trata os diferentes casos de figuras em seu comentário sobre os Cônicos de Apolônio – todos esses, temas abordados por Saito no citado artigo – são certamente bem vindos no sentido de confirmar ou refutar as conclusões que acabamos de desenvolver.

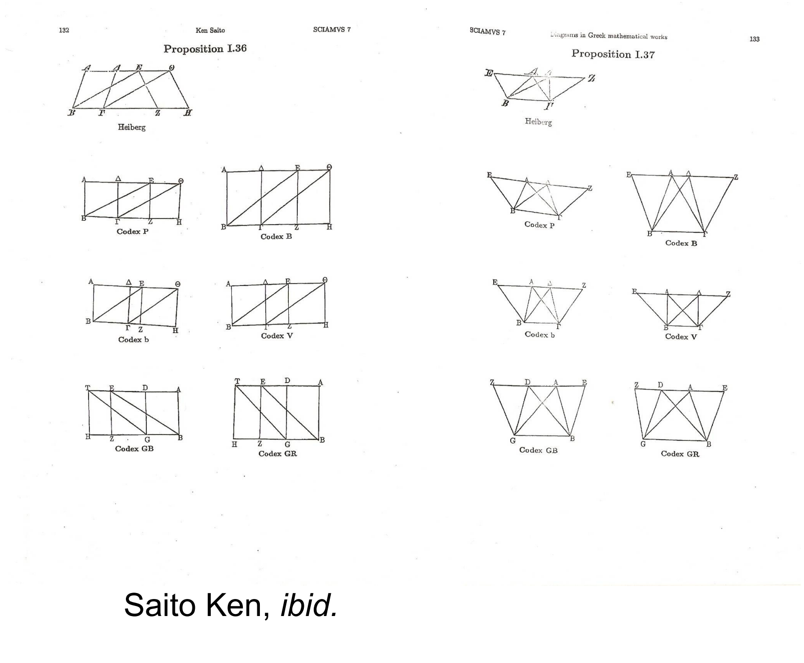
7) **IMAGENS.**



Saito Ken, *A preliminary study in the critical assesment of diagrams in greek mathematical works*, *SCIAMVS* 7(2006), 81-144



Saito Ken, *A preliminary study in the critical assesment of diagrams in greek mathematical works*, *SCIAMVS* 7(2006), 81-144



Saito Ken, *ibid.*

Figures dans les textes mathématiques anciens: Appendice

"The text of a mathematical work is almost always accompanied by diagrams. It is quite certain that these existed in the original, because it is often impossible to understand the text without them..."
Saito K., "A preliminary study in the critical assesment of diagrams in Greek mathematical works", dans *SCIAMVS*, vol. 7 (2006), 81 – 144.

Le texte des Eléments: Fragments

Six fragments contenants texte et figure (Pack n° 2323) trouvés à Elephantine en 1906/1907 et en 1907/1908 et publiés dans Mau et Muller (MOBS), qui datent probablement du troisième quart du troisième siècle a. c. Fragments du XIII livre: 10, 16, mais les propositions ne suivent pas l'ordre du texte reçu. Il ne s'agit pas d'une copie, mais d'un travail "de recherche".

Papyrum Herculaneum 1061
Fragments des Eléments dans un essai de Démetrius Lacon. A l'intérieur on y trouve des citations de
certaines propositions des Eléments, et précisément **(période??)**
El. I, d. 15.
El. I, 19.
El. I. 3.
El. I. 10.

Papyrum Oxyrhynchus. i. 29.
Enunciation de *El*. II, 5.

MANUSCRITS

Heiberg consulta 7 manuscrits grecs (et un palimpseste)

P = Vatican, n° 190, 4to, 2 volumes, 10 siècle (pré-théonien)

Eléments (I -XIII) + scholies + commentaire de Marinus aux données + données + Eléments XIV,
XV + parties d'un commentaire de Théon.

F = MS. XVIII, 3, libreria Laurenziana, Firenze, 4to, 10 siècle.

I -XV + Optique + Phénomènes

B = Bodleian MS, d'Orville, x. 1, inf. 2, 30, 4to, 888 a.d.

Eléments, I-XV + Scholies.

V = Viennese, MS, Philos. Gr. N° 103, XII siècle (prob.)

Elements I -XV, Optique, Phénomènes + scholies.

b = Bologna, MS. Numéroté 18-19, Libreria Comunale, 2 volumes, 4to, 11 siècle.

Définitions + énunciations sans démonstration des Eléments I- XIII et des Données + Préambule à
la géométrie + éléments I- XIII + Données (partie).

p = Paris, MS 2466, 4to, XII siècle.

Eléments I- XIII + scholies.

q = Paris MS. 2344, folio, 12 siècle.

Eléments I- XIII + scholies.

Les éditions imprimées en grec des éléments sont les suivantes

Editions imprimées (grec)	Manuscrits consultés
Grynaeus (Basel, 1533)	Paris 2343, Marciana 301
Gregory (Oxford, 1703)	texte de Grynaeus + manuscrits non identifiés
Peyrard (Paris, 1814 – 1818)	P: Vatican grec 190 (pré-théonien).
August (Berlin, 1826-1829)	partie de l'édition trilingue de Peyrard.
Heiberg (Leipzig, 1883 – 1888)	*v. supra*

REFERENCIAS

[1] Heath Th. (ed.) *Thirteen books of Euclid's Elements*, Dover Publications, 1956.

[2] Klein Felix, *Elementarmathematik von Höheren Standpunkt. Band 1*, Berlin, Springer, 1933.

[3] Manders Ken, *The Euclidean diagram,* in Mancosu Paolo (ed) *The philosophy of mathematical Practice,* Oxford, OUP, 2008.,

[4] Mueller I*, Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements,*Cambridge, MIT Press, 1981.

[5] Netz R. , *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*. Cambridge CUP, 1999.

[6] Proclus, (G. R. Morrow, tr..) *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton, Princeton University Press, 1970.

[7] Saito Ken, *A preliminary study in the critical assesment of diagrams in greek mathematical works*, *SCIAMVS* 7(2006), 81-144.

[8] Szabò Arpad, *The beginning of Greek mathematics* (tr.Ungar A. M.)., Hollad, Boston, London, Reidel Dordrecht, 1978