OBSERVATIONS SUR LE ROLE DES FIGURES DANS LA PRATIQUE MATHEMATIQUE EUCLIDIENNE

Le développement des mathématiques au cours du XIX siècle a devoilé comme incorrects ou infondés des faits mathématiques qui paraissent évidents sur la base de la visualization immédiate et intuitive. On se réfère, entre autres, à la découverte, dans le domaine de l'analyse, de courbes continues et différentiables en aucun point, aux recherches sur la continuité, et, pour ce qui concerne la géométrie, aux travaux de fondation axiomatique menés par Gergonne, Schilling, Pasch, et finalement Hilbert.

Ainsi Felix Klein *Mathématiques élémentaires d'un point de vue supérieur* (déstinée aux enseignants des mathématiques), dénonce ouvertement certaines limites de la géométrie d'Euclide - ou de la géométrie censée etre "euclidienne" - : premièrement la manque d'attention pour le "dessin géométrique correcte" dont Euclide serait victime, et qui risquerait d'entrainer des "conclusions fausses" issues de faux diagrammes, et en deuxième lieu la prolifération des cas particuliers que l'auteur des Eléments était obligé de traiter n'ayant pas reconnu, ou n'ayant reconnu que implicitement les axiomes de ordre et de continuité.

Pour tous ces auteurs, finalement, le recours au diagramme dans le raisonnement, et particulièrement dans le contexte de la justification, était considéré un trait de "faiblesse" propre à la pratique mathématique "traditionnelle". Un exemple célèbre des fausses conclusions issues de "faux diagrammes" est representé par la fallacie de "tous les triangles isocèles" **[doc 2, 3].** Ici, observe E. A. Maxwell dans son *Fallacies in mathematics*, seulement la mention explicite des relations d'etre à l'intérieur ou à l'extérieur d'une certaine région peut amender la faute dans le raisonnement (la bisectrice de l'angle BAC et l'axe de BC coupent en deux moitiés égales l'arc BC de la circonférence circonscrite. L'explicitation de ce fait nous permet de conclure que le point P ne se trouve pas à l'intérieur du triangle ABC). Le detour par l'explicitation verbale de certaines propriétés implicitement admis dans la géométrie "élémentaire" – dit Maxwell - est donc un remède nécessaire afin de neutraliser les dangers provoqués par l'excessive confiance dans la figure.

Il y a peut etre, derrière ces opinions, l'idée- autrefois denoncée par S. Unguru – selon laquelle les mathématiques sont une "science universelle", une algèbre de la pensée contenant des structures omnitemporelles, durables et indépendantes de la forme particulière qu'elles revetent à un moment historique donné. Ainsi, la géométrie des *éléments* contiendrait implicitement les structures rendues explicites par la moderne reflexion sur les fondements et il n'y aurait *grosso modo* aucune perte dans le passage de l'une à l'autre, mais au contraire un gain en clart et rigueur.

Je crois, pourtant, que la manière d' utiliser et penser un objet mathématique est soumise à une rationalité historiquement donnée, et elle est entrelacée à des pratiques qui peuvent etre conjecturés et éventuellement reconstruites à partir des évidences à disposition, linguistiques ou non. Dans la présente communication je voudrais discuter quelques éléments pour développer un étude de l'emploi des figures dans le contexte de la pratique argumentative des mathématiques grecques (et not. des *éléments*), et ainsi permettre d'apprécier selon leur juste poids les critiques de Klein et de Maxwell.

Role des figures: premier assesment

Les textes des oeuvres mathématiques grecques sont toujours accompagnés par des figures. Il est très probable que les figures devaient etre présentes dans les originaux aussi, puisque sans elles il est souvent impossible de comprendre le texte. En outre, les références des philosophes et des commentateurs anciens à la pratique mathématique de leurs contemporains ou de leurs prédecesseurs paraissent confirmer cette hypothèse.

Evidences

Je passerai maintenant à un bref examen des sources manuscrites à disposition relativement aux *Eléments*.

Malgré leur importance, les figures dans les éditions modernes et contemporaines des *Eléments* n'ont aucune fondation documentaire **[doc 6, 7]**.

Le zèle appliqué par Heiberg à la critique du texte (il utilisa 7 manuscrits pour éditer le texte critique) n'a pas été appliqué à l'étude philologique des figures. Pour ce qui concerne les figures, en fait, Heiberg se base entièrement sur l'édition de August (1826), où elles sont reproduites avec un "intéret didactique" (in usum tironum), et donc sans aucun soin philologique.

Comme pour l'édition critique de Heiberg (1880), Peyrard (1816-1818) non plus n'a mené une enquete sur l'apparence des figures dans le manuscrit "pré-théonien" qu'il a consulté.

Une conséquence de cette manque de riguer est le fait que les diagrammes que nous pouvons voir dans ces éditions paraissent beaucoup plus générales que les exemplaires dans les codes manuscrits et dans les autres éditions, comme celle de Grynaeus du 1533, et celle latine de Zamberti, du 1505, qui reproduisent les figures de manière plus fidèles aux sources manuscrites consultées.

<u>Hyperspécificité et incorrection</u>

L'analyse des manuscrits medievales conduite par Ken Saito, dans *A preliminary study in the critical assesment of diagrams in greek mathematical works*, revèle deux phénomènes surprenants relativement au "style" des figures: "hyperspécificité" et "incorrection".

L'hyperspéficité est un phénomène qui apparait dans la plupart (mais pas dans tout les cas) des figures considérées par Saito, qui proviennent de 4 parmi les 6 manuscrits utilisés par Heiberg plus 2 manuscrits de l'édition latine de Gérard de Cremone.

Dans les propositions qui traitent des propriétés des triangles "en général", alors que les éditeurs modernes reproduisent un triangle non-rectangle et scalène, dans la plupart des manuscrits nous voyons un triangle isocèle ou rectangle (exemples: I.4, 8, 19 – 20).

Ce phénomène, tout en étant généralisé, ne se vérifie pourtant pas dans tous les cas, et pas toujours selon les memes modalités.

<u>Dans I. 18</u>, l'auteur énonce la proposition suivante: "dans tout triangle, le coté le plus grand sous- entend l'angle le plus grand". Le texte mentionne explicitement un "coté plus grand" (*méizon pleurà*), et toutes les figures des manuscrits représentent un triangle dont un coté est plus grand que l'autre. Dans la démonstration, ensuite, il est demandé de retrancher sur le coté plus grand un segment égale à un autre coté du triangle: en ce cas, le dessin que nous retrouvons dans Heiberg ne s'éloigne pas tellement des codes: aucune "hyper-spécificité" n'est détectable.

<u>Dans I. 36</u>, L'hyper-spécification agit seulement sur l'angle, qui apparait droit alors que le texte ne le considère jamais explicitement comme tel.

Nous passons maintenant à l'incorrection: comme observe Ken Saito, parfois les diagrammes qui accompagnent une proposition ne respectent pas les propriétés exactes explicités dans le texte (tel quel l'egalité entre droites).

Pour rester encore au premier livre des Eléments, prenons la **<u>I. 22</u>**. Ici, alors que Heiberg représente les droités données "visiblement" égales aux cotés du triangle dont la construction est effectué dans la proposition, les manuscrits reproduits nous montrent des droites "visiblement" inégales aux cotés.

En résumant, nous appelerons **"atypicalité"** du diagramme le fait qu'il représente des propriétés non explicités par le texte, ou qu'il réalise une configuration spatiale dont le texte ne fait aucune mention, ou qu'il réalise une seule parmi plusieurs configurations cohérentes avec le texte. Le diagramme se présente donc avec un excès (ou un défaut) d'information qui pourrait (éventuellement) entraver le bon déploiement de la démonstration.

Au préalable, j'indiquerai "deux sens" dans lequels l'atypicalité peut se manifester :

1) **Une figure peut etre atypique relativement à sa topologie générale, à savoir, la disposition rélative des différents éléments qui la constituent** (tel est le cas de la fallacie de "tous les triangles sont isocèles").
2) **D'autre part un diagramme peut etre "atypique" en celles que K. Manders appelle "propriétés exactes"**, et qui sont exemplifiées dans certains cas d'hyper-spécificité considérés dessus. Un diagramme hyper-spécifique en ce sens est un diagramme qui réalise (approximativement) des "relations exactes" (égalité entre segments de droite ou égalité entre angles, "droiture" d'un angle) alors que le texte ne spécifie pas les dites relations.).

Role des figures dans la demonstration mathématique ancienne

Nous nous adresserons maintenant à d'autres sources que les manuscrits, pour recueillir plus d'indices sur la pratique des diagrammes.

Malheureusement, aucun mathématicien de l'antiquité nous a laissé des reflexions méthodologiques ou philosophiques approfondies sur son travail. A part les indications qu'on trouve dans les travaux des philosophes grecs (Aristote, mais aussi Platon, les stoiciens, les épicuriens et les sceptiques tels que Sextus), une oeuvre de référence (bien que tardive) pour essayer de comprendre la pratique géométrique ancienne reste toujours le commentaire de Proclus.

D'ailleurs, le diadoque a un role doxographique précieux, en relatant des critiques et des objections autrement perdues: il se fait ainsi témoin de l'existence d'une longue tradition de "détracteurs", soit de l'ensemble des mathématiques, ou plus précisement de certains domaines (géométrie) ou bien de certains modes de raisonnement: **[doc. 8]**. L' "atypicalité" des diagrammes ne devait probablement pas échapper à quelques unes parmi ces objections.

Dans la suite, j'essayerai de partir du commentaire de Proclus pour rechercher si on peut établir, du moins en voie hypothétique, des traces de sensibilité à l'atypicalité auprès des mathématiciens grecs classiques.

L'analyse des cas

Une hypothèse qu'on pourrait avancer est que l'atypicalité soit effectivement reconnue et analysée, par exemple, à travers l'énumération de cas de figure que Proclus fait pour certaines propositions des Eléments (par exemple: 2, 3, 6, 9, 11, 12, 18, 24, 30, 35, 36, 38, 39, 41, 43).

Nous lisons en effet dans le commentaire que tout problèmes peut etre distingué selon qu'il admet un seul cas, ou bien qu'il en admet plusieurs **[texte 9]**.

Proclus définit les problèmes admettant des cas multiples comme: "ceux qui ont la meme vertu allant souvent dans un grand nombre de linéatures, et qui conservent le meme mode de démonstration lorsque les positions changent..." (la traduction anglaise me parait ici beaucoup plus claire). En d'autres termes, les différents "cas" d'un problème nous conduisent tous à la meme solution en partant de données initiales différents, sans pourtant impliquer un changement significatif dans le noyau argumentatif mathématique. Par contre, ce qui changent sont les "linéatures" - dans la traduction un peu malheureuse de Ver Ecke - ou tout simplement, la disposition spatiale des objets les uns par rapport aux autres (*diagramma*).

Considérons Euclide, *El*. I. 2 (tr. Vitrac): "Placer, en un point donné, une droite égale à une droite donnée" [texte 10].

Dans son commentaire à cette proposition, Proclus introduit deux critères de distinction de cas, selon la position du point par rapport à la droite donnée, et selon que le coté du triangle équilatéral dont la construction est demandé pour mener à bon fin la démonstration, soit respectivement égal, plus grand ou plus petit que la droite donnée.

En nous restreignant au premier critère, nous distinguons avec Proclus deux situations selon que le point soit situé sur la ligne donnée ou à l'extérieur de la ligne. Si le point est sur la ligne, alors il est situé sur une de deux extrémités, ou bien entre les deux. Si le point est à l'extérieur de la ligne alors Proclus distingue deux possibilités: soit le point est de coté de manière que la droite de jonction mené du point à l'autre extremité forme un angle, soit le point git sur le prolongement de la droite donnée.

La construction pour chaque cas est ensuite conduite selon les étapes spécifiées par Euclide.

L'analyse proposée représente un exemple d' "exercice scolaire", mais il justifie en meme temps le choix euclidien et sa manière de procéder. La validité du cas de figure déployé par Euclide en I. 2 est justifiée par l'énumération des cas et le développement de chacun, qui permet de conclure que toute situation topologique initiale alternative aboutit au meme résultat.

Il est intéressant d'examiner, à ce point, si l'hyperspécificité a donné lieu à une pareille distinction en cas.

Prenons (avec Ken Saito) le commentaire de Proclus à la proposition I. 36, dont la figure dans les manuscrits est hyperspécifique. Proclus observe que Euclide a choisi, parmi plusieurs cas qu'il aurait pu traiter, "le cas le plus difficile" et dans son commentaire, il procède en analysant les autres cas, de manière analogue à ce qu'on vient de voir pour la proposition I. 2. Notons pourtant que parmi les cas traités, Proclus ne considère jamais les différents possibilités pour l'angle.

Or, il se peut que 1) la figure considérée par Proclus n'était pas rectangulaire, à différence de celles transmises par les copistes. 2) Proclus aurait traité le cas de l'hyperspécificité dans un lacune à la fin de I. 36.

Quant à la première hypothèse, elle n'est pas vraisemblable: la figure hyperspécifique (rectangle) apparait sur tous les manuscrits et aussi dans l'édition moderne du *Commentaire* de Proclus. La deuxième, par contre, ne s'exclut pas: la lacune devait etre déjà présente dans l'archétype, et aucun moyen pour l'amender n'est à notre disposition.

Conclusions

La précédente discussion nous permet de tirer les suivants conclusions (partielles):

Les évidences issues de l'analyse philologique nous permettent d'avancer quelques hypothèses préalables autour de ce phénomène:

1) nous ne pouvons pas exclure que l'incorrection soit due aux erreurs ou à la distraction des copistes du moyen – age. Mais il n'est pas escompté que les figures des anciens étaient "correctes", et elles aient été ensuite mal copiées. Les figures auraient pu etre incorrectes à l'origine, et ensuite "corrigées" à travers des transmissions successives, puisque le texte permet toujours de construire la figure correcte (entre autres, August suit ce procédé).

Un problème pareil se pose pour "hyperspécificité": remonte-t-elle aux anciens?, ou bien elle caractérise précisément le travail des copistes mediévales? Rappelons que l'hyperspécificité est un trait que nous pouvons retrouver dans d'autres oeuvres (cfr. Jones: "The most apparent, and paradoxical, convention is a pronounced preference for symmetry and regularization in diagrams, introducing equalities where quantities are not required to be equal in the proposition, parallel lines that are not required, right angles for arbitrary angles, amd so forth..." N. Jones, *Pappus of Alexandria, Collectio, VII,* vol. 1, p. 76).

En résumant, la présence généralisée de ces deux phénomènes dans les manuscrits médievales (présence non restreinte seulement au corpus euclidien) est un indice en faveur du fait que les figures dans les textes géométriques anciens présentéraient des traits de "hyperspécificité" et "incorrection". Si l'on suit cette hypothèse, nous pouvons conclure que la pratique de lecture et d'emploi des dessins dans les mathématiques grecques anciennes diffère de notre propre pratique, qui opère des choix quasiment contraires (cfr. August, Heiberg).

1) D'après le témoignage de Proclus, nous pouvons faire l'hypothèse raisonnable que l'usage des figures était soumise à des pratiques de controle. La discussion des cas de figure, lorsque elle n'est pas, ou pas seulement vue, comme un "exercice scolaire", représente une méthode visant à bannir les atypicalités dangeureuses. Or l'analyse offerte par Proclus justifie à chaque fois le cas unique adopté par Euclide, qui peut etre soit soit celui qui "s'accomode à toutes les constructions", soit le plus difficile (par exemple I. 2, I. 12), ou encore, son choix peut etre dicté par l'exigence de respecter l'ordre déductif des propositions.
2) Ni l'hyperspécificité ni l'incorrection sont objet d'une analyse en cas de figures. Si l'on écarte l'hypothèse que ce phénomène a eu origine au moyen age, nous concluorons que "hyperspécificité" et "incorrection" étaient deux traits des figures dans la pratique mathématique ancienne reconnues et acceptée comme non problématiques. Selon une hypothèse non invraisembable, l'usage des diagrammes était soumisà une "division des taches" entre texte et dessin. Le texte spécifia les propriétés dites "exactes" des objets géométriques, alors que les figures n'étaient chargées de représenter que les relations topologiques, qui par contre ne sont pas toujours explicitées dans le texte (un exemple, le point d'intersection entre deux arcs "émerge" dans le diagramme, Euclide I. 1, I. 22, I. 12). Par conséquent, ni l'hyperspécificité, ni l'incorrection nuisaient au raisonnement, puisque, selon cette "division des taches", elles ne peuvent pas etre détectées directement dans le diagramme.

3) Nous revenons aux critiques mentionnés au debut de cette intervention. Les critiques de Klein, finalement, semblent injustes et dénonce une méconnaissance de la pratique ancienne d'emploi des diagrammes. Il est inexacte d'affirmer que les mathématiciens classiques, y compris Euclide, donnèrent peu ou aucune importance au "dessin géométrique correcte". D'autre part, le dessin géométrique est généralement correcte relativement aux relations topologiques (ou schématiques) élémentaires, et l'étude des cas et des objections témoigne que le souci pour toute atypicalité issue des dites relations n'est pas propre aux seules mathématiques contemporaines. Le commentaire de Proclus répond avec zèle et ponctualité aux arguments "dangereux" de temps en temps soulévés par ses objecteurs. Il est très probable qu'un "élève d'Euclide" ("a pupil of Euclid") possédait donc tous les instruments pour démasquer un argument fallacieux comme celui traité par Maxwell. D'autre part, aucun cas pareil nous a été transmis dans l'histoire de la géométrie euclidienne

(cfr. I. Mueller, *Philosophy of mathematics and deductive structure...*).

4) quelle était alors le role de ces traits "atypiques" propres aux représentations graphiques des mathématiques grecques classiques? Je suis forcé de m'arreter sur le terrain de conjectures. Des indications intéressantes pourraient etre fournies par les recherches sur les figures en géométrie solide, ou tout en restant à la géométrie plane, par l'étude des figures dans les cas des démonstrations par l'absurde. La difficulté dans la représentation de configurations géométriques certainement plus complexes (et plus problématiques) que celles que nous pouvons trouver dans la géométrie plane du premier livre des Eléments pourrait avoir suggeré d'adopter de représentations schématiques dans lesquelles certains traits hyperspécifiques sont accentués.
5) Et, pour conclure avec une suggestion, des études plus approfondis sur les diagrammes dans les Sphériques de Théodoses ainsi que sur la manière dont Eutocius traite les différents cas de figures dans son commentaire aux Coniques d'Apollonius – thème tous abordés par Saito dans l'article cité - sont sans doute bienvenus dans le but de confirmer ou refuter les conclusions que nous venons de déployer.