La nature du rapport de deux incommensurables

Journée organisée par Philippe Abgrall (CEPERC) et Katia Asselah (SPHERE).

Présentation :

Dans *Les Éléments* d'Euclide, deux théories des proportions sont développées, l'une pour les grandeurs (livre V), l'autre pour les nombres (livre VII). Ces deux théories sont autonomes, chacune existant avec ses propres lois. La définition du rapport de grandeurs ne nous permet pas d'appréhender l'objet premier de la théorie du livre V : « un rapport est la relation, telle ou telle, selon la taille, [qu'il y a] entre deux grandeurs de même genre. » (*déf. 5, V, trad. B. Vitrac sur éd. Heiberg*). La base est vacillante… On comprend, par la suite, que ce rapport semble être conçu comme une *relation*. Dans les deux théories, une définition est proposée de la similitude de deux rapports, pour les grandeurs (déf. 5, V, par les équimultiples) et pour les nombres (déf. 21, VII). L'outil principal du livre VII, l'anthypharèse (établi proposition 2, VII, pour la reconnaissance de nombres premiers entre eux), est élevé en critère de commensurabilité à la proposition 2, X. Le Livre X est une réponse géométrique, fondée sur les notions de grandeurs rationnelles et irrationnelles, au problème que pose aux mathématiciens grecs la découverte de grandeurs incommensurables entre elles. Une droite étant fixée, la théorie des proportions permet de classer d'autres droites selon leur commensurabilité ou leur incommensurabilité à la droite fixée. Des comparaisons successives des droites alors définies découlent différents classements définissant différents types d'irrationnelles, relativement à la première droite proposée et définie comme rationnelle.

Au 9^{e} siècle, dans le *Traité sur la difficulté relative à la question du rapport*, al-Mahani a souhaité démontrer l'équivalence entre la définition 5, V d'Euclide (par équimultiples) et la définition par anthypharèse (il y a égalité si les quotients partiels sont les mêmes). Al-Khayyam, dans son *Commentaire sur les difficultés de certains postulats de l'ouvrage d'Euclide*, établit explicitement l'équivalence de ces deux définitions et propose une théorie des proportions basée sur la définition anthypharétique et équivalente à celle du livre V d'Euclide. Quelle conséquence cela aura-t-il sur la compréhension du concept de rapport et de sa nature ? Par ailleurs, en réduisant la composition de rapports à une multiplication de nombres, al-Khayyâm ne considèrerait-il pas un rapport comme un nombre ? Ce faisant, al-Khayyâm donne un moyen de "mesurer" les grandeurs irrationnelles à partir d'une grandeur rationnelle et discute ce nouveau concept de mesure.

A partir du 9^{e} siècle, les commentaires aux *Éléments* d'Euclide, et les commentaires spécifiques au Livre X, proposent des lectures algébriques des irrationnelles définies par Euclide : la notion euclidienne de rationnelle initialement géométrique (relative à la première droite fixée) est alors algébrique, les classements des irrationnelles se font suivant des critères algébriques rendant parfois inconsistante la structure du Livre X. Après des commentaires algébriques du Livre X assez éloignés du texte euclidien, Ibn al-Haytham revient à une lecture euclidienne : son commentaire au livre X est de nature géométrique, tout en considérant la théorie des proportions du Livre V au fondement du livre X, il donne une lecture nouvelle et synthétique de la théorie des irrationnelles. Pour lui, le Livre X est un exposé des « différentes espèces de rapports » au moyen de raisonnements de proportionnalité entre grandeurs géométriques et numériques, en utilisant le concept de commensurabilité et après avoir fixé une droite de référence (la droite rationnelle proposée). Dans un même temps, Ibn al-Haytham s'éloigne du texte euclidien en fondant la commensurabilité sur la notion de rapport alors qu'Euclide la fondait sur celle de mesure.

Mardi 19 janvier 2010,

9h30-12h30 et 14h-17h, bâtiment Condorcet, salle Mondrian (646A), Univ. Paris Diderot.
Métro Bibliothèque François-Mitterrand.

Aux 16^{e} et 17^{e} siècles, la séparation « grandeur-nombre » initiée dans les *Eléments* d'Euclide est toujours équivoque, la définition 5 du livre V, le statut de la raison (est-ce un nombre ?) reste problématique. Quelques tentatives de définition de la raison de grandeurs incommensurables, d'égalité de deux telles raisons, voient le jour notamment avec la notion de « contenance » chez le Père Tacquet ou chez Arnauld.

Au 17ème siècle, un enjeu plus philosophique lié aux rapports est à considérer à travers notamment la métaphysique de Malebranche - en Dieu, il y a des rapports de grandeurs (objet des Mathématiques) et des rapports de perfections (objet de la Morale). Quelles réflexions mathématiques sur la théorie des proportions, ce poids métaphysique engendre-t-il ? Malebranche, dans ses premiers écrits, exprime un rejet des procédures infinitistes. Comment aborde t-il alors les grandeurs incommensurables ? Dans la première édition de la *Recherche de la vérité*, est exprimée la capacité qu'aurait l'arithmétique à produire une connaissance exacte de ces grandeurs. L'arithmétique (et non la géométrie) serait ainsi la réponse … Par la suite, Malebranche s'éloigne des principes cartésiens et de leur exigence finitiste, ses intérêts mathématiques sont alors orientés vers la découverte du calcul infinitésimal qui le reconduit à penser la relation mathématique, les incommensurables peuvent alors être compris dans un cadre désormais élargi des notions de grandeur et de relation.

Jean Prestet fait de sa théorie des proportions, dans un cadre arithmétique, un des enjeux principaux de son œuvre. Dès les deux préfaces de ses *Elements de mathématiques* (1675 et 1689), il annonce son intention d'expliciter à partir des entiers, toute espèce de grandeur. Le problème de l'égalité de deux raisons de grandeurs incommensurables, qui n'était évoqué alors que dans des livres de géométrie, se retrouve ici discuté dans les livres d'arithmétique de Jean Prestet. Le concept de rapport y est développé additivement et multiplicativement, comme « opérateur » étendu dans toute sa généralité à toute grandeur, qu'elle soit commensurable ou incommensurable. Jean Prestet établit une seule définition pour une proportion entre deux rapports géométriques (que les grandeurs soient commensurables ou incommensurables), en étendant l'antypharèse en algorithme des fractions continues. Jean Prestet l'illustre notamment lorsqu'il démontre que « le produit des extrêmes est égal au produit des moyens » dans le cas de rapports commensurables ou incommensurables. Après plus de six siècles, nous retrouvons ici proprement explicité les idées d'al-Khayyam…

(texte élaboré avec l'aide de tous les participants de la journée)

Marouane Ben Miled (LAMSIN, ENIT, Tunis),
Théorie des proportions et grandeurs irrationnelles dans un commentaire d'Ibn al-Haytham au Livre X des Éléments *d'Euclide*.

Bijan Vahabzadeh (SPHERE, CNRS - Un. Paris Diderot),
Le traitement des rapports irrationnels dans le commentaire d'al-Khayyâm sur les Éléments *d'Euclide*.

Claire Schwartz (SPHERE, Université de Provence),
Rapports et proportions dans la métaphysique malebranchiste.

Katia Asselah (SPHERE, CNRS - Un. Paris Diderot),
Jean Prestet : un fondement arithmétique, une seule théorie des proportions ?

Mardi 19 janvier 2010,

9h30-12h30 et 14h-17h, bâtiment Condorcet, salle Mondrian (646A), Univ. Paris Diderot.
Métro Bibliothèque François-Mitterrand.